ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XL (1983)

Verallgemeinerte Schroedergleichung und Prä-Schroedergleichungen

von UHLAND BURKART (Marburg)

Zusammenfassung. Es wird der Zusammenhang zwischen der „verallgemeinerten Schrödergleichung" $\varphi\circ\omega(x) = \alpha(x)\varphi(x)$ und der n-ten „Prä-Schrödergleichung"

$$(\varphi\circ\omega(x))^n = \varphi(x)^{n-1}(\varphi\circ\omega_n(x)) \quad \text{hergestellt.}$$

Zu diesem Zweck wird die "verallgemeinerte Automorphiegleichung" $\alpha^n(x) = \alpha\circ\omega_{n-1}(x)\times\times\alpha\circ w_{n-2}(x)\ldots\alpha(x)$ eigenführt. Das erhaltene Resultat gestattet einen neuen Beweis für die von Drewniak und Kalinowski 1976 gegebene Aussage, dass zwischen zwei verschiedenen Prä-Schrödergleichungen ($n, m \geqslant 3$) im Allgemeinen keine Äquivalenz besteht.

§ 1. **Einführung.** Auf dem siebten internationalen Symposium über Funktionalgleichungen stellte Gy. Targoński folgendes Problem [4]:

Sei X eine beliebige Menge, Y eine kommutative Halbgruppe, ω: $X \to X$, φ: $X \to Y$ und es bezeichne

$$\omega_n = \omega\circ\omega_{n-1}, \quad \omega_0 = \mathrm{Id},$$

die n-te Iterierte von ω. Ist dann das System der Prä-Schrödergleichungen

(1) $$(\varphi\circ\omega)^n = \varphi^{n-1}(\varphi\circ\omega_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

der Schrödergleichung

(2) $$\varphi\circ\omega = \lambda\cdot\varphi, \quad \lambda\in Y,$$

äquivalent?

(1) wird durch (2) impliziert (siehe [4]). Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht [2].

In [3] weist Z. Moszner nach, dass die erste nichttriviale Prä-Schrödergleichung

(3) $$(\varphi\circ\omega)^2 = \varphi(\varphi\circ\omega_2)$$

der verallgemeinerten Schrödergleichung

(4) $$(\varphi\circ\omega)(x) = \alpha(x)\varphi(x), \quad x\in X,$$

äquivalent ist, falls $\alpha\colon X \to Y$ der Automorphiegleichung

$$\alpha \circ \omega = \alpha \tag{5}$$

genügt. Ausserdem zeigt Moszner, dass (3) das ganze System (1) impliziert.

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der n-ten Prä-Schrödergleichung und (4) untersucht und, aufbauend auf dem dabei erhaltenen Resultat, ein neuer Beweis für die Aussagen von J. Drewniak und J. Kalinowski [1] über den Zusammenhang der n-ten Prä-Schrödergleichung und dem System (1) gegeben.

§ 2. Wir betrachten eine beliebige Menge X und eine Menge $Y_0 = Y \cup \{0\}$, wobei mit "0" ein Element bezeichnet sei, für das gilt:

$$\forall x \in Y\colon\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,\ 0 \cdot 0 = 0,\ 0 \notin Y, \tag{6}$$

Y sei dabei eine kommutative Gruppe. Existiert kein Element "0", so setzen wir $Y_0 = Y$.

SATZ 1. *Sei $\varphi\colon X \to Y_0$. Dann ist φ Lösung von*

$$(\varphi \circ \omega)^n = \varphi^{n-1}(\varphi \circ \omega_n) \qquad n \in N,\ n \geqslant 2 \text{ bel., fest}, \tag{7}$$

dann und nur dann, wenn gilt:

$$(\varphi \circ \omega)(x) = \alpha(x)\,\varphi(x), \tag{4}$$

wo α der Gleichung

$$\alpha^n = (\alpha \circ \omega_{n-1})(\alpha \circ \omega_{n-2}) \dots \alpha \tag{8}$$

genügt.

Beweis. 1° $\Rightarrow$. Sei also φ Lösung von (7). Dann werde α folgendermassen definiert:

$$\alpha := \frac{\varphi \circ \omega}{\varphi}, \qquad \varphi \neq 0.$$

$$\alpha := 0 \qquad \text{sonst}.$$

(a) $x \in \{x \mid \varphi(x) = 0\} \Rightarrow \alpha(x) = 0 \Rightarrow (8)$. Wegen (7) ist auch $\varphi \circ \omega = 0 \Rightarrow (4)$.

(b) $x \in \{x \mid \varphi(x) \neq 0\}$.

(i) $\varphi \circ \omega = 0 \Rightarrow \alpha(x) = 0 \Rightarrow (4)$ und (8).

(ii) $\varphi \circ \omega \neq 0$.

Nach Definition ist

$$\alpha = \frac{\varphi \circ \omega}{\varphi},$$

also

$$\alpha^n = \frac{(\varphi \circ \omega)^n}{\varphi^n} = \frac{(\varphi \circ \omega)^n}{\varphi^{n-1} \cdot \varphi}$$

und mittels (7)

(9) $$\alpha^n = \frac{\varphi \circ \omega_n}{\varphi}.$$

Aus

$$\varphi \circ \omega = \alpha \cdot \varphi$$

folgt induktiv

$$\varphi \circ \omega_n = \alpha(\omega_{n-1})\alpha(\omega_{n-2}) \dots \alpha \cdot \varphi.$$

Dies in (9) eingesetzt liefert (8) und die Gleichung (4) ist nach Definition von α erfüllt.

2° $\Leftarrow$.

(a) (i) $x \in \{x | \varphi(x) = 0\} \Rightarrow \varphi \circ \omega = 0$ wegen (4) $\Rightarrow$ (7).

(ii) $x \in \{x | \varphi(x) \neq 0\}$ und $\exists\, k,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1$, k minimal mit $\varphi \circ \omega_k = 0$. Dann ist $\varphi \circ \omega_{k-1} \neq 0$ wegen der Minimalität von k. Aus (4) folgt also: $\alpha(\omega_{k-1}) = 0$. Unter Beachtung von (8) ergibt sich $\alpha(x) = 0$ und schliesslich mittels (4):

$$\varphi \circ \omega_m = 0 \qquad m = 1, 2, 3, \dots$$

Für $k \geqslant 2$ bedeutet dies einen Widerspruch. Für $k = 1$ ist Gleichung (7) unmittelbar erfüllt.

(b) Sei $\varphi \circ \omega_k \neq 0\ \forall\, k \in N \cup \{0\}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Dann gilt:

$$(\varphi \circ \omega)^n = \alpha^n \varphi^n = \alpha(\omega_{n-1})\alpha(\omega_{n-2}) \dots \alpha \cdot \varphi \cdot \varphi^{n-1}$$

$$= \frac{\varphi \circ \omega_n}{\varphi \circ \omega_{n-1}} \frac{\varphi \circ \omega_{n-1}}{\varphi \circ \omega_{n-2}} \dots \frac{\varphi \circ \omega}{\varphi} \varphi \cdot \varphi^{n-1} = (\varphi \circ \omega_n)\varphi^{n-1}.$$

Dies ist die Behauptung. (Falls die Gruppe nicht kommutativ ist, definiert man das System (1) als

$$(\varphi \circ \omega)^n = (\varphi \circ \omega_n)\varphi^{n-1},$$

wodurch sich Satz 1 auf nichtkommutative Gruppen verallgemeinern lässt.)

Für $n = 2$ erhält man gerade das Moszner'sche Resultat. Aus diesem Grund bezeichnen wir (8) als 'verallgemeinerte Automorphiegleichung.

Eine weitere unmittelbare Folgerung aus Satz 1 ergibt sich folgendermassen:

Sei φ eine Lösung der ersten nichttrivialen Prä-Schrödergleichung ($n = 2$). Im Falle $\alpha \neq 0$ gilt dann

$$\alpha \circ \omega = \alpha,$$

also induktiv

$$\alpha \circ \omega_k = \alpha, \qquad \forall\, k \in N$$

d.h. (8) und damit (7) sind erfüllt. Im Falle $\alpha = 0$ folgt (7) wegen (4) trivialerweise. Also gilt:

Korollar 1. *Die erste nichttriviale Prä-Schrödergleichung impliziert das ganze Prä-Schrödersystem.*

§ 3. In [1] untersuchten Drewniak und Kalinowski die Frage, ob es, ausser für $n = 2$, eine weitere Prä-Schrödergleichung gibt, die das ganze System impliziert. Dies ist nun nicht der Fall; es gilt sogar, dass je zwei verschiedene Prä-Schrödergleichungen im Allgemeinen nicht äquivalent sind. Wir geben hier einen neuen Beweis für diese Aussagen.

Seien im Folgenden mit P_n bzw. P_m die n-te bzw. die m-te Prä-Schrödergleichung bezeichnet.

Satz 2. *P_n und P_m sind im Allgemeinen nicht äquivalent.* ($n \neq m$, $n, m \geqslant 2$.)

Beweis. Sei $n \neq m$, o.B.d.A. $n > m$. Annahme: P_n und P_m sind äquivalent. Es folgt dann mit Satz 1, dass

$$\alpha^n = \alpha(\omega_{n-1})\alpha(\omega_{n-2})\dots\alpha$$

und

$$\alpha^m = \alpha(\omega_{m-1})\alpha(\omega_{m-2})\dots\alpha$$

äquivalent sind, was im Allgemeinen nicht richtig ist. Denn sei:

$$X := N, \quad Y := C, \quad a, b \in C/\{0\},\ a \neq b,$$

$$\begin{aligned}
\omega(i) &:= i+1, && \forall\, i \in N,\\
\alpha(j) &:= a, && 1 \leqslant j \leqslant m-1,\\
\alpha(j) &:= b, && m \leqslant j \leqslant n-1,\\
\alpha(n+k) &:= \frac{\alpha(k+1)^{n-1}}{\alpha(k+2)\alpha(k+3)\dots\alpha(n-1+k)}, && \forall\, k \in N \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

Ferner sei:

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &:= c, && c \in C \text{ beliebig},\\
\varphi(p) &:= \alpha(p-1)\cdot\varphi(p-1), && p \in N, p \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Auf Grund obiger Definitionen gilt also:

$$\varphi \circ \omega = \alpha \cdot \varphi$$

und

$$\alpha^n = \alpha(\omega_{n-1})\alpha(\omega_{n-2})\dots\alpha.$$

Dies ist nach Satz 1 gleichbedeutend zur n-ten Prä-Schrödergleichung. Andererseits ist in diesem Fall die m-te Prä-Schrödergleichung nicht erfüllt. Denn aus

$$\alpha^m = \alpha(\omega_{m-1})\alpha(\omega_{m-2})\dots\alpha$$

folgt für $x = 1$

$$a^m = \alpha(m)a\cdot a\dots a.$$

Nach Definition ist nun einerseits $\alpha(m) = b$, andererseits nach obiger Gleichung $\alpha(m) = a$, was einen Widerspruch ergibt. q.e.d.

KOROLLAR 2. *Die n-te Prä-Schrödergleichung für ein $n \geqslant 3$ und das System der Prä-Schrödergleichungen ist im Allgemeinen nicht äquivalent.*

§ **4.** Im folgenden sei Y eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Dann kann man Bedingungen angeben, wann eine Prä-Schrödergleichung das ganze System impliziert.

Bemerkung. Wird die Gruppe Y additiv geschrieben, so bezeichnet man die Gleichung (2) gewöhnlich als Abelsche Gleichung und das System (1) als Prä-Abelsystem [5].

SATZ 3. *Sei φ eine Lösung der n-ten Prä-Schrödergleichung ($n \geqslant 3$). Sei ferner $\alpha(\omega_n) = \alpha$ oder $\alpha(\omega_n) = \alpha(\omega)$, wo $\alpha := \varphi \circ \omega/\varphi$. Dann ist φ Lösung der ersten nichttrivialen Prä-Schrödergleichung, d.h. φ ist Lösung des ganzen Systems.*

Beweis. Mit Satz 1 folgt:

$$\alpha(\omega)^n = \alpha(\omega_n)\alpha(\omega_{n-1}) \dots \alpha(\omega).$$

Ebenso gilt:

$$\alpha(\omega)^n \cdot \alpha = \alpha(\omega_n)\alpha(\omega_{n-1}) \dots \alpha(\omega)\alpha = \alpha(\omega_n)\alpha^n,$$

also

$$\alpha^n = \frac{\alpha(\omega)^n \alpha}{\alpha(\omega_n)}.$$

(a) Sei $\alpha(\omega_n) = \alpha$.

Dann folgt $\alpha^n = \alpha(\omega)^n$, also wegen der Torsionsfreiheit von Y: $\alpha = \alpha(\omega)$.

(b) Sei $\alpha(\omega_n) = \alpha(\omega)$.

Dann folgt $\alpha^{n-1} = \alpha(\omega)^{n-1}$, d.h. $\alpha = \alpha(\omega)$.

Mithin ist φ in beiden Fällen Lösung der 2-ten Prä-Schrödergleichung. q.e.d.

SATZ 4. *Sei φ eine Lösung der n-ten und $n+1$-ten Prä-Schrödergleichung. Dann ist φ Lösung der 2-ten Prä-Schrödergleichung, d.h. φ ist Lösung des ganzen Systems.*

Beweis. Mit Satz 1 folgt:

$$\alpha^n = \alpha(\omega_{n-1})\alpha(\omega_{n-2}) \dots \alpha$$

und

$$\alpha^{n+1} = \alpha(\omega_n)\alpha(\omega_{n-1}) \dots \alpha.$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$\alpha^{n+1} = \alpha(\omega_n)\alpha^n,$$

d.h.

$$\alpha = \alpha(\omega_n).$$

Mit Satz 3 folgt demnach die Behauptung.

Literatur

[1] J. Drewniak, J. Kalinowski, *Les relations entre les équations pré-Schröder I*, Ann. Polon. Math. 32 (1976), S. 5–11.
[2] Z. Moszner, P 63, S 1, Aequ. Math. 4 (1970), S. 395.
[3] — P 63, S 2, Aequ. Math. 4 (1970), S. 395.
[4] Gy. Targoński, Problem Nr. 63: *On the Pre-Schröder equation*, Aequ. Math. 4 (1970), S. 251.
[5] — *Orbit properties of functions and "Pre-Abel" equations*, Ann. Polon. Math. 33 (1976), S. 49–55.

Reçu par la Rédaction le 7. 12. 1976