ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Einige Abschätzungen der Greenschen Funktion des Operators $-\Delta u+q(x_1, x_2, x_3)u$

von M. BURNAT (Warszawa)

Es ist bekannt, daß der Operator $Bu = -\Delta u+q(x_1, x_2, x_3)u$, wo (x_1, x_2, x_3) einen beliebigen Punkt des drei dimensionalen Raumes E bedeutet, wenn $q(x)$ stetig und begrenzt und im Raume $L^2(E)$ wesentlich selbstadiungiert ist. Die Resolvente $R_\lambda f$ der selbstadiungierten Erweiterung A des Operators B ist folgender Gestalt (siehe [2])

$$R_\lambda f = (A-\lambda I)^{-1}f = \int_E H(x, s, \lambda)f(s)ds$$

wo λ dem Spektrum nicht angehört. Den Resolventenkern $H(x, y, \lambda)$ werden wir Greensche Funktion nennen. Unsere Aufgabe ist das Verhalten der Funktion $H(x, y, \lambda)$ für $|x|\to\infty$ zu untersuchen. Aus der Symmetrieeigenschaft der Greenschen Funktion (Eigenschaften von $H(x, y, \lambda)$ siehe [1], [2]) ist klar, daß das Verhalten für $|y|\to\infty$ mit dem Verhalten für $|x|\to\infty$ zusammenfällt.

Im Falle wenn $q(x)$ für $|x|\to\infty$ begrenzt ist, war bis jetzt nur die Tatsache bekannt, daß $H(x, y, \lambda)$ die Bedingung

$$\int_E |H(x, y, \lambda)|^2 dy < +\infty \tag{1}$$

für jedes $y \in E$ erfüllt. Für $q(x) = 0$ ist

$$H(x, y, \lambda^2) = \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \tag{2}$$

wo das Vorzeichen $+$ oder $-$, $I(\lambda) > 0$ oder $I(\lambda) < 0$ entspricht. In diesem Spezialfalle verschwindet $H(x, y, \lambda)$ ziemlich schnell für $|x|\to\infty$. Also entsteht die Frage, wie weit das Verhalten der Greenschen Funktion (2) im Unendlichen für den allgemeinen Fall der begrenzten $q(x)$ charakteristisch ist, und was man außer der Bedingung (1) über das Verhalten der Funktion $H(x, y, \lambda)$ sagen kann. In der Arbeit [1] (seite 154) wurde der folgende Satz bewiesen:

SATZ 1. *Wenn* $q(x) = O(1/|x|^a)$, *wo* $a > 0$, $|x| \to \infty$, *dann*

$$\sup_{x \in E} \left| H(x, y, \lambda^2) - \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right|_{|y| \to \infty} = O(|q(y)|) \text{ (1)}$$

bei fest gehaltenen λ, $I(\lambda^2) \neq 0$, $+$ *oder* $-$ *entspricht* $I(\lambda) > 0$ *oder* $I(\lambda) < 0$.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist zu zeigen, daß das Verhalten der Funktion (2) in bestimmter Weise charakteristisch für die Greensche Funktion im allgemeinen Falle begrenzter $q(x)$ ist. Wir werden nämlich zeigen, daß für hinreichend große $|I(\lambda)|$ die folgende Ungleichung (siehe Satz 4) gilt

$$\sup_{x \in K(P)} \left| H(x, y, \lambda^2) - \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right| \leqslant \left(\frac{N(\lambda)}{|P-y|} + M(\lambda) \right) e^{-K(\lambda)|P-y|},$$

wo $y \in E$, $P \in E$, $K(P) = \{x\colon |P-x| \leqslant 1\}$, M, N und K positive nur von λ abhängige Zahlen sind.

Entsprechende Abschätzungen gelten auch im ein-, zwei- und n-dimensionalen Falle. Man muß nur (2) durch entsprechende Funktionen ersetzen.

Wir wollen noch eine bekannte Eigenschaft (siehe [2], Seite 140, auch [1], Seite 144, 151) der Greenschen Funktion $H(x, y, \lambda)$ angeben. Es gilt nämlich die Gleichung

$$H(x, y, \lambda^2) = \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} - \int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s) H(s, y, \lambda^2)\, ds. \tag{3}$$

I. Die Menge der in E stetigen und begrenzten Funktionen bezeichnen wir mit Γ^0. Für $u \in \Gamma^0$ führen wir die Norm

$$\|u\|_{(l,P,r)} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-li} \sup_{x \in K_i} |u(x)| \tag{4}$$

ein, wo $l > 0$, $K_i = K_i(P, r) = \{x\colon r+1-i \leqslant |P-x| \leqslant r+i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und $K_0 = K_0(P, r) = \{x\colon |P-x| < r\}$.

Γ^0 mit der Norm (4) stellt keinen vollständigen Raum dar. Den hieraus durch Abschließen erhaltenen vollständigen Raum bezeichnen wir mit $\Gamma_{l,P,r}$.

Wir wollen jetzt einige einfache Eigenschaften des Operators

$$T_\lambda u(x) = \int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s) u(s)\, ds$$

im Raume $\Gamma_{l,P,r}$ angeben.

---

(1) Die Abschätzung in [1], Seite 154, Satz 4 ist falsch angegeben.

SATZ 2. *Wenn* $l < |J(\lambda)|$, $q(x)$ *begrenzt, dann ist* T_λ *für* $u \in T_{l,P,r}$ *erklärt,* $T_\lambda(\Gamma_{l,P,r}) \subset \Gamma_{l,P,r}$ *und es gilt die Ungleichung*

$$\|T_\lambda u\|_{(l,P,r)} \leqslant N(\lambda, l)\|u\|_{(l,P,r)}, \tag{5}$$

wo $N(\lambda, l)$ *eine nur von* λ *und* l *abhängige Konstante ist.*

Beweis. Wenn $u \in \Gamma_{l,P,r}$ dann ist die Funktion $u(x)$ im E stückweise stetig und

$$\sup_{x \in K_i} |u(x)| \leqslant \|u\|_{(l,P,r)} \cdot e^{li} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Bei fixierten $x \in K_{i_x}$ (²) und $j > i_x$ gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}\int\limits_{K_j} \frac{e^{-|I(\lambda)||x-s|}}{|x-s|} |q(s)| \cdot |u(s)| &\leqslant \sup_{x \in E} |q(x)| \cdot \|u\|_{(l,P,r)} e^{lj} \cdot \int\limits_{K_j} \frac{e^{-|I(\lambda)||x-s|}}{|x-s|} ds \\ &\leqslant \sup_{x \in E} |q(x)| \cdot \|u\|_{(l,P,r)} e^{lj} 2\pi j^3 e^{-|I(\lambda)|(j-i_x)} \\ &= 2\pi \sup_{x \in E} |q(x)| \cdot \|u\|_{(l,P,r)} e^{|J(\lambda)| i_x} j^3 e^{(-|J(\lambda)|+l)j}\end{aligned}$$

also wenn $u \in \Gamma_{l,P,r}$

$$\begin{aligned}\int\limits_{E - \sum_{i=0}^{i_x} K_i} \frac{e^{-|I(\lambda)||x-s|}}{|x-s|} |q(s)||u(s)| ds \\ \leqslant 2\pi \sup_{x \in E} |q(x)| \cdot \|u\|_{(l,P,r)} e^{|I(\lambda)| i_x} \sum_{j=i_x+1}^{\infty} j^3 e^{(-|I(\lambda)|+l)j}.\end{aligned} \tag{7}$$

Aus der Ungleichung (7) folgt, daß für $u \in \Gamma_{l,P,r}$, $0 < l < |I(\lambda)|$ das Integral

$$\int\limits_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{|x-s|} q(s) u(s) ds$$

existiert und wir haben

$$\sup_{x \in K_i} |T_\lambda u(x)| \leqslant \frac{\sup_{x \in E} |q(x)|}{4\pi} \sup_{x \in K_i} \int\limits_E \frac{e^{|I(\lambda)| \cdot |x-s|}}{|x-s|} |u(s)| ds.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\sup_{x \in K_i} \int\limits_E \frac{e^{-|I(\lambda)| \cdot |x-s|}}{|x-s|} |u(s)| ds &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{x \in K_j} |u(x)| \cdot \sup_{x \in K_j} \int\limits_E \frac{e^{-|I(\lambda)| \cdot |x-s|}}{|x-s|} ds \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{i-2} \sup_{K_j} |u| e^{-|I(\lambda)|(i-j-1)} + \sum_{j=i+2}^{\infty} \sup_{K_j} |u| e^{-|I(\lambda)|(j-i-1)} + \\ &\quad + (\sup_{K_{i-1}} |u| + \sup_{K_i} |u| + \sup_{K_{i+1}} |u|) \cdot \int\limits_E \frac{e^{-|I(\lambda)| \cdot |s|}}{|s|} ds.\end{aligned}$$

(²) Der Index i_x ist von der Menge $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ in dieser Weise gewählt daß $x \in K_{i_x}$.

Und schließlich bekommen wir die folgende Abschätzung

$$(8)\qquad \|T_\lambda u\|_{(l,P,r)} \leqslant \frac{1}{4\pi}\sup_E|q| \sum_{i=0}^{\infty} e^{-li}\Big[\sum_{j=0}^{i-2}\sup_{K_j}|u|e^{-|I(\lambda)|(i-j-1)}+$$

$$+\sum_{j=i+2}^{\infty}\sup_{K_j}|u|e^{-|I(\lambda)|(j-i-1)}+\frac{4\pi}{|I(\lambda)|}(\sup_{K_{i-1}}|u|+\sup_{K_i}|u|+\sup_{K_{i+1}}|u|)\Big].$$

Wir bewiesen jetzt den folgenden

Hilfssatz 1. *Wenn* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} e^{-li}a_i = |a| < +\infty$ $(a_i \geqslant 0)$, $0 < l < |I(\lambda)|$, *dann gilt die folgende Ungleichung*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-li}\Big(\sum_{j=0}^{i-2} e^{-|I(\lambda)|(i-j-1)}a_j + \sum_{j=i+2}^{\infty} e^{-|I(\lambda)|(j-i-1)}a_j + A(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})\Big)$$

$$\leqslant M(\lambda, l)\cdot|a|,$$

wo $a_{-1} = a_{-2} = 0$ *und*

$$M(\lambda, l) = A(1+e^{-l}+e^{l}) + \frac{e^{-|I(\lambda)|-2l}}{1-e^{-|I(\lambda)|-l}} + \frac{e^{-|I(\lambda)|+2l}}{1-e^{-|I(\lambda)|+l}}.$$

Beweis. Es gilt

$$(9)\qquad \sigma \leqslant A(1+e^{-l}+e^{l})|a| + \sum_{i=2}^{\infty} e^{-li}\sum_{j=0}^{i-2} e^{-|I|(i-j-1)}a_j +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty} e^{-li}\sum_{j=i+2}^{\infty} e^{-|I|(j-i-1)}a_j = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

Weiter ist

$$\sigma_2 = \sum_{i=2}^{\infty} e^{-li}\sum_{j=0}^{i-2} e^{-|I|(i-j-1)}a_{i-1-(i-j-1)} = \sum_{i=2}^{\infty} e^{-li}\sum_{j=1}^{i-1} e^{-|I|j}a_{i-j-1}$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{i-1} e^{-li}e^{-|I|j}a_{i-j-1} = \sum_{i=2}^{\infty}\sum_{i=2}^{i-1} e^{-l(i-j)}\cdot e^{(-|I|-l)j}a_{i-j-1}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j+1}^{\infty} e^{-l(i-j)}a_{i-j-1}e^{-(|I|+l)j} = e^{-l}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-(|I|+l)j}\sum_{i=j+1}^{\infty} e^{-l(i-j-1)}a_{i-j-1}$$

$$= e^{-l}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-(|I|+l)j}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} e^{-li}a_i = e^{-l}|a|\sum_{i=0}^{\infty} e^{-(|I(\lambda)|+l)j}.$$

Also

$$(10)\qquad \sigma_2 \leqslant |a|\frac{e^{-(|I|+2l)}}{1-e^{-(|I|+l)}}.$$

Der Ausdruck σ_3 kann ähnlich behandelt werden, nämlich

$$\sigma_3 = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-li} \sum_{j=i+2}^{\infty} e^{-|I|(j-i-1)} a_{i+1+(j-i-1)} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-li} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-|I(\lambda)|j} a_{i+1+j}$$

$$= \sum_{i=0,\, j=1}^{\infty} e^{-l(i+1+j)} a_{i+1+j} e^{(-|I|+l)j+l} = e^{l} \sum_{i,j=1}^{\infty} e^{-l(i+j)} a_{i+j} e^{(-|I|-l)j} .$$

Leicht kann man aber einsehen, daß aus der Ungleichung für die m, n-te Teilsumme $S_{m,n}$ der letzten Doppelreihe die Ungleichung

$$S_{m,n} < |a| \sum_{j=0}^{\infty} e^{(-|I|+l)j}$$

folgt. Hieraus ergiebt sich

$$\sigma_3 < |a| \frac{e^{-|I|+2l}}{1 - e^{-|I|+l}} . \tag{11}$$

Schließlich aus (9), (10) und (11) bekommen wir

$$\sigma < \left(A(1 + e^{-l} + e^{l}) + \frac{e^{-|I(\lambda)|-2l}}{1 - e^{-|I(\lambda)|-l}} + \frac{e^{-|I(\lambda)|+2l}}{1 - e^{-|I(\lambda)|+l}} \right) |a| .$$

Damit ist der Beweis des Hilfssatzes 1 beendet.

Die Ungleichung (8) und Hilfssatz 1 ergeben

$$\| T_\lambda u \|_{(l,P,r)} \leqslant N(\lambda, l) \cdot \| u \|_{(l,P,r)} ,$$

$$N(\lambda, l) = \frac{\sup\limits_{E} |q|}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{|I(\lambda)|} (1 + e^{-l} + e^{l}) + \frac{e^{-|I(\lambda)|-2l}}{1 - e^{-|I(\lambda)|-l}} + \frac{e^{-|I(\lambda)|+2l}}{1 - e^{-|I(\lambda)|+l}} \right) , \tag{12}$$

was der Satz 1 besagt. Wir formulieren noch den

SATZ 3. *Wenn $q(x)$ begrenzt ist, dann existiert für hinreichend große $|I(\lambda)|$, der im ganzen Raume $\Gamma_{l,P,r}$ erklärte und begrenzte Operator $(T_\lambda + I)^{-1}$. Dabei ist $\|(T_\lambda + I)^{-1}\|_{(l,P,r)}$ vom P und r unabhängig.*

Beweis. Aus (5) und (12) folgt, daß $\|T_\lambda\| \leqslant N(\lambda, l) < 1$, wenn nur $|I(\lambda)|$ hinreichend groß ist. Also können wir für hinreichend große $|I(\lambda)|$ zur Lösung der Gleichung $T_\lambda u + u = v$ im Raume $\Gamma_{l,P,r}$, das Banachsche Kontraktionsprinzip anwenden. Dabei erhalten wir für jedes $v \in \Gamma_{l,P,r}$ genau eine Lösung $u \in \Gamma_{l,P,r}$ und zwar

$$u = v + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (T_\lambda)^i v .$$

Also ist

$$\|u\|_{(l,P,r)} \leqslant \Big(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \|T_\lambda\|_{(l,P,r)}^{i}\Big) \|v\|_{(l,P,r)} = \frac{1}{1 - \|T_\lambda\|_{(l,P,r)}} \|v\|_{(l,P,r)}$$

und aus (5) und (12) erhalten wir

$$\|(T_\lambda + I)^{-1}\|_{(l,P,r)} \leqslant \frac{1}{1 - N(\lambda, l)} \tag{13}$$

woraus der Satz 2 folgt.

II. Der Resolventenkern $H(x, y, \lambda)$ erfült die Gleichung (3), welche wir in folgender Gestalt schreiben können

$$H(x, y, \lambda^2) = \frac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|} - T_\lambda\big(H(-, y, \lambda^2)\big)(x)\,. \tag{14}$$

Also erfüllt die Funktion $h(x, y, \lambda^2) = H(x, y, \lambda^2) - \dfrac{e^{\pm i\lambda|x-y|}}{4\pi|x-y|}$, welche für jedes festgehaltene y dem Raume $\Gamma_{l,P,r}$ angehört, die Bedingung

$$T_\lambda\big(h(-, y, \lambda^2)\big)(x) + h(x, y, \lambda^2) = \Psi(x, y, \lambda^2)\,, \tag{15}$$

wo

$$\Psi(x, y, \lambda^2) = -\int_E \frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|} q(s) \frac{e^{\pm i\lambda|s-y|}}{4\pi|s-y|} ds\,.$$

Auf Grund (4), (14) und (15) bekommen wir

$$\sup_{x \in K_0(P,r)} |h(x, y, \lambda^2)| \leqslant \|h(-, y, \lambda^2)\|_{(l,P,r)} \leqslant M(\lambda, l) \|\Psi(-, y, \lambda^2)\|_{(l,P,r)}\,, \tag{16}$$

wo $M(\lambda, l)$ eine bekannte, nur von λ, l abhängige Konstante ist.

Wir werden jetzt eine Abschätzung des Ausdruckes $\|\Psi(-, y, \lambda)\|_{(l,P,r)}$ angeben

$$\|\Psi(-, y, \lambda^2)\|_{(l,P,r)} = \sum_{i=0}^{n(y)} e^{-li} \sup_{x \in K_i} |\Psi(x, y, \lambda^2)| + \tag{17}$$

$$+ \sum_{i=n(y)+1}^{\infty} e^{-li} \sup_{x \in K_i} |\Psi(x, y, \lambda^2)| = \sum_{i=0}^{n(y)} e^{-li} \alpha_i + \sum_{i=n(y)+1}^{\infty} e^{-li} \beta_i\,,$$

wo $n(y)$ so gewählt ist, daß

$$K_{n(y)} \subset \left\{x\colon\ |x-P| \leqslant \frac{|P-y|}{2}\right\}$$

stattfindet. Wir haben

$$a_i \leqslant \frac{\sup\limits_E |q(x)|}{(4\pi)^2} \sup_{x \in K_i} \int_E \frac{e^{-|I(\lambda)|(|x-s|+|s-y|)}}{|x-s|\,|s-y|}\, ds\,,$$

$$c_i = \sup_{x \in K_i} \int_E \frac{e^{-|I(\lambda)|(|x-s|+|s-y|)}}{|x-s|\,|s-y|}\, ds = \int_E \frac{e^{-|I(\lambda)|(|x(i)-s|+|s-y|)}}{|x(i)-s|\cdot|s-y|}\, ds\,,$$

wo $x_\mu(i) = y_\mu - \frac{y_\mu - p_\mu}{|y-P|}(r+i)$ $(\mu = 1, 2, 3)$, $x(i) = \big(x_1(i), x_1(i), x_3(i)\big)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ und $P = (p_1, p_2, p_3)$ (siehe Fig. 1).

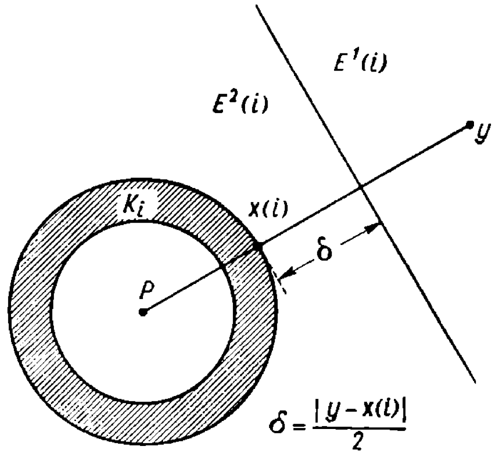

Fig. 1

Bezeichnen wir jetzt durch $E^1(i)$, $E^2(i)$ die Halbräume auf welche die Ebene

$$\sum_{\mu=1}^{3} \left(x_\mu - \frac{y_\mu - x_\mu(i)}{2}\right)\big(y_\mu - x_\mu(i)\big) = 0\,,$$

wo $y = (y_1, y_2, y_3)$ festgehalten, den Raum E teilt (Fig. 1). Dann haben wir

$$c_i = \int_{E^1(i)} \frac{e^{-|I(\lambda)|(|x(i)-s|+|s-y|)}}{|x(i)-s|\cdot|s-y|}\, ds + \int_{E^2(i)} \frac{e^{-|I(\lambda)|(|x(i)-s|+|s-y|)}}{|x(i)-s|\cdot|s-y|}\, ds$$

$$< 4\,\frac{e^{-\frac{|I(\lambda)|\,|x(i)-y|}{2}}}{|x(i)-y|} \cdot \int_E \frac{e^{-|I(\lambda)|\,|s|}}{|s|}\, ds \leqslant \frac{4^3\pi}{|I(\lambda)|} \cdot \frac{e^{-\frac{|I(\lambda)|}{8}|P-y|}}{|P-y|}\,.$$

Also ist

$$\sum_{i=0}^{n(y)} e^{-li} a_i \leqslant \frac{4 \cdot \sup\limits_E |q|}{\pi |I(\lambda)|(1-e^{-l})} \cdot \frac{e^{-\frac{|I(\lambda)|}{8}|P-y|}}{|P-y|}\,. \tag{18}$$

Weiter haben wir

$$\beta_i < \frac{\sup\limits_{x\in E}|q(x)|}{(4\pi)^2}\cdot\sup_{x\in E}\int\limits_{E}\frac{e^{-|I(\lambda)|(|x-s|+|s-y|)}}{|x-s||s-y|}ds$$

$$= \frac{\sup\limits_{x\in E}|q|}{(4\pi)^2}\int\limits_{E}\frac{e^{-2|I(\lambda)||s|}}{|s|^2}ds = \frac{\sup\limits_{x\in E}|q(x)|}{4\pi|I(\lambda)|^2}.$$

Also

$$\sum_{i=n(y)+1}^{\infty} e^{-li}\beta_i = \sum_{i=[|P-y|/2-r]+1}^{\infty} e^{-li}\beta_i < \frac{\sup\limits_{E}|q(x)|}{4\pi|I(\lambda)|^2}\,\frac{e^{-l(|P-y|/2-r)}}{1-e^{-l}}. \tag{19}$$

Und schließlich auf Grund (16), (17), (18) und (19) erhalten wir den

Satz 4. *Wenn $|I(\lambda)|$ so groß ist, daß*

$$\frac{M(\lambda, l)-1}{M(\lambda, l)}$$
$$= \frac{\sup\limits_{E}|q(x)|}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{|I(\lambda)|}(1+e^{-l}+e^{l})+\frac{e^{-|I(\lambda)|-2l}}{1-e^{-|I(\lambda)|+l}}+\frac{e^{-|I(\lambda)|+2l}}{1-e^{-|I(\lambda)|+l}}\right)<1,$$

wo $0<l<|I(\lambda)|$, dann gilt die Abschätzung

$$\sup_{x\in K(P,r)}\left|H(x,y,\lambda^2)-\frac{e^{\pm i\lambda|x-s|}}{4\pi|x-s|}\right|$$
$$\leqslant \frac{\sup\limits_{E}|q|}{\pi|I(\lambda)|(1-e^{-l})}M(\lambda, l)\left(\frac{4}{|P-y|}e^{-|I(\lambda)||P-y|/8}+\frac{e^{lr}}{4|I(\lambda)|}e^{-l|P-y|/2}\right),$$

wo y, P und r beliebig sind.

Literaturverzeichnis

[1] M. Burnat, *Über partielle Differentialgleichungen von elliptischen Typus mit singulären Koeffizienten*, Studia Math. 18 (1959), S. 137-159.

[2] А.Я. Повзнер, *О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$,* Матем. сборник 32 (74) (1953), S. 109-156.

Reçu par la Rédaction le 16. 2. 1961