ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXII (1976)

Les relations entre les équations pré-Schröder I

par JÓZEF DREWNIAK et JÓZEF KALINOWSKI (Katowice)

Résumé. Dans le travail on considère le problème de l'équivalence entre les équations fonctionnelles pré-Schröder (équations (2.n) pour $n \geqslant 2$). Les résultats obtenus sont en général négatifs (il n'y a pas équivalence), seules les solutions de l'équation (2.2) vérifient aussi d'autres équations du système (2).

1. Dans les travaux cités ([1]–[5]) on considère le problème de l'équivalence entre l'équation de Schröder

$$f(g(x)) = sf(x) \tag{1}$$

et le système des équations fonctionnelles

$$f^n(g(x)) = f(g_n(x))f^{n-1}(x), \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{2.n}$$

appelé aussi système d'équations pré-Schröder (v. [3] ou [5]). En écrivant ainsi les équations fonctionnelles nous profitons des notations de Z. Moszner [2], g étant alors une transformation donnée d'un certain ensemble X en lui-même, f une fonction inconnue du type $f: X \to Y$, $s \in Y$, où Y est un demi-groupe commutatif pour la multiplication (g_n désigne les itérées successives de la fonction g, c'est-à-dire

$$g_0(x) = x, \qquad g_{n+1}(x) = g(g_n(x))$$

dans X).

Le problème de l'équivalence en question a été posé par Gy. Targonski [4], qui a démontré que le système (2) (1) résulte de (1). A l'occasion s'est posé la question si une partie du système (2) n'est pas déjà équivalente à (1). Alors cette partie du système doit être équivalente à tout le système (cf. [4]). En rapport avec cela on peut considérer le problème auxiliaire:

(*) L'équation (2.n) seule peut-elle être équivalente au système (2) pour un certain $n \geqslant 2$?

(1) Les équations particulières pré-Schröder sont désignées par (2.2), (2.3), ..., (2.n), ... et leur système par (2).

La solution positive du problème (*) pour $n = 2$ a été donnée par Z. Moszner [2], comme résultat indirect du raisonnement fait pour une fonction f à valeurs numériques. Ce fait a été signalé par M. Kuczma [1], en qui a demandé en même temps si ce résultat est vrai dans un demi-groupe arbitaire Y. Cependant dans le raisonnement mentionné on profite d'un élément inverse pour la multiplication et c'est pourquoi Gy. Targonski [5] a cité ce résultat en supposant que Y est un groupe commutatif. Une pareille hypothèse peut evidemment résulter plutôt de la méthode d'argumentation que de l'essentiel du problème.

Dans notre travail nous présenterons une autre preuve de l'équivalence de l'équation (2.2) et du système (2), et ensuite nous donnerons la solution du problème (*) pour $n > 2$.

2. Soit Y un semi-groupe commutatif pour la multiplication et par 0 désignons un élément dans Y pour lequel

$$\bigwedge_{y \in Y} 0 \cdot y = 0,$$

si un tel 0 existe. Il est évident qu'il peut en exister au plus un.

THÉORÈME 1. *Si Y est un semi-groupe commutatif et si*

$$\bigwedge_{x,y,z \in Y} (xy = xz \wedge x \neq 0) \Rightarrow (y = z), \tag{3}$$

alors chaque fonction f vérifiant l'équation (2.2) *vérifie aussi toutes les équations du système* (2).

Démonstration. Soit

$$A = \begin{cases} \{x \in X \colon f(g(x)) = 0\} & \text{si } 0 \in Y, \\ \emptyset & \text{si } 0 \notin Y \end{cases}$$

pour une solution fixée de l'équation (2.2). L'équation (2.2) peut être considérée séparément dans les ensembles A et $X \setminus A$, car

$$x \in A \Rightarrow g(x) \in A;$$

$$x \in X \setminus A \Rightarrow g(x) \in X \setminus A.$$

Nous vérifuerons maintenant la conclusion pour chacun des ensembles.

1° Si f satisfait à l'équation (2.2) dans l'ensemble A, alors

$$f(g_n(x)) \equiv 0, \quad x \in A$$

et pour un n arbitraire, $n \geqslant 2$, les deux membres de l'équation ($2.n$) sont identiquement nuls. Donc la fonction f vérifie le système (2) dans l'ensemble A.

2° Supposons maintenant que f vérifie l'équation (2.2) dans l'ensemble $X\setminus A$. Nous utilisons ce fait comme hypothèse de récurrence dans la preuve de la relation $(2.n)$ pour $n \geqslant 2$. Il ne reste plus qu'à montrer que $(2.n+1)$ est vraie quand f satisfait à $(2.k)$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$.

Prenons $n \geqslant 2$. Des équations $(2.n)$ et (2.2) il résulte que

$$(4)\qquad f^{2n}\big(g(x)\big) = f^2\big(g_n(x)\big)f^{2n-2}(x) = f\big(g_{n+1}(x)\big)f\big(g_{n-1}(x)\big)f^{2n-2}(x).$$

On peut facilement constater que

$$(5)\qquad f\big(g_{n-1}(x)\big)f^{n-2}(x) = f^{n-1}\big(g(x)\big),$$

car pour $n > 2$ l'équation (5) se confond avec $(2.n-1)$ (supposée vraie) et pour $n = 2$ les deux membres de l'équation (5) se réduisent à $f\big(g(x)\big)$. En substituant (5) dans (4) nous obtenons

$$f^{2n}\big(g(x)\big) = f\big(g_{n+1}(x)\big)f^{n-1}\big(g(x)\big)f^n(x).$$

A cause de l'hypothèse (3) cette équation est équivalente à l'équation $(2.n+1)$ dans l'ensemble $X\setminus A$ $\big(f^{n-1}\big(g(x)\big) \neq 0\big)$. En vertu du principle d'induction mathématique la fonction f satisfait au système (2) dans le même ensemble. Cela achève démonstration du théorème.

La résultat énoncé se confond partiel avec le résultat de Z. Moszner cité au commencement de notre travail, car il n'est pas nécessaire d'y supposer que la multiplication est invertible, tandis que nous y profitons de la règle supplémentaire (3).

3. La solution du problème (*) pour $n \geqslant 3$ est négative. Pour la démonstration de ce fait il suffit de se limiter aux fonctions concrètes à valeurs numériques (en augmentant le nombre des hypothèses faites dans un contre-exemple on diminue les chances d'obtenir un résultat positif). Nous commençons nos considérations en présentant quelques conclusions auxiliaires.

LEMME 1. *Soit $X = Y = C$ [2], $a, b \in C$, $a > 0$, $n \geqslant 2$. L'équation $(2.n)$ avec la fonction*

$$(6)\qquad g(x) = bx$$

a une solution du type

$$(7)\qquad f(x) = a^x \text{ [3]}$$

si et seulement si b vérifie l'équation

$$(8.n)\qquad b^n - nb + n - 1 = 0.$$

---

[2] Par C nous désignons l'ensemble des nombres complexes.

[3] Les puissances complexes seront désignées par

$$x^a = \begin{cases} \exp(a\operatorname{Log} x) & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \end{cases}$$

où $\operatorname{Log} x$ signifie le logarithme principal du nombre x.

Démonstration. I. En substituant (6) et (7) dans l'équation (2.n) nous obtenons

$$a^{bnx} = a^{b^n x} a^{(n-1)x}, \tag{9}$$

d'où, après des calculs élémentaires, on obtient l'équation (8.n).

II. Si b satisfait à l'équation (8.n), alors on a (9) pour des a, $x \in C$ arbitraires, et profitant des notations de (6) et (7) on obtient l'équation (2.n). Cela achève la démonstration du lemme.

Lemme 2. *La racine multiple unique de l'équation* (8.n) *est* $b = 1$. *C'est une racine double.*

Démonstration. Formons la suite des fonctions

$$F_n(b) = b^n - nb + n - 1, \quad n = 2, 3, \ldots, \quad b \in C. \tag{10.n}$$

Les zéros de la fonction (10.n) se confondent avec les racines de l'équation (8.n). Il est facile de vérifier que $b = 1$ est un zéro de la fonction (10.n) pour $n \geqslant 2$. En même temps, en dérivant, nous obtiendrons

$$F'_n(b) \doteq nb^{n-1} - n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{11.n}$$

et il en résulte directement que les racines multiples uniques de l'équation (8.n) peuvent être seulement les racines de l'unité.

En vertu de (8.n) ce ne peut être que $b = 1$. Cette racine est double, ce qui résulte de (11.n) en différentiant par rapport à b, et la démonstration du lemme est ainsi achevée.

Tenant compte des lemmes 1 et 2 nous pouvons conclure:

Théorème 2. *Les équations séparées* (2.n) *pour* $n \geqslant 3$ *ne sont pas équivalentes au système* (2), *c'est-à-dire: on peut donner une fonction* g *telle que la solution de l'équation* (2.n) *ne vérifie pas l'une des autres équations du système* (2).

Démonstration. Soit $n \geqslant 3$. Nous utiliserons les notations du lemme 1, en fixant un nombre correspondant b dans (6). Tenant compte du lemme 2, l'équation (8.n) a une solution complexe b_k pour $2 \leqslant k < n$, qui ne vérifie pas l'équation (8.k), l'équation (8.n) ayant au moins une solution de plus. En admettant $b = b_k$ dans la formule (6) nous voyons que l'équation (2.n) a une solution du type (7) à cause du lemme 1. En même temps, en vertu du même lemme la fonction (7) ne vérifie pas aucune des équations (2.k) pour $2 \leqslant k < n$, ou bien elle ne vérifie pas le système (2). Cela achève la preuve du théorème.

Le théorème mentionné ci-dessus résout négativement le problème (*) pour $n \geqslant 3$. En particulier il résulte de la démonstration

Conclusion 1. *Pour* $n > m \geqslant 3$ *la solution de l'équation* (8.n) *ne doit pas vérifier l'équation* (8.n).

4. Pour obtenir un tableau complet du rapport entre les équations séparées du système (2) il suffit de demander quelle est la relation inverse de celle de la conclusion 1:

($\overset{*}{*}$) La solution de l'équation $(2.m)$ vérifie-t-elle les équations $(2.n)$ pour $n > m$?

C'est une version plus faible du problème (*), car nous y possons la même question, en réduisant en même temps le système (2) au système des équations $(2.n)$ pour $n \geqslant m$.

Evidement pour $m = 2$ la réponse à la question ($\overset{*}{*}$) sera positive, il nous reste alors à considérer le cas $m \geqslant 3$. Nous profitons ici encore une fois des solutions du système (8).

LEMME 3. *Si les équations* $(8.n)$ *et* $(8.m)$ *ont pour* $n > m \geqslant 3$ *une racine commune* $b \in C$, *alors*

$$d = |b| = 1.$$

Démonstration. Soit

$$b = d(\cos t + i\sin t) \tag{12}$$

la racine commune des équations $(8.n)$ et $(8.m)$. En substituant (12) dans l'équation $(8.n)$ et en comparant les membres correspondants réels et imaginaires on obtient

$$d^n \sin(nt) = nd\sin t$$

ainsi que

$$d^n \cos nt = nd\cos t + 1 - n;$$

de là, en élevant au carré et en ajoutant les membres, il résulte que

$$2d\cos t = \frac{d^{2n} - n^2 d^2 - (1-n)^2}{n(1-n)}. \tag{13}$$

De même de l'équation $(8.m)$ nous obtenons

$$2d\cos t = \frac{d^{2m} - m^2 d^2 - (1-m)^2}{m(1-m)}. \tag{14}$$

En comparant (13) et (14) nous déduisons que le module $d \geqslant 0$ de la racine commune des équations $(8.n)$ et $(8.m)$ est un zéro de la fonction

$$\begin{aligned} G(d) = {} & m(1-m)d^{2n} - mn^2(1-m)d^2 - m(1-n)^2(1-m) - \\ & - n(1-n)d^{2m} + nm^2(1-n)d^2 + n(1-m)^2(1-n). \end{aligned} \tag{15}$$

En différentiant la fonction (15) nous obtenons

$$\begin{aligned} G'(d) = {} & 2mn(1-m)d^{2n-1} - 2mn^2(1-m)d - 2mn(1-n)d^{2m-1} - \\ & - 2m^2 n(1-n)d. \end{aligned}$$

De là nous avons $G'(0) = 0$. De plus nous allons montrer que

$$G'(d) < 0 \quad \text{pour } d \in (0,1) \cup (1, \infty). \tag{16}$$

Dans ce but notons que pour $d > 0$ la fonction G' a le même signe que la fonction

$$H(y) = py^q - qy^p + q - p,$$

où

$$p = n-1, \quad q = m-1, \quad y = d^2.$$

Comme la fonction

$$H'(y) = pqy^{q-1}(1-y^{p-q})$$

satisfait aux inégalités

$$H'(y) > 0 \quad \text{pour } y \in (0,1), \qquad H'(y) < 0 \quad \text{pour } y \in (1, \infty)$$

et que $H(1) = 0$, on a

$$H(y) < 0 \quad \text{pour } y \in (0,1) \cup (1, \infty).$$

L'inégalité (16) est donc vraie. Par conséquent la fonction G est strictement décroissante pour $d \geqslant 0$ et elle peut avoir tout au plus un zéro dans l'intervalle $(0, \infty)$. Il est facile de vérifier que c'est $d = 1$ et la démonstration du lemme est ainsi achevée.

LEMME 4. *Soit $n > m \geqslant 3$. La racine commune unique des équations* (8.n) *et* (8.m) *est $b = 1$.*

Démonstration. En vertu du lemme 3 on a $|b| = 1$. En profitant de la formule (13) nous obtenons

$$\cos t = 1,$$

ce qui, rapproché de (12), donne la conclusion du lemme.

Les résultats des lemmes ci-dessus permettent de constater que chaque équation du système (8) pour $n \geqslant 3$ a une racine complexe qui n'est pas la solution d'aucune des autres équations du système. En profitant d'une solution choisie b dans la formule (6) nous pouvons écrire en vertu du lemme 1:

THÉORÈME 3. *Deux équations différentes du système* (2) *ne sont pas équivalentes, c-à-d. on peut choisir une fonction g telle que la solution d'une des deux équations choisies ne vérifie pas la seconde d'elles.*

Ce théorème fournit une réponse négative à la question (*) et indique l'absence de relations directes entre les équations pré-Schröder. Les résultats présentés dans ce travail démontrent le rôle particulier que l'équation (2.2) joue parmi les équations du système (2).

C'est pourquoi cette équation a été l'object d'études plus détaillées (voir p. ex. [3]).

Nous exprimons nos remerciements à M. le Professeur Z. Moszner de ses précieuses indications et remarques.

Travaux cités

[1] M. Kuczma, P 63 R 2, Aequationes Math. 5 (1970), p. 327.
[2] Z. Moszner, P 63 S 1, P 63 S 2, ibidem 4 (1970), p. 395.
[3] — *Sur un problème relatif aux équations de pré-Schröder*, Ann. Polon. Math. 27 (1973), p. 289–292.
[4] Gy. Targonski, Problem P 63, Aequationes Math. 4 (1970), p. 251.
[5] — *On pre-Schröder equations*, ibidem 8 (1972), p. 157.

Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1973