ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1990)

Sur des couples des fonctions univalentes et bornées

par J. ŚLADKOWSKA (Gliwice)

Résumé. Soit $\mathscr{P}_{a,b}$, $a, b \in U = \{z\colon |z| < 1\}$, la famille de couples (f, g) des fonctions holomorphes et univalentes dans U de la forme

$$f(z) = a + a_1 z + \ldots, \quad g(z) = b + b_1 z + \ldots,$$

telles que

$$f(U) \cup g(U) \subset U, \quad f(U) \cap g(U) = \emptyset.$$

On trouve quelques familles de variations pour le couple $(f, g) \in \mathscr{P}_{a,b}$ (les formules (2), (3), (5), (7)) et les conditions nécessaires pour le couple extrémale par rapport à une fonctionnelle différentiable (les formules (12), (13), (13'), (15)).

Comme exemple on trouve la borne supérieure de la fonctionnelle $\mathrm{Re}\{a_1 b_1\}$ (la formule (30)).

Soient f et $g\colon U \to C$ des fonctions holomorphes et univalentes dans $U = \{z\colon |z| < 1\}$ de la forme

$$f(z) = a + a_1 z + \ldots, \quad g(z) = b + b_1 z + \tag{1}$$

telles que

$$f(U), g(U) \subset U \quad \text{et} \quad f(U) \cap g(U) = \emptyset.$$

Désignons par $H(U)$ l'espace de toutes fonctions holomorphes dans U, avec la convergence uniforme sur chaque sous-ensemble compact de U (convergence presque uniforme).

Désignons par $\mathscr{P}_{a,b}$ la famille des couples (f, g) des fonctions qui possèdent les propriétés décrites ci-dessus. Cette famille est normale et devient compacte après y ajouter les couples (a, b), (a, g) et (f, b), où on confond a et b avec les fonctions constantes égales à a et b, respectivement, tandis que f et g désignent des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans U de la forme (1), qui ne prennent pas la valeur b ou a, respectivement.

Soient données $(f, g) \in \mathscr{P}_{a,b}$ et φ et ψ des fonctions holomorphes et univalentes dans U, $\varphi(U)$, $\psi(U) \subset U$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$. En ce cas, le couple $(f \circ \varphi,\ g \circ \psi) \in \mathscr{P}_{a,b}$.

Nous appelerons variation du couple $(f, g) \in \mathscr{P}_{a,b}$ dans la famille $\mathscr{P}_{a,b}$ l'ensemble de couples $\mathscr{F}_j = \{(f(z, \varepsilon), g(z, \eta))\colon \varepsilon, \eta \in K_j\}$, $j = 1, 2, 3$, où

$(f(z,\varepsilon),\ g(z,\eta))\in\mathscr{P}_{a,b}$, $K_1 = K(0,\sigma)$, $K_2 = (-\sigma,\sigma)$, $K_3 = [0,\sigma)$, $\sigma > 0$, et les limites

$$\lim_{K_j\ni\varepsilon\to 0} f(z,\varepsilon) = f(z,0) = f(z), \qquad \lim_{K_j\ni\eta\to 0} g(z,\eta) = g(z,0) = g(z),$$

$$\lim_{K_j\ni\varepsilon\to 0}\frac{f(z,\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon} = h_j(z)\in H(U),$$

$$\lim_{K_j\ni\eta\to 0}\frac{g(z,\eta)-g(z)}{\eta} = k_j(z)\in H(U)$$

existent au sens de la convergence presque uniforme dans U.

Nous obtiendrons la variation la plus simple dans notre famille en mettant $\varphi(z) = e^{i\varepsilon}z$, $\psi(z) = e^{i\eta}z$, $\varepsilon,\eta\in K_2$, d'où

$$\begin{aligned} f(z,\varepsilon) &= f(\varphi(z)) = f(e^{i\varepsilon}z) = f(z) + \varepsilon i z f'(z) + o(\varepsilon),\\ g(z,\eta) &= g(\psi(z)) = g(e^{i\eta}z) = g(z) + \eta i z g'(z) + o(\eta), \end{aligned} \tag{2}$$

En posant à présent $\varphi(z) = k_\theta(z,\varepsilon)$, $\psi(z) = k_\tau(z,\eta)$, $\theta,\tau\in R$, où

$$\frac{k_\theta(z,\varepsilon)}{(1-e^{i\theta}k_\theta(z,\varepsilon))^2} = (1-\varepsilon)\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}, \qquad \varepsilon\in K_3,$$

$$\frac{k_\tau(z,\eta)}{(1-e^{i\tau}k_\tau(z,\eta))^2} = (1-\eta)\frac{z}{(1-e^{i\tau}z)^2}, \qquad \eta\in K_3,$$

nous obtenons la variation

$$\begin{aligned} f_\theta(z,\varepsilon) &= f(k_\theta(z,\varepsilon)) = f(z) - \varepsilon z f'(z)\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z} + o(\varepsilon),\\ g_\tau(z,\eta) &= g(k_\tau(z,\eta)) = g(z) - \eta z g'(z)\,\frac{1+e^{i\tau}z}{1-e^{i\tau}z} + o(\eta). \end{aligned} \tag{3}$$

Maintenant, notre but est de trouver une variation plus riche que précédentes, notamment nous voulons trouver une variation du type Schiffer.

Soit de nouveau $(f,g)\in\mathscr{P}_{a,b}$. Nous ferons d'abord un changement des frontières $\partial f(U)$ et $\partial g(U)$ à fin d'obtenir les frontières des domaines disjoints situés dans le disque U, pour lesquels les points a et b sont des points intérieurs, respectivement. Dans ce but prenons la fonction

$$\Phi(w) = e^{i\alpha}\frac{w+w_0}{w-w_0} - e^{-i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0 w}{1-\bar{w}_0 w},$$

où $w_0\in U$ et $w_0\notin\partial f(U)\cup\partial g(U)$, $\alpha\in R$. Remarquons que $\operatorname{Re}\Phi(w) = 0$ pour $w\in\partial U$. Posons maintenant

$$w^*(w) = w\,e^{\varepsilon\Phi(w)}. \tag{4}$$

On voit que la fonction (4) est univalente dans l'ensemble $U\setminus\{w\colon |w-w_0|\leqslant r\}$, $0<r<1-|w_0|$, pour ε suffisament proches de zéro. Soit $P=\{z\colon 1-\varrho<|z|<1\}$ une couronne telle que $f(P)$, $g(P)\subset U\setminus\{w\colon |w-w_0|\leqslant r\}$. Les composées $w^*(f(z))$ et $w^*(g(z))$ sont alors des fonctions holomorphes et univalentes dans cette couronne. Du plus, les ensembles $w^*(f(P))$ et $w^*(g(P))$ (qui sont des domaines biconnexes) sont disjoints, parce que $f(P)$ et $g(P)$ sont disjoints et la fonction $w^*(w)$ est univalente. $w^*(w)$ est proche d'identité pour ε suffisament proches de zéro, donc les domaines $f(P)$ et $g(P)$ transformés par $w^*(w)$ sont déformés pas beaucoup. Il en résulte facilement que a appartient à une composante bornée du complément de $w^*(f(P))$ et b appartient à une composante bornée du complément de $w^*(g(P))$. On voit aussi que $w^*(f(P))$ et $w^*(g(P))\subset U$.

En effet, la fonction $w^*(w)$ est univalente sur la circonférence ∂U et $|w^*(w)|=1$ pour $w\in\partial U$, d'où elle transforme ∂U sur ∂U. Si l'image d'un point appartenant par example à $f(P)$ se situait sur ∂U cela disconviendrait de l'univalence de la fonction $w^*(w)$.

A présent, à l'aide de la méthode de Golousin [1], nous allons construire des fonctions f^* et g^* transformant le disque U sur les domaines $w^*(f(P))$ et $w^*(g(P))$, respectivement, auxquels on a ajouté de convenables composantes connexes bornées du complément.

Posons

$S_1(z)=$ partie principale du développement au point 0 de la fonction

$$\frac{f(z)\,\Phi(f(z))}{zf'(z)},$$

$S_2(z)=$ partie principale du développement au point 0 de la fonction

$$\frac{g(z)\,\Phi(g(z))}{zg'(z)}.$$

On a alors

$$f^*(z)=f(z)+\varepsilon[f(z)\,\Phi(f(z))-z\,f'(z)\,S_1(z)+z\,f'(z)\,\overline{S_1(1/\bar z)}]+o(\varepsilon),$$

$$g^*(z)=g(z)+\varepsilon[g(z)\,\Phi(g(z))-z\,g'(z)\,S_2(z)+z\,g'(z)\,\overline{S_2(1/\bar z)}]+o(\varepsilon).$$

Supposons d'abord que $w_0\in f(U)$. On a $w_0=f(z_0)$, $z_0\in U$. En ce cas

$$S_1(z)=\text{p.p.}\frac{f(z)}{z\,f'(z)}\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,f(z)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(z)}\right)$$

$$=\frac{a}{a_1}\left(e^{i\alpha}\frac{a+f(z_0)}{a-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,a}{1-\overline{f(z_0)}\,a}\right)\frac{1}{z}+\frac{2f^2(z_0)\,e^{i\alpha}}{z_0\,f'^2(z_0)}\,\frac{1}{z-z_0},$$

$$S_2(z) = \text{p.p.}\frac{g(z)}{z\,g'(z)}\left(e^{i\alpha}\frac{g(z)+f(z_0)}{g(z)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,g(z)}{1-\overline{f(z_0)}\,g(z)}\right)$$
$$=\frac{b}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{b+f(z_0)}{b-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,b}{1-\overline{f(z_0)}\,b}\right)\frac{1}{z}.$$

En supposant ensuite que $g(U)\ni w_0 = g(z_0)$, nous obtenons

$$S_1(z) = \text{p.p.}\frac{f(z)}{z\,f'(z)}\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+g(z_0)}{f(z)-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}\,f(z)}{1-\overline{g(z_0)}\,f(z)}\right)$$
$$=\frac{a}{a_1}\left(e^{i\alpha}\frac{a+g(z_0)}{a-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}\,a}{1-\overline{g(z_0)}\,a}\right)\frac{1}{z},$$

$$S_2(z)= \text{p.p.}\frac{g(z)}{z\,g'(z)}\left(e^{i\alpha}\frac{g(z)+g(z_0)}{g(z)-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}\,g(z)}{1-\overline{g(z_0)}\,g(z)}\right)$$
$$=\frac{b}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{b+g(z_0)}{b-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}\,b}{1-\overline{g(z_0)}\,b}\right)\frac{1}{z}+\frac{2g^2(z_0)\,e^{i\alpha}}{z_0\,g'^2(z_0)}\frac{1}{z-z_0}.$$

Ainsi nous obtenons deux familles variationnelles de couples

$$(5)\quad f_1^*(z) = f(z)+\varepsilon\Bigg[f(z)\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+f(z_0)}{f(z)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,f(z)}{1-\overline{f(z_0)}\,f(z)}\right)$$
$$-f'(z)\frac{a}{a_1}\left(e^{i\alpha}\frac{a+f(z_0)}{a-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,a}{1-\overline{f(z_0)}\,a}\right)$$
$$+z^2 f'(z)\frac{\bar a}{\bar a_1}\left(e^{-i\alpha}\frac{\bar a+\overline{f(z_0)}}{\bar a-\overline{f(z_0)}}-e^{i\alpha}\frac{1+f(z_0)\,\bar a}{1-f(z_0)\,\bar a}\right)$$
$$-\frac{2f^2(z_0)\,e^{i\alpha}}{z_0\,f'^2(z_0)}\frac{z f'(z)}{z-z_0}+\frac{2\overline{f^2(z_0)}\,e^{-i\alpha}}{\bar z_0\,\overline{f'^2(z_0)}}\frac{z^2 f'(z)}{1-\bar z_0 z}\Bigg]+o(\varepsilon),$$

$$g_1^*(z) = g(z)+\varepsilon\Bigg[g(z)\left(e^{i\alpha}\frac{g(z)+f(z_0)}{g(z)-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,g(z)}{1-\overline{f(z_0)}\,g(z)}\right)$$
$$-g'(z)\frac{b}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{b+f(z_0)}{b-f(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{f(z_0)}\,b}{1-\overline{f(z_0)}\,b}\right)$$
$$+z^2 g'(z)\frac{\bar b}{\bar b_1}\left(e^{-i\alpha}\frac{\bar b+\overline{f(z_0)}}{\bar b-\overline{f(z_0)}}-e^{i\alpha}\frac{1+f(z_0)\,\bar b}{1-f(z_0)\,\bar b}\right)\Bigg]+o(\varepsilon),$$

$$(6)\qquad f_2^*(z)=f(z)+\varepsilon\left[f(z)\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+g(z_0)}{f(z)-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}f(z)}{1-\overline{g(z_0)}f(z)}\right)\right.$$
$$-f'(z)\frac{a}{a_1}\left(e^{i\alpha}\frac{a+g(z_0)}{a-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}a}{1-\overline{g(z_0)}a}\right)$$
$$\left.+z^2f'(z)\frac{\bar a}{\bar a_1}\left(e^{-i\alpha}\frac{\bar a+\overline{g(z_0)}}{\bar a-\overline{g(z_0)}}-e^{i\alpha}\frac{1+g(z_0)\bar a}{1-g(z_0)\bar a}\right)\right]+o(\varepsilon),$$

$$g_2^*(z)=g(z)+\varepsilon\left[g(z)\left(e^{i\alpha}\frac{g(z)+g(z_0)}{g(z)-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}g(z)}{1-\overline{g(z_0)}g(z)}\right)\right.$$
$$-g'(z)\frac{b}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{b+g(z_0)}{b-g(z_0)}-e^{-i\alpha}\frac{1+\overline{g(z_0)}b}{1-\overline{g(z_0)}b}\right)$$
$$+z^2g'(z)\frac{\bar b}{\bar b_1}\left(e^{-i\alpha}\frac{\bar b+\overline{g(z_0)}}{\bar b-\overline{g(z_0)}}-e^{i\alpha}\frac{1+g(z_0)\bar b}{1-g(z_0)\bar b}\right)$$
$$\left.-\frac{2g^2(z_0)e^{i\alpha}}{z_0g'^2(z_0)}\frac{zg'(z)}{z-z_0}+\frac{2\overline{g^2(z_0)}e^{-i\alpha}}{\bar z_0\overline{g'^2(z_0)}}\frac{z^2g'(z)}{1-\bar z_0z}\right]+o(\varepsilon).$$

Admettons enfin que $w_0\notin\overline{f(U)}\cup\overline{g(U)}$. Alors

$$S_1(z)=\text{p.p.}\frac{f(z)}{zf'(z)}\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+w_0}{f(z)-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar w_0f(z)}{1-\bar w_0f(z)}\right)$$
$$=\frac{a}{a_1}\left(e^{i\alpha}\frac{a+w_0}{a-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar w_0a}{1-\bar w_0a}\right)\frac{1}{z},$$
$$S_2(z)=\text{p.p.}\frac{g(z)}{zg'(z)}\left(e^{i\alpha}\frac{g(z)+w_0}{g(z)-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar w_0g(z)}{1-\bar w_0g(z)}\right)$$
$$=\frac{b}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{b+w_0}{b-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar w_0b}{1-\bar w_0b}\right)\frac{1}{z}.$$

Ainsi nous obtenons encore une famille variationnelle de couples

$$(7)\qquad f_3^*(z)=f(z)+\varepsilon\left[f(z)\left(e^{i\alpha}\frac{f(z)+w_0}{f(z)-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar w_0f(z)}{1-\bar w_0f(z)}\right)\right.$$
$$-f'(z)\frac{a}{a_1}\left(e^{i\alpha}\frac{a+w_0}{a-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar w_0a}{1-\bar w_0a}\right)$$
$$\left.+z^2f'(z)\frac{\bar a}{\bar a_1}\left(e^{-i\alpha}\frac{\bar a+\bar w_0}{\bar a-\bar w_0}-e^{i\alpha}\frac{1+w_0\bar a}{1-w_0\bar a}\right)\right]+o(\varepsilon),$$

$$g_\xi^*(z) = g(z)+\varepsilon\left[g(z)\left(e^{i\alpha}\frac{g(z)+w_0}{g(z)-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0 g(z)}{1-\bar{w}_0 g(z)}\right)\right.$$
$$-g'(z)\frac{b}{b_1}\left(e^{i\alpha}\frac{b+w_0}{b-w_0}-e^{-i\alpha}\frac{1+\bar{w}_0 b}{1-\bar{w}_0 b}\right)$$
$$\left.+z^2 g'(z)\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}\left(e^{-i\alpha}\frac{\bar{b}+\bar{w}_0}{\bar{b}-\bar{w}_0}-e^{i\alpha}\frac{1+w_0\bar{b}}{1-w_0\bar{b}}\right)\right]+o(\varepsilon),$$

Supposons que Ψ est une fonctionnelle complexe définie sur la famille de couples $\mathscr{P}_{a,b}$. Nous disons que la fonctionnelle Ψ a une dérivée complexe au sens Gateaux au point (f,g), s'il existe une fonctionnelle linéaire et continue L, définie dans l'espace $H(U)\times H(U)$, telle que pour toute famille variationnelle $\mathscr{F}_j$, si $(f(z,\varepsilon), g(z,\eta))\in\mathscr{F}_j$, on ait

(8) $$\Psi(f(z,\varepsilon),g(z,\eta)) = \Psi(f,g)+\varepsilon L_1(h_j)+\eta L_2(k_j)+o(\sqrt{|\varepsilon|^2+|\eta|^2}),$$

où $L_1(h) = L(h,0)$, $L_2(k) = L(0,k)$, $(h,k)\in H(U)\times H(U)$.

Si la fonctionnelle $\mathrm{Re}\,\Psi$ atteint un extrémum local pour un couple $(f,g)\in\mathscr{P}_{a,b}$, on a alors

(9) $$L_1(h_1) = L_2(k_1) = 0,$$

(10) $$\mathrm{Re}(L_1(h_2)) = \mathrm{Re}(L_2(k_2)) = 0,$$

(11) $\mathrm{Re}(L_1(h_3)) \leqslant 0$, $\mathrm{Re}(L_2(k_3)) \leqslant 0$ dans le cas de maximum,

(11') $\mathrm{Re}(L_1(h_3)) \geqslant 0$, $\mathrm{Re}(L_2(k_3)) \geqslant 0$ dans le cas de minimum.

L'application de l'équation (10) à la famille variationnelle (2) nous donne

(12) $$\mathrm{Re}\{L_1(izf'(z))\} = 0 \quad\text{et}\quad \mathrm{Re}\{L_2(izg'(z))\} = 0.$$

En vertu des inégalités (11), (11') appliquées à la famille (3), nous obtenons

(13) $$\mathrm{Re}\left\{L_1\left(zf'(z)\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}\right)\right\}\geqslant 0,\quad \mathrm{Re}\left\{L_2\left(zg'(z)\frac{1+e^{i\tau}z}{1-e^{i\tau}z}\right)\right\}\geqslant 0,$$

$\theta,\tau\in\boldsymbol{R}$, dans le cas de maximum,

et

(13') $$\mathrm{Re}\left\{L_1\left(zf'(z)\frac{1+e^{i\theta}z}{1-e^{i\theta}z}\right)\right\}\leqslant 0,\quad \mathrm{Re}\left\{L_2\left(zg'(z)\frac{1+e^{i\tau}z}{1-e^{i\tau}z}\right)\right\}\leqslant 0,$$

dans le cas de minimum.

THÉORÈME 1. *Si $(f,g)\in\mathscr{P}_{a,b}$ est un couple extrémal pour la fonctionnelle* $\mathrm{Re}\,\Psi$ *définie plus haut, et si la fonction*

(14) $$F(w) = L_1\left(f(z)\frac{f(z)+w}{f(z)-w}-f'(z)\frac{a}{a_1}\frac{a+w}{a-w}-z^2 f'(z)\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1}\frac{1+w\bar{a}}{1-w\bar{a}}\right)$$

$$-L_1\left(f(z)\frac{1+\bar{w}f(z)}{1-\bar{w}f(z)}-f'(z)\frac{a}{a_1}\frac{1+\bar{w}a}{1-\bar{w}a}-z^2f'(z)\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1}\frac{\bar{a}+\bar{w}}{\bar{a}-\bar{w}}\right)^-$$

$$+L_2\left(g(z)\frac{g(z)+w}{g(z)-w}-g'(z)\frac{b}{b_1}\frac{b+w}{b-w}-z^2g'(z)\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}\frac{1+w\bar{b}}{1-w\bar{b}}\right)$$

$$-L_2\left(g(z)\frac{1+\bar{w}g(z)}{1-\bar{w}g(z)}-g'(z)\frac{b}{b_1}\frac{1+\bar{w}b}{1-\bar{w}b}-z^2g'(z)\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}\frac{\bar{b}+\bar{w}}{\bar{b}-\bar{w}}\right)^-$$

n'est identiquement égale à zéro dans aucune composante connexe de l'ensemble $U\setminus(f(U)\cup g(U))$, *alors cet ensemble n'a pas de points intérieurs.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un disque $K\subset U\setminus(f(U)\cup g(U))$. Soit $w\in K$. Alors, en posant $w_0=w$ dans (7), $\eta=\varepsilon$ dans (8) et $f(z,\varepsilon)=f_\xi^*(z)$, $g(z,\varepsilon)=g_\xi^*(z)$, parce que $\alpha\in\boldsymbol{R}$ est arbitraire, nous obtenons $F(w)=0$ pour tout $w\in K$, ce qui est en contradiction avec les hypothèses du théorème.

THÉORÈME 2. *Si le couple* $(f,g)\in\mathscr{P}_{a,b}$ *est un couple réalisant extrémum de la fonctionnelle* Re Ψ *définie plus haut, alors:*

1° *Le couple* (f,g) *satisfait au système d'équations différentielles-fonctionnelles suivant*

$$\text{(15)}\quad \frac{\zeta^2 f'^2(\zeta)}{f^2(\zeta)}\left\{L_1\left(f(z)\frac{f(z)+f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}-f'(z)\frac{a}{a_1}\frac{a+f(\zeta)}{a-f(\zeta)}-z^2f'(z)\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1}\frac{1+f(\zeta)\bar{a}}{1-f(\zeta)\bar{a}}\right)\right.$$

$$+L_2\left(g(z)\frac{g(z)+f(\zeta)}{g(z)-f(\zeta)}-g'(z)\frac{b}{b_1}\frac{b+f(\zeta)}{b-f(\zeta)}-z^2g'(z)\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}\frac{1+f(\zeta)\bar{b}}{1-f(\zeta)\bar{b}}\right)$$

$$-L_1\left(f(z)\frac{1+\overline{f(\zeta)}f(z)}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}-f'(z)\frac{a}{a_1}\frac{1+\overline{f(\zeta)}a}{1-\overline{f(\zeta)}a}-z^2f'(z)\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1}\frac{\bar{a}+\overline{f(\zeta)}}{\bar{a}-\overline{f(\zeta)}}\right)^-$$

$$\left.-L_2\left(g(z)\frac{1+\overline{f(\zeta)}g(z)}{1-\overline{f(\zeta)}g(z)}-g'(z)\frac{b}{b_1}\frac{1+\overline{f(\zeta)}b}{1-\overline{f(\zeta)}b}-z^2g'(z)\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}\frac{\bar{b}+\overline{f(\zeta)}}{\bar{b}-\overline{f(\zeta)}}\right)^-\right\}$$

$$=2L_1\left(\frac{\zeta zf'(z)}{z-\zeta}\right)-2L_1\left(\frac{\bar{\zeta}z^2f'(z)}{1-\bar{\zeta}z}\right)^-$$

$$\frac{\zeta^2 g'^2(\zeta)}{g^2(\zeta)}\left\{L_1\left(f(z)\frac{f(z)+g(\zeta)}{f(z)-g(\zeta)}-f'(z)\frac{a}{a_1}\frac{a+g(\zeta)}{a-g(\zeta)}-z^2f'(z)\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1}\frac{1+g(\zeta)\bar{a}}{1-g(\zeta)\bar{a}}\right)\right.$$

$$+L_2\left(g(z)\frac{g(z)+g(\zeta)}{g(z)-g(\zeta)}-g'(z)\frac{b}{b_1}\frac{b+g(\zeta)}{b-g(\zeta)}-z^2g'(z)\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1}\frac{1+g(\zeta)\bar{b}}{1-g(\zeta)\bar{b}}\right)$$

$$-L_1\left(f(z)\frac{1+\overline{g(\zeta)}f(z)}{1-\overline{g(\zeta)}f(z)}-f'(z)\frac{a}{a_1}\frac{1+\overline{g(\zeta)}a}{1-\overline{g(\zeta)}a}-z^2 f'(z)\frac{\bar a}{\bar a_1}\frac{\bar a+\overline{g(\zeta)}}{a_1-\overline{g(\zeta)}}\right)^-$$

$$-L_2\left(g(z)\frac{1+\overline{g(\zeta)}g(z)}{1-\overline{g(\zeta)}g(z)}-g'(z)\frac{b}{b_1}\frac{1+\overline{g(\zeta)}b}{1-\overline{g(\zeta)}b}-z^2 g'(z)\frac{\bar b}{\bar b}\frac{\bar b+\overline{g(\zeta)}}{\bar b-\overline{g(\zeta)}}\right)^-\Bigg\}$$

$$=2L_2\left(\frac{\zeta z g'(z)}{z-\zeta}\right)-2L_2\left(\frac{\bar\zeta z^2 g'(z)}{1-\bar\zeta z}\right)^- \quad (^1).$$

2° *Les seconds membres de* (15) *sont des fonctions holomorphes dans un voisinage de couronne de la circonférence ∂U Elles sont nonpositives pour $\zeta\in\partial U$ dans le cas de maximum et nonnégatives – dans le cas de minimum.*

3° *Les fonctions f et g se prolongent en fonctions continues sur le disque fermé $\bar U$ et holomorphes dans un voisinage de $\bar U$, sauf pour un nombre fini des points situés sur la circonférence ∂U, qui sont pour elles des points critiques algébriques.*

4° *Si la fonction* (14), *qui est holomorphe dans $U\setminus((f\,U)\cup g(U))$, n'est égale à une constante dans aucune composante connexe de cet ensemble, alors ce dernier ne possède pas de points intérieurs, donc en vertu de* 3°, *il se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques dont au moins un sort de la circonférence ∂U.*

Démonstration. Ad 1°. En posant dans (8) $\varepsilon=\eta$, en admettant tour à tour $f(z,\varepsilon)=f_1^*(z)$, $g(z,\varepsilon)=g_1^*(z)$ et $f(z,\varepsilon)=f_2^*(z)$, $g(z,\varepsilon)=g_2^*(z)$, en profi-

---

(1) **Observons que la fonction**

$$f(z)\frac{f(z)+f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}$$

a un pôle d'ordre un au point ζ, donc elle n'appartient pas à $H(U)$ et la fonctionnelle L_1 peut être indéfinie pour cette fonction. Néanmoins, on peut prolonger L_1 de façon continue à toutes les fonctions méromorphes dans U qui ne possèdent pas de pôles sur la circonférence $\{z\colon |z|=r\}$, $0<r<1$. En effet, en vertu de la formule de Caccioppoli–Köthe (voir [2], p. 34) sur la représentation générale de la fonctionnelle de $H'(U)$, on peut exprimer la fonctionnelle L_1 par la formule

$$L_1(h)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} h(z)H(z)\,dz,$$

où $H(z)$ est une fonction holomorphe dans l'ensemble $\{z\colon |z|>r'\}$, $0<r'<1$, et r est un nombre quelconque de l'intervalle $(r',1)$. Cette formule nous définit aussi la fonctionnelle L_1 pour les fonctions $h(z)$ possédant des pôles dans U à l'exception de l'ensemble $\{z\colon |z|=r\}$. De la même façon on peut prolonger aussi la fonctionnelle L_2.

tant du fait que le couple (f, g) est extrémale et $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ sont arbitraires, nous obtenons les relations (15).

Ad 2°. En vertu de la répresentation générale de la fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $H(U)$, nous déduisons que les seconds membres de (15) sont des fonctions holomorphes dans un certain voisinage de la circonférence ∂U qui sont, d'après (12) et (13), (13'), nonnégatives dans le cas de maximum et nonpositives dans le cas de minimum.

Ad 3°. 3° résulte du fait que le couple extrémale remplit les relations (15) avec des propriétés décrites dans 1° et 2°.

Ad 4°. 4° découle du théorème 1 et de la propriété 3°.

Exemple. Posons

$$\Psi(f, g) = a_1 b_1 \tag{16}$$

et cherchons la borne supérieure de la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Psi = \operatorname{Re}\{a_1 b_1\}$ dans la famille $\mathscr{P}_{a,b}$. Il est évident que cette borne est prise dans cette famille, parce qu'aucun des couples (a, g), (f, b), (a, b), que nous avons ajoutés afin d'obtenir la compacité de $\mathscr{P}_{a,b}$, n'atteint cette borne. Il est facile de voir que

$$L_1(h) = b_1 h_1, \qquad L_2(k) = a_1 k_1,$$

où

$$h(z) = h_0 + h_1 z + \ldots, \qquad k(z) = k_0 + k_1 z + \ldots \in H(U).$$

En vertu du théorème 2, le couple (f, g) satisfait à la relation

$$\begin{aligned}\frac{z^2 f'^2(z)}{f^2(z)}\Bigg\{\left(1-2a_2\frac{a}{a_1^2}\right)\frac{a+f(z)}{a-f(z)}-\frac{2a f(z)}{(a-f(z))^2}-\left(1-2\bar{a}_2\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1^2}\right)\\ \times\frac{1+f(z)\bar{a}}{1-f(z)\bar{a}}-\frac{2\bar{a} f(z)}{(1-f(z)\bar{a})^2}+\left(1-2b_2\frac{b}{b_1^2}\right)\frac{b+f(z)}{b-f(z)}\\ -\frac{2b f(z)}{(b-f(z))^2}-\left(1-2\bar{b}_2\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1^2}\right)\frac{1+f(z)\bar{b}}{1-f(z)\bar{b}}-\frac{2\bar{b} f(z)}{(1-f(z)\bar{b})^2}\Bigg\} = -2,\end{aligned} \tag{17}$$

et à la relation analogue qui suit de (17) en remplaçant f par g.

Il suite de (12) que pour le couple maximal (f, g) on a $\operatorname{Im}\{a_1 b_1\} = 0$, alors $\operatorname{Re}\{a_1 b_1\} = a_1 b_1$ et on peut assumer dans la suite que $a_1 > 0$ et $b_1 > 0$. En effet, nous obtenons cela en prenant le couple $(f(ze^{-i\arg a_1}), g(ze^{-i\arg b_1}))$ au lieu du couple (f, g). Ce couple est aussi maximal, car la valeur de la fonctionnelle $\operatorname{Re}\Psi$ pour lui est la même que pour le couple maximal (f, g).

De ce qui précède, on voit que f et g remplissent la même équation différentielle

$$\frac{z^2 w'^2}{w^2}\Bigg\{\left(1-2a_2\frac{a}{a_1^2}\right)\frac{a+w}{a-w}-\frac{2a w}{(a-w)^2}-\left(1-2\bar{a}_2\frac{\bar{a}}{\bar{a}_1^2}\right)\frac{1+\bar{a} w}{1-\bar{a} w} \tag{18}$$

$$-\frac{2\bar{a}w}{(1-\bar{a}w)^2}+\left(1-2b_2\frac{b}{b_1^2}\right)\frac{b+w}{b-w}-\frac{2bw}{(b-w)^2}$$
$$-\left(1-2\bar{b}_2\frac{\bar{b}}{\bar{b}_1^2}\right)\frac{1+\bar{b}w}{1-\bar{b}w}-\frac{2\bar{b}w}{(1-\bar{b}w)^2}\Bigg\} = -2.$$

Admettons $a = 0$, $b > 0$. En ce cas l'équation (18) prend la forme

$$\text{(19)}\quad \frac{z^2w'^2}{w^2}\Bigg\{-2+\left(1-2b_2\frac{b}{b_1^2}\right)\frac{b+w}{b-w}-\frac{2bw}{(b-w)^2}$$
$$-\left(1-2\bar{b}_2\frac{b}{b_1^2}\right)\frac{1+bw}{1-bw}-\frac{2bw}{(1-bw)^2}\Bigg\} = -2.$$

En posant dans (19) $w = f(z)$ et en passant à la limite, lorsque $z \to 0$, nous obtenons $b_2 = \bar{b}_2$. De cela d'après (19), nous obtenons

$$\text{(20)}\quad \frac{z^2w'^2}{w^2(w-b)^2(1-bw)^2}\Bigg\{b^2w^4-2b\left(1-b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^2)\right)w^3$$
$$+2\left(1-b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^4)\right)w^2-2b\left(1-b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^2)\right)w+b^2\Bigg\} = 1.$$

Si nous désignons le polynôme dans (20) par $P(w)$, alors en vertu des identités $\overline{P(\bar{w})} = P(w)$ et $P(w) = w^4P(1/w)$ nous voyons que si $P(w_0) = 0$, on a aussi $P(\bar{w}_0) = P(1/\bar{w}_0) = P(1/w_0) = 0$. Il en résulte d'après (20) que les frontières des ensembles $f(U)$ et $g(U)$ appartiennent à l'ensemble des trajectoires de la différentielle carrée

$$\text{(21)}\quad \frac{P(w)\,dw^2}{w^2(w-b)^2(1-bw)^2}.$$

Puisque, en vertu du théorème 2, 4°, au moins un des arcs analytiques des frontières $\partial f(U)$ ou $\partial g(U)$ sort de la circonférence ∂U, le polynôme $P(w)$ doit avoir au moins un zéro sur cette circonférence. Ce zéro doit être d'ordre pair, alors au moins de second ordre, parce que la circonférence ∂U, elle-même, comme un ensemble appartenant à la réunion des frontières $\partial f(U)$ et $\partial g(U)$, appartient évidemment à l'ensemble des trajectoires (21). Trois cas sont possibles. Notamment,

$$(\alpha)\quad P(w) = b^2(w-e^{i\theta})^2(w-e^{-i\theta})^2,$$

$$(\beta)\quad P(w) = b^2(w-1)^2(w-c)(w-1/c),\quad 0 < c < 1,$$

$$(\gamma)\quad P(w) = b^2(w+1)^2(w+c)(w+1/c),\quad -1 < -c < 0.$$

Ad (α). En comparant les formules (α) et (20) pour $P(w)$, nous obtenons

$$P(w) = b^2(w^2-2bw+1)^2,$$

c'est-à-dire, après l'extraction d'une racine de la relation (20), nous avons

$$\frac{b(w^2-2bw+1)}{w(w-b)(1-bw)}w' = \pm\frac{1}{z}.$$

Après l'intégration nous obtenons

$$\log\frac{w-b}{w(w-1/b)} = \pm\log Cz. \tag{22}$$

Grâce à la normalisation $f(0)=0$, $g(0)=b$, la fonction $f(z)$ satisfait à l'équation (22) avec le signe $-$ dans son second membre, et la fonction $g(z)$ satisfait à l'équation (22) avec la signe $+$. Dans le premier cas cette équation prend la forme

$$w^2-\left(\frac{1}{b}+Cz\right)w+Czb = 0. \tag{23}$$

Des racines du discriminant

$$\Delta = C^2z^2+\left(\frac{2C}{b}-4Cb\right)z+\frac{1}{b^2}$$

doivent être situées en dehors du disque U, car dans le cas contraire la fonction $w=f(z)$ aurait un point de ramification dans U. De là nous obtenons l'inégalité

$$|C| \leqslant 1/b. \tag{24}$$

D'autre part, en posant $w = f(z) = a_1z+\ldots$ dans (23), en faisant le coefficient de z égal à zéro dans le premier membre et en appliquant (24) nous obtenons

$$|a_1| = |C|b^2. \tag{25}$$

Nous devons donc prendre $|C| = 1/b$. En ce cas, $|a_1| = b$. En procédant similairement nous obtenons l'équation

$$Czw^2-\left(1+\frac{C}{b}z\right)w+b = 0 \tag{26}$$

pour la fonction $w = g(z)$. Et de nouveau, d'après la condition que les racines du discriminant

$$\Delta = \frac{C^2}{b^2}z^2+2C\left(\frac{1}{b}-2b\right)z+1$$

doivent être situées en dehors du disque U, nous arrivons à l'inégalité

$$|C| \leqslant b. \tag{27}$$

En mettant $w = g(z) = b+b_1z+$ dans (26), en faisant le coefficient de z égal à zéro dans le premier membre et en appliquant (27), nous obtenons

(28) $$|b_1| = |C|(1-b^2).$$

Il faut donc supposer $|C| = b$. Alors, nous avons $|b_1| = b(1-b^2)$. En tenant compte de (25) et (28), nous sommes arrivés à l'équation

$$\operatorname{Re}\{a_1 b_1\} = |a_1 b_1| = b^2(1-b^2).$$

Ad (β). En comparant $P(w)$ de (β) et de (20), nous avons

$$b^2 w^4 - b^2(2+c+1/c)w^3 + 2b^2(1+c+1/c)w^2 - b^2(2+c+1/c)w + b^2$$
$$= b^2 w^4 - 2b\left(1 - b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^2)\right)w^3 + 2\left(1 - b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^4)\right)w^2$$
$$-2b\left(1 - b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^2)\right)w + b^2,$$

et, en comparant les coefficients de w^3 et de w^2 dans tous les deux membres et en éliminant $b_2\frac{b}{b_1^2}$ des formules obtenues, nous arrivons à la contradiction: $c+1/c = -2$.

Ad (γ). En comparant $P(w)$ de (γ) et de (20), nous obtenons

$$b^2 w^4 + b^2\left(2+c+\frac{1}{c}\right)w^3 + 2b^2\left(1+c+\frac{1}{c}\right)w^2 + b^2\left(2+c+\frac{1}{c}\right)w + b^2$$
$$= b^2 w^4 - 2b\left(1 - b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^2)\right)w^3 + 2\left(1 - b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^4)\right)w^2$$
$$-2b\left(1 - b_2\frac{b}{b_1^2}(1-b^2)\right)w + b^2.$$

La comparaison des coefficients de w^3 et w^2 dans les deux membres et l'élimination de $b_2\frac{b}{b_1^2}$ des formules obtenues nous donne la contradiction:

$$0 < b(1+b^2)(2+c+1/c) + 2(c+1/c) = -2b^2.$$

Nous sommes donc arrivés à la conclusion que le seul cas (α) est possible. De là, nous déduisons que pour chaque couple $(f, g) \in \mathcal{P}_{a,b}$, $a = 0$, $b > 0$, on a

(29) $$\operatorname{Re}\{a_1 b_1\} \leqslant b^2(1-b^2).$$

Supposons maintenant que a et b sont des points arbitraires du disque U La fonction

$$\hat{w}(w) = e^{i\alpha}\frac{w-a}{1-\bar{a}w}, \quad \text{où} \quad \alpha = -\arg\frac{b-a}{1-\bar{a}b},$$

transforme U sur U, $\hat{w}(a) = 0$, $\hat{w}(b) = \hat{b} > 0$. Considérons le couple de fonctions

$$\hat{f}(z) = \hat{w}\big(f(e^{i\varphi} z)\big), \qquad \hat{g}(z) = \hat{w}\big(g(e^{i\psi} z)\big),$$

où

$$\varphi = -\arg(e^{i\alpha} a_1), \qquad \Psi = -\arg\frac{e^{i\alpha} b_1}{(1-\bar{a}\,b)^2}, \qquad (f, g) \in \mathscr{P}_{a,b}.$$

On voit que

$$\hat{f}(0) = 0, \qquad \hat{g}(0) = \hat{b} = e^{i\alpha}\frac{b-a}{1-\bar{a}\,b} > 0,$$

$$\hat{f}'(0) = \frac{e^{i\alpha}}{1-|a|^2} a_1 e^{i\varphi} > 0,$$

$$\hat{g}'(0) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}\,b)^2} e^{i\alpha} b_1 e^{i\psi} > 0,$$

d'où, vu (29), nous avons

(30) $$|a_1 b_1| \leqslant \frac{|b-a|^2}{|1-\bar{a}\,b|^2}(1-|a|^2)(1-|b|^2).$$

Le couple extrémal (f, g), tel que $a_1 > 0$ et $b_1 > 0$, est donné à l'aide de la relation

$$\frac{f(z)-a}{1-\bar{a}\,f(z)}\,\frac{1-\bar{b}\,f(z)}{f(z)-b} = e^{i\beta} z,$$

$$\frac{g(z)-b}{1-\bar{b}\,g(z)}\,\frac{1-\bar{a}\,g(z)}{g(z)-a} = e^{-i\beta} z, \qquad \beta = -\arg\frac{a-b}{1-a\bar{b}}.$$

Bibliographie

[1] G. M. Golusin, *Geometricheskaya teoriya funkcii kompleksnogo peremennogo*, Moskva 1966.
[2] G. Schober, *Univalent Functions, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, 1975.

Reçu par la Rédaction le 20.10.1987