ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXV (1977)

Une remarque sur l'allure des solutions d'une équations différentielle

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Dans les notes [1], [2], [3] A. M. Tezin a étudié l'allure des solutions de l'équation

$$y' = v(x)P\left(x, \frac{y}{u(x)}\right)$$

(où $u(x)$ est une fonction positive et continue pour $x > 0$, $u(0) = 0$) dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$. Dans la présente note nous envisageons le problème analogue pour l'équation de la forme plus générale

$$(1) \qquad y'(x) = v(x)F\big(x, y, u(x)\big)$$

où les fonctions $v(x)$, $F(x, y, u)$, $u(x)$ satisfont aux hypothèses suivantes.

HYPOTHÈSES H_1. 1° *$F(x, y, u)$ est une fonction continue pour $x > 0$, $u > 0$,*

2° *$\varphi(u, k)$ est une fonction de classe C^1 par rapport à (u, k),*

3° *$u(x)$ est une fonction de classe C^1 pour $x > 0$,*

$$(2) \qquad \lim_{x\to 0} u(x) = 0, \quad u(x) > 0 \quad \textit{pour } x > 0,$$

4° *la limite*

$$(3) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{u'(x)}{v(x)} = A \neq 0$$

existe,

5° *la limite*

$$(4) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{F\big(x, \varphi\big(u(x), k\big), u(x)\big)}{\varphi_u\big(u(x), k\big)} = \tilde{F}(k)$$

existe.

Nous étudions le problème suivant: quelles hypothèses faut-il faire sur $u(x)$, $v(y)$, $\varphi(u, k)$ et $\tilde{F}(k)$ pour qu'il existe une solution de l'équation (1) telle que

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), k)} = 1 ? \tag{5}$$

1. HYPOTHÈSES H_2. *Supposons l'unicité des solutions de l'équation* (1) *avec la condition* $y(\xi) = \eta$ *pour chaque* $\xi > 0$, η

$$\varphi(0, k) \equiv 0, \tag{1.1}$$

$$\varphi(u, k) \neq 0 \quad \textit{pour } u > 0, \tag{1.2}$$

$$\varphi_k(u, k_0+\eta) > 0 \quad \textit{pour } u > 0,\ |\eta| \leqslant \varepsilon_0, \tag{1.3}$$

$$\varphi_u(u, k_0+\eta) > 0 \quad \textit{pour } u > 0,\ |\eta| \leqslant \varepsilon_0\ (\varepsilon_0 > 0), \tag{1.4}$$

(1.5) *où* k_0 *est la solution de l'équation* $\tilde{F}(k) - A = 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ k\to s}} \frac{\varphi(u(x), k)}{\varphi(u(x), s)} = 1, \tag{1.6}$$

$$u'(x) \neq 0 \quad \textit{pour } x > 0, \tag{1.7}$$

$$v(x) > 0 \quad \textit{pour } x > 0. \tag{1.8}$$

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* H_1, H_2 *étant admises, il résulte de la relation*

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), k)} = 1 \tag{1.9}$$

que le nombre k *satisfait à l'équation*

$$\tilde{F}(k) - A = 0. \tag{1.10}$$

Démonstration.

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), k)} = \lim_{x\to 0} \frac{y'(x)}{\varphi_u(u(x), k)u'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{u'(x)} \cdot \frac{F(x, \varphi(u(x), k), u(x))}{\varphi_u(u(x), k)} = \frac{\tilde{F}(k)}{A},$$

et par suite

$$\tilde{F}(k) = A.$$

Le théorème est ainsi démontré.

2. HYPOTHÈSES H_3. *Supposons que*

1° k_0 *est une solution isolée de l'équation* (1.10),

2° *il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*

$$\tilde{F}(k_0+\varepsilon)-A<0 \quad pour \ 0<\varepsilon<\varepsilon_0, \tag{2.1}$$

$$\tilde{F}(k_0-\varepsilon)-A>0 \quad pour \ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0. \tag{2.2}$$

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* H_1, H_2 *et* H_3 *étant admises, il existe au moins une solution* $y(x)$ *de l'équation* (1) *telle que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{\varphi\big(u(x),k_0\big)}=1. \tag{2.3}$$

Démonstration. Envisageons l'ensemble

$$(\omega_{\varepsilon_0})=\big\{(x,y)|\, x>0,\ \varphi\big(u(x),k_0-\varepsilon_0\big)\leqslant y\leqslant\varphi\big(u(x),k_0+\varepsilon_0\big)\big\}$$

où $\varepsilon_0>0$ est tel que dans l'intervalle $k_0-\varepsilon_0\leqslant k\leqslant k_0+\varepsilon_0$ il n'existe pas de solutions de l'équation (1.10) autres que la solution $k=k_0$. Désignons par E_1 et E_2 les ensembles suivants:

$$E_1=\big\{(x,y)|\, x>0,\ y=\varphi\big(u(x),k_0-\varepsilon_0\big)\big\},$$
$$E_2=\big\{(x,y)|\, x>0,\ y=\varphi\big(u(x),k_0+\varepsilon_0\big)\big\}.$$

Pour chaque point (ξ,η) de l'intégrale $y(x)$ (quelconque) tel que $(\xi,\eta)\in E_1$ on a

$$\begin{aligned} y'(\xi)-\varphi_u\big(u(\xi),k_0-\varepsilon_0\big)u'(\xi) &= v(\xi)F\Big(\xi,\varphi\big(u(\xi),k_0-\varepsilon_0\big),u(\xi)\Big)- \\ &\qquad -\varphi_u\big(u(\xi),k_0-\varepsilon_0\big)u'(\xi) \\ &= v(\xi)\cdot\varphi_u\big(u(\xi),k_0-\varepsilon_0\big)\left\{\frac{F\Big(\xi,\varphi\big(u(\xi),k_0-\varepsilon\big),u(\xi)\Big)}{\varphi_u\big(u(\xi),k_0-\varepsilon_0\big)}-\frac{u'(\xi)}{v(\xi)}\right\}. \end{aligned}$$

De l'hypothèse (3), (4) et (2.2) il résulte qu'il existe un $\delta_0>0$ tel que

$$\big\{y(x)-\varphi\big(u(x),k_0-\varepsilon_0\big)\big\}'_{x=\xi}>0 \tag{2.4}$$

pour chaque $\xi\leqslant\delta_0$ tel que $y(\xi)=\varphi\big(u(\xi),k_0-\varepsilon_0\big)$.

Sur E_2 on obtient d'une façon analogue

$$\big[y(x)-\varphi\big(u(x),k_0+\varepsilon_0\big)\big]'_{x=\bar{\xi}}<0 \tag{2.5}$$

pour chaque $\bar{\xi}\leqslant\delta_0$ tel que $y(\bar{\xi})=\varphi\big(u(\bar{\xi}),k_0+\varepsilon_0\big)$.

De l'inégalité (2.5) il résulte que pour chaque $\xi\in(0,\delta)$ la solution $y(x;\ \xi,\eta)$ telle que $y(\xi;\ \xi,\eta)=\eta$, $(\xi,\eta)\in E_1$, satisfait à $y(x;\ \xi,\eta)$ $<\varphi\big(u(x),k_0-\varepsilon_0\big)$ pour $0<x<\xi$. C'est-à-dire que $y(x;\ \xi,\eta)$ sort de ω_{ε_0} pour x décroissant. D'une façon analogue on obtient de (2.5) pour chaque $(\bar{\xi},\bar{\eta})\in E_2$

$$y(x;\ \bar{\xi},\bar{\eta})>\varphi\big(u(x),k_0+\varepsilon_0\big) \quad \text{pour } 0<x<\bar{\xi}$$

pour chaque $0 < \bar{\xi} \leqslant \delta$; par suite $y(x; \bar{\xi}, \bar{\eta})$ sort de ω_{ε_0} pour x décroissant (pour $x = \bar{\xi}$). Les points de l'ensemble $E_1 + E_2$ sont des points de sortie stricte (cf. [3]) de ω_{ε_0} pour x décroissant et par suite, en vertu du théorème de T. Ważewski [4], il existe sur l'ensemble

$$Z(\varepsilon_0) = \{(x, y) \mid x = \delta(\varepsilon), \varphi(u(\delta(\varepsilon_0)), k_0 - \varepsilon_0) \leqslant y \leqslant \varphi(u(\delta(\varepsilon_0)), k_0 + \varepsilon_0)\}$$

au moins un point $p_0 = (\delta(\varepsilon_0), \eta_0)$ tel que l'intégrale $y(x; \delta(\varepsilon_0), \eta_0)$ parcourt dans l'ensemble ω_{ε_0} pour $0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_0)$. D'une façon analogue on obtient pour chaque suite $\{\varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu \to 0$, $\varepsilon_\nu < \varepsilon_0$ une suite $p_\nu = (\delta(\varepsilon_\nu), \eta_\nu)$ telle que pour chaque ν l'intégrale $y(x; \delta(\varepsilon_\nu), \eta_\nu)$ parcourt dans l'ensemble

$$\omega(\varepsilon_\nu) = \{(x, y) \mid x > 0, \varphi(u(x), k_0 - \varepsilon_\nu) \leqslant y \leqslant \varphi(u(x), k_0 + \varepsilon_\nu)\}$$

pour $0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_\nu) \leqslant \delta(\varepsilon_0)$.

De l'inégalité (2.4) et (2.5) il vient

$$\varphi(u(x), k_0 - \varepsilon_0) < y(x; \delta(\varepsilon_\nu), \eta_\nu) < \varphi(u(x), k_0 + \varepsilon_0) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_0).$$

Posons $\bar{\eta}_\nu = y(\delta(\varepsilon_0), \delta(\varepsilon_\nu), \eta_\nu)$. De la suite $\{\bar{\eta}_\nu\}$ on peut extraire une suite $\{\bar{\eta}_{a_\nu}\}$ convergente vers η^*, $\bar{\eta}_{a_\nu} \to \eta^*$. Envisageons la suite de solutions $y(x; \delta(\varepsilon_0), \bar{\eta}_{a_\nu}) = y_\nu(x)$,

$$\lim y_\nu(x) = y(x; \delta(\varepsilon_0), \eta^*) = y^*(x) \quad \text{pour chaque } x \in [0, \delta(\varepsilon_0)],$$

$$\varphi(u(x), k_0 - \varepsilon_n) \leqslant y_\nu(x) \leqslant \varphi(u(x), k_0 + \varepsilon_n) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_n), \quad a_\nu \geqslant n,$$

d'où

$$\frac{\varphi(u(x), k_0 - \varepsilon_n)}{\varphi(u(x), k_0)} \leqslant \frac{y^*(x)}{\varphi(u(x), k_0)} \leqslant \frac{\varphi(u(x), k_0 + \varepsilon_n)}{\varphi(u(x), k_0)} \quad \text{pour } 0 < x < \delta(\varepsilon_n).$$

En vertu de (1.6) on a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{y^*(x)}{\varphi(u(x), k_0)} = 1.$$

Le théorème 2 est ainsi démontré.

3. HYPOTHÈSES H_4. *Supposons que:*

1° k_0 *est une solution isolée de l'équation* (1.10),

2° *il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*

(3.1) $$F(k_0 + \varepsilon) - A > 0 \quad \textit{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

(3.2) $$F(k_0 - \varepsilon) - A < 0 \quad \textit{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

THÉORÈME 3. *Les hypothèses* H_1, H_2, H_4 *étant admises il existe une constante* $\delta_0 > 0$ *telle que* $y(x;\ \delta_0, \eta_0)$ *parcourt dans l'ensemble* ω_{ε_0} *pour chaque* $\eta_0 \in [\varphi(u(\delta_0), k_0-\varepsilon_0),\ \varphi(u(\delta_0), k_0+\varepsilon_0)]$ *c'est-à-dire*

$$\varphi(u(x), k_0-\varepsilon_0) < y(x;\ \delta_0, \eta_0) < \varphi(u(x), k_0+\varepsilon_0) \quad \textit{pour } 0 < x \leqslant \delta_0$$

et par suite $\lim\limits_{x\to 0} y(x;\ \delta_0, \eta_0) = 0$.

Démonstration. On vérifie facilement que dans le cas envisagé

$$\frac{d}{dx}[y(x;\ \delta_0, \eta_0) - \varphi(u(x), k_0-\varepsilon_0)] < 0]$$

pour chaque $x \in (0, \delta_0]$ tel que $(x, y(x;\ \delta_0, \eta_0)) \in E_1$. C'est-à-dire que chaque point $(\xi, \eta) \in E_1$ tel que $0 < \xi \leqslant \delta_0$ est un point d'entrée dans ω_{ε_0} pour x décroissant. Sur E_2 on a

$$\frac{d}{dx}[y(x;\ \delta_0, \eta_0) - \varphi(u(x), k_0+\varepsilon_0)] > 0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0$$

tels que $(x, y(x;\ \delta_0, \eta_0)) \in E_2$ et, par suite, les points de E_2 sont aussi des points d'entrée stricte dans ω_{ε_0} pour x décroissant. On a donc

$$\varphi(u(x), k_0-\varepsilon_0) < y(x;\ \delta_0, \eta_0) \leqslant \varphi(u(x), k_0+\varepsilon_0)$$

pour $0 < x \leqslant \delta_0$, pour chaque $\eta_0 \in [\varphi(u(\delta_0), k_0-\varepsilon_0), \varphi(u(\delta_0), k_0+\varepsilon_0)]$.

4. Remarque 1. On vérifie facilement que dans le cas où l'hypothèse (1.4) est remplacée par l'inégalité

$$\varphi_u(u, k_0) < 0. \tag{4.1}$$

1° Dans le cas où H_3 est satisfaite il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que l'intégrale $y(x;\ \delta_0, \eta_0)$ parcourt dans l'ensemble ω_{ε_0} pour chaque $\eta_0 \in [\varphi(u(\delta_0), k_0-\varepsilon_0),\ \varphi(u(\delta_0), k_0+\varepsilon_0)]$,

2° dans le cas où H_2 est satisfaite il existe au moins une solution $y(x)$ de l'équation (1) telle que

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), k_0)} = 1. \tag{4.2}$$

Remarque 2. Dans le cas où $\delta(\varepsilon) > 0$ peut être choisi en sorte que la fonction $\delta(\varepsilon)$ soit croissante, et $\varphi_k(u, k_0+\eta) > 0$ pour $|\eta| \leqslant \varepsilon_0$, chaque solution $y(x)$ telle que

$$\varphi(u(x), k_0-\varepsilon_0) \leqslant y \leqslant \varphi(u(x), k_0+\varepsilon_0) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_0) \tag{4.3}$$

satisfait à (4.2).

Démonstration. Envisageons le cas où H_1, H_2, H_3 sont satisfaites. Supposons que $y(x)$ est une solution de l'équation (1) satisfaisant à (4.3).

Pour démontrer (4.2) il suffit de démontrer que pour chaque ε, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, il existe un $\hat{\delta}(\varepsilon)$ tel que

$$\varphi\big(u(x), k_0-\varepsilon\big) \leqslant y(x) \leqslant \varphi\big(u(x), k_0+\varepsilon\big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \hat{\delta}(x). \tag{4.4}$$

Supposons qu'il existe un $\bar{\varepsilon} > 0$, $0 < \bar{\varepsilon} < \varepsilon_0$ pour le quel il n'existe pas de $\delta > 0$ tel que

$$\varphi\big(u(x), k_0-\bar{\varepsilon}\big) \leqslant y(x) \leqslant \varphi\big(u(x), k_0+\bar{\varepsilon}\big)$$

dans tout l'intervalle $(0, \delta)$. C'est-à-dire que pour chaque δ, $\delta > 0$ il existe un $\bar{x} \in (0, \delta)$ tel que

$$y(\bar{x}) > \varphi\big(u(\bar{x}), k_0+\bar{\varepsilon}\big) \tag{a}$$

ou

$$y(\bar{x}) < \varphi\big(u(\bar{x}), k_0-\bar{\varepsilon}\big). \tag{b}$$

Envisageons, par exemple, le cas (a). En vertu de (4.3) on a donc

$$\varphi\big(u(x), k_0+\varepsilon_0\big) > y(\bar{x}) \geqslant \varphi\big(u(\bar{x}), k_0+\bar{\varepsilon}\big).$$

Sur l'ensemble $E_2(\bar{\varepsilon}) = \big\{(x, y) |\ 0 < x \leqslant \delta(\bar{\varepsilon}),\ \ y = \varphi\big(u(x), k_0+\bar{\varepsilon}\big)\big\}$ on

$$y'(x) - \varphi_u\big(u(x), k_0+\bar{\varepsilon}\big)\, u'(x) < 0 \quad \text{pour } 0 < x < \delta(\bar{\varepsilon})$$

et par suite

$$\varphi\big(u(x), k_0+\varepsilon_0\big) > y(x) > \varphi\big(u(x), k_0+\bar{\varepsilon}\big) \quad \text{pour } 0 < x < \bar{x}. \tag{4.5}$$

Envisageons la fonction $k(x)$ telle que

$$y(x) = \varphi\big(u(x), k(x)\big).$$

L'existence d'une telle $k(x)$ résulte de la continuité de $\varphi(u, k)$ et de l'inéa galité (4.5) et l'unicité découle de (1.4). On a

$$k_0 + \bar{\varepsilon} < k(x) < k_0 + \varepsilon_0,$$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \varphi_k^{-1}\big(u(x), k(x)\big)\Big\{v(x)F\Big(x, \varphi\big(u(x), k(x)\big), u(x)\Big) - \varphi_u\big(u(x), k(x)\big)u'(x)\Big\} \\ &= \varphi_k^{-1}\big(u(x), k(x)\big)\cdot\varphi_u\big(u(x), k(x)\big)\cdot v(x)\left\{\frac{F\Big(x, \varphi\big(u(x), k(x)\big), u(x)\Big)}{\varphi_u\big(u(x), k(x)\big)} - \frac{u'(x)}{v(x)}\right\}, \end{aligned}$$

$\delta(\varepsilon)$ étant croissante, on a en vertu de (4.5)

$$k'(x) < 0 \quad \begin{array}{l} \text{pour } 0 < x < \bar{x} \leqslant \delta(\bar{\varepsilon}) < \delta(\varepsilon) < \delta(\varepsilon_0) \\ \text{pour } \bar{\varepsilon} < \varepsilon < \varepsilon_0, \end{array} \tag{4.6}$$

où $\varepsilon = k(x) - k_0$.

Comme $k(x)$ est bornée, (4.6) entraîne l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} k(x)$. Posons $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = \hat{k}$. On a donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), \hat{k})} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), k(x))} \cdot \frac{\varphi(u(x), k(x))}{\varphi(u(x), \hat{k})} = 1$$

et par suite, en vertu du théorème 1, $\hat{k}$ est une solution de l'équation (1.10). Mais, dans l'intervalle $k_0 - \varepsilon_0 \leqslant k \leqslant k_0 + \varepsilon_0$, k_0 est la solution unique de l'équation (1.10). D'une façon analogue on démontre (4.2) dans le cas où $y(\bar{x}) \leqslant \varphi(u(\bar{x}), k_0 - \bar{\varepsilon})$ et dans le cas envisagé dans le théorème 3 ou dans la remarque 1.

Remarque 3. Pour obtenir le cas envisagé dans la remarque 2 il suffit de supposer que la fonction $A(x, k)$ définie par la relation suivante:

$$(4.7) \qquad A(x, k) = \begin{cases} \dfrac{F(x, \varphi(u(x), k))}{\varphi_u(u(x), k)} - \dfrac{u'(x)}{v(x)} & \text{pour } x > 0, \\ \tilde{F}(k) - A & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est continue par rapport à (k, x) dans l'ensemble

$$(\Pi) = \{(x, k) |\ 0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_0),\ k_0 - \varepsilon_0 \leqslant k \leqslant k_0 + \varepsilon_0\}.$$

Démonstration. Choisissons $\bar{k} \in (k_0, k_0 + \varepsilon_0)$

$$(4.8) \qquad \tilde{F}(k) - A < 0 \quad \text{pour } \bar{k} < k < k_0 + \varepsilon_0.$$

De la continuité de $A(x, k)$ il découle que $\tilde{F}(k) - A$ est continue et par suite de (4.8) il résulte qu'il existe un $a < 0$ tel que

$$\tilde{F}(k) - A \leqslant a < 0 \quad \text{pour } \bar{k} \leqslant k \leqslant k_0 + \varepsilon_0.$$

Une fonction continue dans l'ensemble Π y est uniformément continue et par suite il existe un $\delta^* > 0$ tel que

$$|A(x, k) - \tilde{F}(k) + A| \leqslant |a/2| \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \delta^*,\ \bar{k} \leqslant k \leqslant k_0 + \varepsilon_0$$

d'où

$$A(x, k) \leqslant a/2 < 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \delta^*,\ \bar{k} \leqslant k \leqslant k_0 + \varepsilon_0.$$

On peut prendre la suite $\bar{k}_\nu \to k_0$, $\bar{k}_\nu < \bar{k}_{\nu-1}$ et définir $\delta_\nu^* > 0$ tel que $0 < \delta_\nu^* \leqslant \delta_{\nu-1}^*$ et tel que

$$A(x, k) < 0 \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \delta_\nu^*,\ \bar{k}_\nu \leqslant k \leqslant k_0 + \varepsilon_0$$

la fonction

$$\delta(\varepsilon) = \delta_\nu^* \quad \text{pour } \bar{k}_\nu - k \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{k}_{\nu-1} - k_0$$

ainsi définie est croissante.

Remarque 4. Dans le cas envisagé dans le théorème 3, 4 et dans la remarque 1 il peut arriver qu'il existe une solution $y(x)$ telle que il n'existe pas de $\lim_{x\to 0} y(x)/\varphi(u(x), k)$ finie, mais que la solution envisagée ne soit pas continue dans ω_{ε_0}. pour $0 < x \leqslant \delta(\varepsilon_0)$. Nous allons donner un tel exemple.

EXEMPLE 1. Envisageons l'équation suivante:

$$(*) \qquad y' = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2}.$$

On a $F(x, y, u) = y/2u + \frac{1}{2}$.

$$\varphi(u, k) = ku, \quad u = x, \quad v = 1, \quad A = 1, \quad \tilde{F}(k) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2},$$

$$\tilde{F}(k) - A = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k_0 = 1.$$

$\tilde{F}(k) - A$ est decroissant. Nous sommes dans le cas du théorème 2. On vérifie facilement que $y = x$ est une solution de $(*)$ satisfaisant à (2.3). Les autres solutions sont données par $y = ax^{1/2} + x$ et $\lim_{x\to 0} y/kx = \lim_{x\to 0} ax^{-1/2} + \frac{1}{k} = \infty$.

5. Envisageons le cas où

$$[\tilde{F}(k_0+\varepsilon) - A]\,[\tilde{F}(k_0-\varepsilon) - A] > 0 \qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Par exemple $\tilde{F}(k_0-\varepsilon) - A < 0$ et $\tilde{F}(k_0+\varepsilon) - A < 0$. Désignons par $\delta(\varepsilon)$ un nombre positif tel que

$$(5.1) \qquad \frac{F\big(x, \varphi(u(x), k_0+\varepsilon), u(x)\big)}{\varphi_u\big(u(x), k_0+\varepsilon\big)} - \frac{u'(x)}{v(x)} < 0,$$

$$(5.2) \qquad \frac{F\big(x, \varphi(u(x), k_0-\varepsilon), u(x)\big)}{\varphi_u\big(u(x), k_0-\varepsilon\big)} - \frac{u'(x)}{v(x)} < 0$$

$$\text{pour } 0 < x \leqslant \delta(\varepsilon).$$

On peut facilement vérifier que le cas où $\delta(\varepsilon)$ est croissante par rapport à ε $(\varepsilon > 0)$ la limite $\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi(u(x), k_0)} = 1$ existe pour chaque solution $y(x)$ telle que

$$(5.3) \qquad \varphi\big(u(x), k_0-\varepsilon_0\big) \leqslant y(x) \leqslant \varphi\big(u(x), k_0+\varepsilon_0\big)$$

mais il peut arriver qu'il n'existe pas de $y(x)$ satisfaisant à (5.3) dans tout l'intervalle $\big(0, \delta(\varepsilon_0)\big)$.

Il suffit de supposer que

$$(5.4)\qquad \frac{F\big(x, \varphi(u(x), k), u(x)\big)}{\varphi_u\big(u(x), k_0\big)} - \frac{u'(x)}{v(x)} < 0$$

$$\text{pour } 0 < x < \delta_0, \text{ où } 0 < \delta_0 \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

et que

$$(5.5)\qquad v(x)\cdot\varphi_k^{-1}\big(u(x), k\big)\cdot\varphi_u\big(u(x), k\big)\left[\frac{F\big(x, \varphi(u(x), k), u(x)\big)}{\varphi_u\big(u(x), k\big)} - \frac{u'(x)}{v(x)}\right]$$

$$\leqslant h(x, k) \quad \text{pour } k_0 - \varepsilon_0 \leqslant k < k_0$$

où $h(x, k)$ est telle que chaque solution $\psi(x)$ de l'équation

$$(5.6)\qquad \psi' = h(x, \psi)$$

satisfait à l'inégalité

$$(5.7)\qquad \psi(x) > k_0 \quad \text{pour } x \text{ suffisamment petit.}$$

Dans le cas envisagé les inégalités (5.1) et (5.2) sont satisfaites dans l'intervalle $0 < x \leqslant \delta_0$ pour chaque ε, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Supposons que $y(x)$ est une solution de (1) satisfaisant à (5.3). De l'inégalité (5.1), (5.2) et (5.4), il vient

$$k'(x) < 0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0$$

(dans le cas où $\varphi_k > 0$ et $\varphi_u > 0$).

En vertu de (5.3) il vient

$$k_0 - \varepsilon_0 \leqslant k(x) \leqslant k_0 + \varepsilon_0$$

et par suite il existe $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = \hat{k}$, $\hat{k} \in (k_0 - \varepsilon_0, k_0 + \varepsilon_0)$. En vertu du théorème 1, $\hat{k}$ est une solution de (1.10) et par suite $\hat{k} = k_0$. Nous allons démontrer que

$$(5.8)\qquad y(x) \geqslant \varphi\big(u(x), k_0 + \bar{\varepsilon}\big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \hat{x}.$$

Supposons que (5.8) n'ait pas lieu. On a donc, en vertu de (5.4),

$$\varphi\big(u(x), k_0 - \varepsilon_0\big) \leqslant y(x) \leqslant \varphi\big(u(x), k_0\big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0.$$

En vertu de (5.5) il vient

$$k'(x) \leqslant h\big(x, k(x)\big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0$$

et par suite

$$k(x) \geqslant \psi(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0$$

où $\psi(x)$ est une solution de (5.6) telle que

$$\psi(\delta_0) = k(\delta_0).$$

Mais en vertu de (5.7)

$$\hat{k}_0 \geqslant k(x) > k_0 \quad \text{pour } x \text{ suffisamment petit.}$$

Ainsi nous avons démontré que $y(x) > \varphi\big(u(x), k_0+\varepsilon_0\big)$ pour x suffisamment petit. La démonstration est ainsi terminée.

Nous avons démontré le théorème suivant:

HYPOTHÈSES H_5. *$F\big(x, \varphi(u(x), k), u(x)\big)$, $\varphi_u(u(x), k)$ et $u'(x)/v(x)$ satisfont à* (5.1), (5.2), (5.4) *et* (5.5).

THÉORÈME 4. *Dans le cas où sont satisfaites les hypothèses* H_1, H_2 *et* H_5 *il n'existe pas de solution $y(x)$ telle que soit satisfait* (5.3), *et par suite il n'existe pas de solutions $y(x)$ telle que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{\varphi\big(u(x), k_0\big)} = 1.$$

Remarque 5. Dans le cas où ne sont pas satisfaites les inégalités (5.4) et (5.5) il peut arriver qu'il existe une solution $y(x)$ satisfaisant à (2.3). Il suffit d'envisager l'exemple suivant:

$$F(x, y, u) = -\left(\frac{y}{u}\right)^3 + \left(\frac{y}{u}\right)^2,$$

$$\varphi(u, k) = ku, \quad u(x) = \tfrac{1}{4}x, \quad v(x) = 1.$$

On a

$$\frac{F\big(x, \varphi(u(x), k), u(x)\big)}{\varphi_u\big(u(x), k\big)} - \frac{u'(x)}{v(x)} = -(k-\tfrac{1}{2})^2 < 0 \qquad \text{pour } k \neq \tfrac{1}{2},\ k_0 = \tfrac{1}{2},$$

les inégalités (5.1) et (5.2) sont donc satisfaites, mais on vérifie facilement que $y(x) = k_0 u(x) = \frac{1}{4}k_0 x$ est une solution de l'équation

$$y' = -\left(\frac{4y}{x}\right)^3 + \left(\frac{4y}{x}\right)^2,$$

et par suite $y = \frac{1}{8}x$ est une solution de l'équation (*) satisfaisant à (2.3).

Travaux cités

[1] A. M. Tezin, *On application of the supporting derivative in the qualitative investigation of first order differential equations*, Barnaul. Gos. Ped. Inst. Uczen. Zap. 9 (1968), p. 48–56.

[2] — *Critical branches and their application in the qualitative investigation of differential equations*, ibidem 9 (1968), p. 57–62.

[3] — *A qualitative investigation of a generalized homogeneous differential equation by the method of contacts*, ibidem 9 (1968), p. 67–72. (Math. Rev. Vol 46 Nr. 2, 1973).

[4] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 279–313.

Reçu par la Rédaction le 2. 12. 1974