ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIII (1983)

О граничных свойствах аналитических функции

И. А. Джваршейшвили (Тбилиси)

Abstract. In the paper the classes GN and GH_δ, $\delta > 0$ of analytic functions in a unit circle are introduced which generalize the well-known classes N (Nevanlinna) and H_δ (Hardy). The angular boundary values are proved to exist almost everywhere for the functions of the introduced classes. It is stated that even if one condition from the definition of class GN is not fulfilled, then the function is constructed for which the angular boundary values do not exist almost everywhere. Hence, the conditions from the definition of class GN are unimprovable.

1. Предварителные сведения.(1) Пусть $D_R = \{z:|z| < R\}$, $\Gamma_R = \{z:|z| = R\}$. Следуя А. Зигмунду ([2], стр. 199) треугольной окрестностью точки Re^{it} относительно Γ_R назовем множество $\Delta(Re^{it}, \varrho, \theta) = \{z = Re^{it}+\varepsilon e^{i(t+\psi+\pi)};\ 0 < \varepsilon < \varrho < \cos\frac{1}{2}\pi\theta\}$, $\theta \in (0, 1)$, $|\psi| < \frac{1}{2}\pi\theta$. Пусть F определена в области $D_1 = D$. Функция F имеет в точке e^{it_0} угловой предел, если найдутся числа θ_0 и ϱ_0 такие, что существует предел $\lim\limits_{z\to e^{it_0}} F(z)$, когда $z \in \Delta(e^{it_0}, \varrho_0, \theta_0)$.

Следуя А. Зигмунду ([2], стр. 199) через $\Omega_r(t)$ обозначим область ограниченную двумя касательными к Γ_r проведенными из точки $t \in \Gamma_1 = \Gamma$ и наибольшей дугой Γ_r, заключенной между точками касания. Далее $\hat{D}_r(t) = D_r \setminus \Omega_t(t)$, $\hat{\Gamma}_r(t) = \Gamma_r \setminus \Omega_t(t)$.

В настоящей статье мы вводим новые классы аналитических функций, которые существенно обобщают известные классы Харди (H^p, $p > 0$) и Неванлина (N) (см., например [3], стр. 78).

Определение 1 [4]. *Скажем, что аналитическая в D_1, функция f принадлежит классу GN (GH^δ, $\delta > 0$) в D_1, если почти для каждой точки e^{ix} существуют последовательность $r_k = r_k(f, x)$, $k = 1, \ldots, \infty$, $r_k\uparrow 1$ при $k \to \infty$, $\frac{2}{3} < \frac{1-r_{k+1}}{1-r_k} < 1$ и число $C = C(f,x)$ такие, что*

$$\text{(a)}\qquad \overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}}\left|\frac{1}{h}\int_0^h \ln^+\left|f(r_n e)^{i(x+u)}\right|du\right| = A(x) < \infty,$$

$$\Big(\overline{\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}}\left|\frac{1}{h}\int_0^h \left|f(r_n e^{i(x+u)})\right|^\delta du\right| = N(x)\Big),$$

(1) Основные результаты работы анонсированы в [4].

$$\text{(b)}\qquad \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(r_n e^{it})|\,dt \leqslant \frac{C}{1-r_n}, \qquad n = 1, \ldots, \infty,$$

$$\Big(\int_{-\pi}^{\pi} |(fr_n e^{it})|^\delta\, dt \leqslant \frac{C}{1-r_n}, \qquad n = 1, \ldots, \infty\Big).$$

2. Сравнение классов. В этом пункте будет установлена взаимосвязь между введенными и ранее известным классами.

Прежде всего заметим, что из неравенства $u^p \geqslant p \ln^+ u$ для всех $p > 0$ и $u > 0$ непосредственно вытекает включение $GH^\delta \subset GN$. Имеет место

Теорема 1. *Справедливо включение* $N \subset GN$.

Доказательство. Пусть $f \in N$. Тогда

$$\ln^+ |f(re^{ix})| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_R(r, t) \ln^+ |f(Re^{i(x+t)})|\,dt, \qquad 0 \leqslant r < R < 1,$$

где

$$P_R(r, t) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos t}.$$

Отсюда имеем

$$\ln^+ |f(re^{i(x+w)})| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_R(r, t) \ln^+ |f(Re^{i(x+\omega+t)})|\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_R(r, t-\omega) \ln^+ |f(Re^{i(x+t)})|\,dt.$$

Далее для $h > 0$ получаем

$$(2.1)\qquad \frac{1}{h}\int_0^h \ln^+ |f(re^{i(x+\omega)})|\,d\omega \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(Re^{i(x+t)})|\,dt \cdot \frac{1}{h} \int_0^h P_R(r, t-\omega)\,d\omega.$$

Введем новое ядро

$$(2.2)\qquad Q_{h,R}(r, t) = \frac{1}{h} \int_0^h P_R(r, t-\omega)\,d\omega.$$

Справедливы неравенства,

$$(2.3)\qquad 0 < \int_{-\pi}^{\pi} Q_{h,R}(r, t)\,dt < K; \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left| t \frac{\partial}{\partial t} Q_{h,R}(r, t) \right| dt \leqslant K_1$$

$0 \leqslant r < R < 1$, где K и K_1, не зависят от r, h, R.

В самом деле, имеем

$$(2.4)\qquad 0\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} Q_{h,R}(r,t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt\,\frac{1}{h}\int_{0}^{h} P_R(r,t-\omega)\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{0}^{h} d\omega \int_{-\pi}^{\pi} P_R(r,t-\omega)\,dt \leqslant K,$$

где K не зависит от r, R и h. Далее

$$(2.5)\qquad J = \int_{-\pi}^{\pi} \left| t\frac{\partial}{\partial t} Q_{h,R}(r,t)\right| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{t}{h}\int_{0}^{h}\frac{\partial}{\partial t} P_R(r,t-\omega)\,d\omega\right| dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{t}{h}\int_{0}^{h}\frac{\partial}{\partial \omega} P_R(r,t-\omega)\,d\omega\right| dt =$$

$$= \left\{\left(\int_{-\pi}^{-\pi+h} + \int_{\pi-h}^{\pi}\right) + \left(\int_{-\pi+h}^{-h} + \int_{h}^{\pi-h}\right) + \left(\int_{-h}^{0} + \int_{0}^{h}\right)\right\} |t| \times$$

$$\times \left|\frac{P_R(r,t-h)-P_R(r,t)}{h}\right| dt = I_1+I_2+I_3 \ldots$$

Оценим первое слагаемое. Имеем

$$(2.6)\qquad I_1 < \int_{-\pi}^{\pi} t\,\frac{|P_R(r,t+h)-P_R(r,t)|+|P_R(r,t-h)-P_R(r,t)|}{|h|}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{\pi-h}^{\pi} t\left\{\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(t+h)-\sin\frac{1}{2}t}{h}\right| P_R(r,t+h) + \right.$$

$$\left. + \left|\frac{\sin\frac{1}{2}(t-h)-\sin\frac{1}{2}t}{h}\right| P_R(r,t-h)\right\} dt < C < \infty$$

при этом константа C не зависит от h, r, R. Далее

$$(2.7)\qquad I_3 \leqslant \int_{0}^{h} \{|P_R(r,t+h)-P_R(r,t)|+|P_R(r,t-h)-P_R(r,t)|\}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\int_{0}^{2\pi} P_R(r,t)\,dt < C_1 < \infty,$$

где константа C_1 не зависит от h, r и R. При оценке I_2 заметим, что $P_R(r,t)$ убывающая функция относительно $t \in (0,\pi)$. Отсюда получаем

$$(2.8)\qquad J_2 \leqslant \int_{h}^{\pi-h} \frac{t}{h}\,\{|P_R(r,t+h)-P_R(r,t)|+|P_R(r,t-h)-P_R(r,t)|\}\,dt =$$

$$=\left|\int_{h}^{\pi-h} t\,\frac{P_R(r,t+h)-P_R(r,t-h)}{h}\,dt\right|\leqslant\left|(\pi-h)\,\frac{\tilde{P}_R(r,\pi)-\tilde{P}_R(r,\pi-2h)}{h}\right|+$$

$$+|\tilde{P}_R(r,2h)|+|\tilde{P}_R(r,0)|+\left|\int_{\pi-h}^{h}\frac{\tilde{P}_R(r,t+h)-\tilde{P}_R(r,t-h)}{h}\,dt\right|,$$

где

$$\tilde{P}_R(r,t)=\int_0^t P_R(r,u)\,du.$$

Известно, что для любых x и n справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 2\sqrt{\pi}.$$

Отсюда имеем

$$|P_R(r,t)|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k\frac{\sin kt}{k}\right|<C,\quad t\in(0,\pi),\tag{2.9}$$

где C не зависит от r, R и t. С другой стороны

$$\frac{|\tilde{P}_R(r,\pi)-\tilde{P}_R(r,\pi-2h)|}{h}\leqslant\left|\int_{\pi-h}^{\pi}P_R(r,t)\,dt\right|\frac{1}{h}<C_3<\infty,\tag{2.10}$$

где C_3 не зависит от r, R и h. Далее

$$\left|\int_{h}^{\pi-h}\frac{P_R(r,t+h)-P_R(r,t-h)}{h}\,dt\right|=\left|\int_{h}^{\pi-h}\frac{dt}{h}\int_{t-h}^{t+h}P_R(r,u)\,du\right|\leqslant\tag{2.11}$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_0^{2h}P_R(r,u)\,du\int_h^{u+h}dt\right|+\left|\frac{1}{h}\right|\left|\int_{2h}^{\pi-2h}P_R(r,u)\,du\int_{u-h}^{u+h}dt\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{h}\int_{\pi-2h}^{\pi}P_R(r,u)\,du\int_{u-h}^{\pi-h}dt\right|\leqslant 3\int_0^{2\pi}P_R(r,u)\,du<C_4<\infty,$$

где C_4 не зависит от r, R и h. Теперь из соотношений (2.4)–(2.11) получаем справедливость неравенств (2.3) и выражение (2.1) перепишем в виде

$$\frac{1}{h}\int_0^h \ln^+|f(re^{i(x+\omega)})|\,d\omega\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(Re^{i(x+t)})|\,Q_{h,R}(r,t)\,dt.\tag{2.12}$$

Рассмотрим мажоранты Харди и Литтлвуда, а именно

$$M_r(f, x) = \sup_{0<|t|<\pi} \frac{1}{t} \int_0^t \ln^+ |f(re^{i(x+u)})|\, du.$$

На основании леммы (7.1) и теоремы (7.8) из [1], стр. 155, имеем

$$\sup_{\substack{0 \leq r < R \\ h > 0}} \frac{1}{h} \int_0^h \ln^+ |f(re^{i(x+\omega)})|\, d\omega \leq CM_R(f, x), \tag{2.13}$$

константа C не зависит от R и $x \in [-\pi, \pi]$.

С другой стороны в силу неравенства Колмогорова ([5] или [1], стр. 33) и так как $f \in N$ имеем

$$\operatorname{mes}\{x: M_R(f, x) > y,\ 0 \leq x < 2\pi\} \leq \frac{1}{y} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(Re^{ix})|\, dx < \frac{C}{y}, \tag{2.14}$$

где $C = C(f)$ не зависит от y и R. Отсюда вытекает, что почти для каждой точки $x \in [0, 2\pi]$ существует последовательность $R_k = R_k(x)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = 1$.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, M_{Rk}(f, x) = N(x) < \infty. \tag{2.15}$$

В самом деле, в противном случае найдется множество E, $\operatorname{mes} E > 0$ и для всех $x \in E$ будем иметь

$$\lim_{r\to 1} M_r(f, x) = \infty.$$

Но в силу (2.14), для любого $y > 0$ имеем

$$\operatorname{mes}\{x: M_R(f, x) > y, x \in E\} < C/y$$

и переходя к пределу при $R \to 1$ получим

$$\operatorname{mes} E \leq C/y$$

для любого $y > 0$, что невозможно. Итак имеет место (2.15). Теперь на основании (2.15) и (2.13) получаем

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{h} \int_0^h \ln^+ |f(re^{i(x+\omega)})|\, d\omega < C \overline{\lim_{k\to\infty}}\, M_{R_k}(f, x) < CN(x) < \infty$$

почти для всех $x \in [0, 2\pi]$. Стало быть условие (а) для функции f выполнено. Следовательно, $f \in GN$ и теорема доказана.

Зависимость между классами H^δ и GH^δ непосредственно следует из теоремы (7.36) (см. [1], стр. 278), а именно справедливо включение $H^\delta \subset GH^\delta$,

$\delta > 0$. Заметим, что для класса N не имеет место результат аналогичный выше упомянутой теореме (7.36). Теперь построим функцию в D_1, принадлежащую классу GN и не принадлежащую классу N. Для этого рассмотрим функцию $f(z) = \exp[(1+z)/(1-z)]^2$, $z \in D_1$. Очевидно равенство

$$\lim_{r\to 1} \exp\{[(1+r)/(1-r)]^2\} - C/(1-r) = \infty$$

для любого C. Отсюда и в силу неравенства (3.11) из [3], стр. 84, следует что $f \notin N$. С другой стороны

$$\ln^+|f(re^{ix})| \leqslant \frac{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2 x}{[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{1}{2}x]^2}.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{ix})|\,dx \leqslant \frac{C}{(1-r)}, \tag{2.16}$$

где $C > 0$ не зависит от r. В силу неравенства $|e^{(u+iv)^2}| < e^{|u+iv|^2}$ имеем

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \ln^+|f(re^{i(x+u)})|\,du\right| \leqslant C\left|\frac{1}{t}\int_0^t \frac{du}{|1-re^{(ix+u)}|^2}\right|.$$

Пусть $x \in (0, 2\pi)$. Тогда для достаточно малого $|t|$ при $|u| < |t|$ будем иметь $|1-re^{i(x+u)}| > K(x) > 0$.

Следовательно

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t \ln^+|f(re^{i(x+u)})|\,du\right| \leqslant A(x) < \infty. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) заключаем, что $f \in GN$, т. е. класс N строго входит в класс GN. Аналогично можно показать, что класс H^δ строго входит в класс GH^δ, $\delta > 0$.

3. Существование угловых пределов функций класса GN. Прежде всего докажем следующую лемму

Лемма 1. *Пусть* $r_k \uparrow 1$, $k \to \infty$, $\frac{2}{3} < \dfrac{(1-r_{k+1})}{(1-r_k)} < 1$ *и* $\Delta(r_k, \varrho_k, \theta)$ — *треугольные окрестности точки* r_k *относительно* Γ_{r_k}, $\varrho_k = 1-r_k$, θ — *фиксированное число из* (0.1). *Тогда существует треугольная окрестность* $\Delta(1, \varrho_0\theta_0)$ *точки* 1 *относительно* Γ_1, *такая, что*

$$\Delta(1, \varrho_0, \theta_0) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta(r_k, \varrho_k, \theta), \quad 0 < \theta_0 < \theta < 1.$$

Доказательство. Из условия леммы имеем $r_{k+1} - r_k < 1 - r_{k+1} = \varrho_{k+1}$, то есть $r_k \in \Delta(r_{k+1}, \varrho_{k+1}, \theta)$. Для простоты будем рассматривать ту часть

$\Delta(r_k, \varrho_k, \theta) = \Delta_k$, которая лежит в верхней полуплоскости. Пусть (x_k, y_k) координаты точки пересечения боковой стороны Δ_k и основания (дуги) Δ_{k+1}. Используя условия леммы оценим выражение

$$\frac{y_k}{1-x_k} \geqslant \frac{\sin\theta\,\dfrac{\varrho_{k+1}^2-[r_{k+1}-r_k]^2}{2\varrho_{k+1}}}{\varrho_{k+1}+[r_{k+1}-r_k]+[r_k-x_k]} \geqslant \frac{\varrho_{k+1}^2-[r_{k+1}-r_k]^2}{6\varrho_{k+1}^2}\sin\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varrho_{k+1}-r_{k+1}+r_k}{\varrho_k}\cdot\frac{\varrho_{k+1}+r_{k+1}-r_k}{\varrho_{k+1}}\cdot\frac{\sin\theta}{6} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\tfrac{4}{3}-1\right)\tfrac{1}{6}\sin\theta = \tfrac{1}{18}\sin\theta, \quad k = 1, \ldots, \infty.$$

Теперь подберем угол θ_0 и ϱ_0 так, что $0 < \varrho_0 < \varrho$, $0 < \theta_0 < \theta$ и

$$\operatorname{tg}\theta_0 < \tfrac{1}{18}\sin\theta.$$

Тогда для любого k имеем

$$\frac{y_k}{(1-x_k)} > \operatorname{tg}\theta_0.$$

Следовательно, $\Delta(1, \varrho_0, \theta_0) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta(r_k, \varrho_0, \theta_0)$ и лемма доказана.

Теперь докажем основную теорему

Теорема 2. *Пусть f аналитическая функция в D_1, и $f \in GN$. Тогда почти всюду на Γ_1 функция f имеет угловые пределы.*

Доказательство. Для $0 \leqslant r < R < 1$ справедливо неравенство

$$\ln^+|f(re^{ix})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(Re^{i(x+u)})|P_R(r, u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln^+|f(Re^{it})|P_R(r, x-t)\,dt.$$

Пусть в точке x_0 выполнено условие (a). Тогда для $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $k > N$, $|h| < 1/N = \eta$

$$\frac{1}{h}\int\limits_{0}^{-h}\ln^+|f(r_k e^{i(x_0+u)})|\,du \leqslant A(x_0)+\varepsilon. \tag{3.1}$$

Введем функцию $\varphi(re^{ix}) = \ln^+|f(r_k e^{ix})|$, когда $r = r_k$, $x \in [x_0-1/N, x_0+1/N]$, для $k = 1, \ldots, \infty$ и $\varphi(re^{ix}) = 0$ в остальных точках. Пусть для $k > N$, $|z| = |re^{ix}| < r_k$.

Тогда

$$(3.2)\quad \ln^+|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(r_k e^{iu})P_{r_k}(r, x-u)\,du + \left(\int_{-\pi}^{x_0-\eta}+\int_{x_0+\eta}^{\pi}\right)\ln^+|f(r_k e^{iu})|P_{r_k}(r, x-u)\,du\right\} = I_1(z)+I_2(z).$$

Как известно (см. [1], стр. 156), для ядра P_R имеем

$$\sup\int_{-\pi}^{\pi}P_R(r, t-x)\,dt \leqslant K<\infty, \qquad \sup\int_{-\pi}^{\pi}\left|t\cdot\frac{\partial P_R(r, t-x)}{\partial t}\right|dt \leqslant K_1<\infty,$$

причем sup берется по $z = re^{ix}\in \Delta(Re^{ix_0}, \varrho, \theta)$, где ϱ и θ фиксированные числа из $[0, 1)$, а $x\in[0, 2\pi)$. В силу последних неравенств, в также на основании леммы (7.1) из [1], стр. 154, и в силу (3.1) получаем

$$(3.3)\qquad \sup|I_1(z)| \leqslant C\big(A(x_0)+\varepsilon\big)$$

при этом sup берется по $z\in\Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho, \theta)$, $k>1/N$, где ϱ и θ некоторые фиксированные числа, а $C>0$ не зависит от ε, k и точки x_0. Зафиксируем угол $\theta_0\in(0, 1)$ и подберем номер $N_0>N$ так, что при $k>N_0$

$$1-r_k=\varrho_k<r_k\frac{\sin\eta/2}{\sin(\theta_0+\frac{1}{2}\eta)}, \qquad \eta=\frac{1}{N}.$$

Отсюда вытекает, что если $z=re^{ix}\in\Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho_k, \theta)$, то

$$(3.4)\qquad x_0-\eta/2\leqslant x\leqslant x_0+\eta/2, \qquad \eta=1/N.$$

Пусть $t\in[-\pi, x_0-\eta]\cup[x_0+\eta, \pi]$. Тогда в силу (3.4) для $z\in\Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho_k, \theta)$, $k>N_0$ имеем

$$(3.5)\qquad |P_{rk}(r, t-x)|<C(r_k-r)/\eta^2,$$

где C не зависит от k и r. На основании условия (в) и соотношений (3.2) и (3.5) при $z\in\Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho_k, \theta)$, $k>N_0$ получаем

$$(3.6)\qquad |I_2(z)|\leqslant C\frac{r_k-r}{\eta^2(1-r_k)}<C\frac{\varrho_k}{\eta^2(1-r_k)}\leqslant\frac{C}{\eta^2},$$

где $C>0$ не зависит от k, и $z=re^{it}$. Теперь в силу (3.2), (3.3) и (3.6) для $z\in\Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho_k, \theta)$, $k>N_0$ имеем

$$\sup_{z\in\Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho_k, \theta)}\ln^+|f(z)|\leqslant C$$

где $C > 0$ не зависит от k. Отсюда и на основании леммы 1 существует треугольная окрестность $\Delta_0 = \Delta(e^{ix_0}, \varrho_0, \theta_0) = \bigcup_{k>N_0} \Delta(r_k e^{ix_0}, \varrho_k, \theta)$ такая, что

$$\sup_{z\in\Delta_0} \ln^+ |f(z)| \leqslant C, \tag{3.7}$$

где константа $C > 0$ быть может зависит только от e^{ix_0}. Так как $f \in GN$, то неравенство (3.7) выполнено почти для всех e^{ix_0}. Отсюда и в силу известной теоремы Плеснера (см. [3], стр. 299) заключаем, что функция f имеет почти в каждой точке e^{ix_0} угловые пределы и теорема доказана.

Теперь покажем, что малейшее ослабление хотя бы одного из условий (а) или (в) нарушает справедливость доказанной теоремы. Предположим, что условие (а) не выполняется почти для всех x_0. Тогда (см. [6], стр. 273) для любой монотонно возрастающей функции $p(r) \uparrow \infty$, $r \to 1$ существует аналитическая функция в D_1 $g(z)$ такая, что $|g(z)| < p(r)$, $z = re^{ix}$, $x \in [0, 2\pi]$ однако на множестве полной меры не имеет даже радиальные пределы. Прежде чем исследовать (в) докажем одну лемму, конструкция которой ранее была использована Багемилем и Зейделем (см., например [6], стр. 214).

Лемма 2. *Пусть g — непрерывная функция на D_1 и $r_n \uparrow 1$, $r_n > 1/2$. Тогда существует в D_1 аналитическая функция f такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Gamma_{r_n}} |f(z) - g(z)| = 0,$$

где $\hat{\Gamma}_{r_n} = \hat{\Gamma}_{r_n}(t_0) = \Gamma_{r_n} \setminus \Omega(t_0)$, $t_0 = e^{ix_0}$ — фиксированная точка.

Доказательство. Положим $F_n = \bar{D}_{r_n} \cup \hat{\Gamma}_{r_{n+1}}$ ($\bar{A}$ — замыкание A). Очевидно, что F_n — *ограниченное замкнутое множество и дополнение $CF_n = D \setminus F_n$* — будет связанное множество. Определим непрерывную функцию φ_1 на F_1 условием: $\varphi_1(z) = 0$, когда $z \in \bar{D}_{r_1}$ и $\varphi_1(z) = g(z)$, когда $z \in \hat{\Gamma}_{r_2}$, где g — функция, заданная в условие леммы. Функция φ_1 — регулярна во всех внутренних точках из F_1 и непрерывна на целом множестве F_1. Тогда согласно теореме С. Н. Мергеляна (см. [7]) для 1 существует полином P_1, такой, что для $z \in F_1$

$$|P_1(z) - \varphi_1(z)| < 1.$$

Предположим, что построены функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ и полиномы $P_1, \ldots, P_{n-1}$ так, что $\varphi_{n-1}(z) = g(z)$ когда $z \in \Gamma_{r_n}$ и для $z \in F_{n-1}$

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} P_i(z) - \varphi_{n-1}(z)\right| \leqslant 1/2^{n-1}.$$

Следовательно, для $z \in \hat{\Gamma}_{r_n}$

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1} P_j(z) - g(z)\right| < 1/2^{n-1}. \tag{3.8}$$

Положим $\varphi_n(z) = \sum_{j=1}^{n-1} P_j(z)$, когда $z \in \bar{D}_{r_n}$, и $\varphi_n(z) = g(z)$ когда $z \in \hat{\Gamma}_{r_{n+1}}$. Функция φ_n регулярна на внутренних точках F_n и непрерывна на целом F_n. Тогда в силу упомянутой теоремы С. Н. Мергеляна для $1/2^n$ существует полином P_n такой, что

$$(3.9)\qquad \Big|\sum_{i=1}^{n} P_i(z)-\varphi_n(z)\Big| < 1/2^n, \qquad z\in F_n.$$

Продолжая указанный процесс получим последовательность полиномов $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$. На основании определения функции φ_n и полинома P_n имеем

$$(3.10)\qquad |P_{n+j}(z)| < 1/2^{n+j}, \qquad z\in \bar D_{z_n},\ j>0.$$

Следовательно, ряд $\sum_{1}^{\infty} P_n(z)$ равномерно сходится внутри D_1. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) = f(z)$. Очевидно, что f аналитическая функция в D_1. Пусть $z\in \hat\Gamma_{r_n}$. Тогда в силу (3.9) и (3.10) имеем

$$|f(z)-g(z)| \leqslant \Big|\sum_{i=1}^{n-1} P_i(z)-g(z)\Big| + \Big|\sum_{j=n}^{\infty} P_j(z)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant 1/2^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} 1/2^k = \sum_{k=n-1}^{\infty} 1/2^k.$$

Отсюда непосредственно следует справедливость леммы.

Пусть $t_1 = e^{ix_1}$, $x_1 \neq x_0$ где x_0 точка использованная в конструкции леммы 2. При этом x_1 подберем так, что $\Omega_{\frac12}(t_1)\cap\Omega_{\frac12}(t_0) = D_{\frac12}$. Теперь в D_1 построим непрерывную функцию следующим образом. Для $k=1,\dots,\infty$ и $z\in\Gamma_{r_k}\setminus\Omega_{\frac12}(t_1)\setminus\Omega_{\frac12}(t_0)$ положим $g(z)=(-1)^k$, где $r_k\uparrow 1$, $k\to\infty$. Если же $z\in\Gamma_{r_k}\cap\Omega_{\frac12}(t_1)$, то g определим непрерывно так, чтобы площадь ограниченная графиком функции $|g|^\delta$, $\delta>0$ и дугой $\Gamma_{r_n}\cap\Omega_{\frac12}(t_1)$ была больше, чем $(1-r_n)^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$. Далее функция g непрерывно определяется в $\bar D_{r_n}$ и продолжая этот процесс мы определим g в D_1 так, что внутри D_1 она будет непрерывной. Теперь на основании леммы 2 в D_1 существует аналитическая функция f такая, что

$$(3.11)\qquad \lim_{n\to\infty}\ \sup_{z\in\hat\Gamma_{r_n}(t_0)} |f(z)-g(z)| = \lim_{n\to\infty}\gamma_n(z) = 0.$$

Отсюда и из определения функции g вытекает, что функция f почти всюду на Γ_1 не имеет радиальные пределы. Далее, если $x\neq x_1$, $x\neq x_0$, то в силу (3.11) и свойства функции g имеем

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}\left|\frac1h\int_0^h |f(r_ne^{i(x+u)})|^\delta du\right| \leqslant \lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}\left|\frac1h\int_0^h |\gamma_n(re^{i(x+u)})|^\delta du\right| +$$

$$+\lim_{\substack{n\to 0\\ h\to\infty}}\left|\frac1h\int_0^h |g(r_ne^{i(x+u)})|^\delta du\right| \leqslant 1.$$

Следовательно для функции f условие (а) выполнено. С другой стороны на основании (3.11) при $n > N$ получим

$$\int_0^{2\pi} |f(r_n e^{ix})|^\delta dx \geqslant \int_{\hat{\Gamma}_{r_n}(t_0)} |f(t)|^\delta |dt| \geqslant \int_{\hat{\Gamma}_r(t_0)} |g(t)|^\delta |dt| - \int_{\hat{\Gamma}_{r_n}(t_0)} |\gamma_n(t)|^\delta |dt| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(1-r_n)^{1+\varepsilon}} - \int_{\hat{\Gamma}_{r_n}(t_0)} |\gamma_n(t)|^\delta |dt| \geqslant \frac{1}{(1-r_n)^{1+\varepsilon}},$$

то есть для функции f условие (в) не выполнено. Аналогично можно показать, что условие (а) или (в) нельзя ослабить в определении класса GN.

4. Некторые обобщения. В этом пункте приведем различные естественные обобщения выше рассмотренных классов.

Пусть $\chi(u) \geqslant 0$ для $u \geqslant 0$, $\chi(0) = 0$, $\chi(u) \uparrow \infty$ при $u \to \infty$, кроме того, для любой аналитической функции суперпозиция $\chi(|f(z)|) = \chi_f(z)$ является субгармонической в D_1.

Определение 2. *Обозначим через $GN_\chi(gN_\chi)$ класс аналитических функций f (гармонических функций v) в D_1 для которых субгармоническая функция $\chi_f(\chi_v)$ удовлетворяет условиям* (а) *и* (в).

Опираясь на предыдущие рассуждения можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть аналитическая функция $f \in GN_\chi$ в D_1. Тогда почти всюду на Γ_1 функция f имеет угловые пределы.*

Теорема 3'. *Пусть гармоническая функция $v \in gN_\chi$ в D_1. Тогда почти всюду на Γ_1, функция v имеет угловые пределы.*

Литература

[1] A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. 1, Cambridge 1959.
[2] —, *Trigonometric series*, v. 2, Cambridge 1959.
[3] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, М.-Л., 1950.
[4] И. А. Джваршейшвили, *О граничных свойствах аналитических функций*, сообщ. АН ГССР, 87, № 1 (1977), стр. 17—20.
[5] A. N. Kolmogorov, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fund. Math. 7 (1925).
[6] Э. Коллингвуд и А. Ловатер, *Теория предельных множеств*, „Мир", М. (1971).
[7] С. Н. Мергелян, *Равномерное приближение функций комплексного*, Успехи матем. н. 7, № 2 (48) (1952), стр. 31—122.

Reçu par la Rédaction le 21. 12. 1978