ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVIII (1980)

Une remarque sur le théorème de Jürgen Witte sur l'unicité de la solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Résumé. Dans le cas où $f(t, x)$ est une fonction continue dans $\{(t, x): 0 \leqslant t \leqslant a, |x| \leqslant r\}$ et $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant \omega(t, |x_1 - x_2|)$ pour $0 < t \leqslant a$, où $\omega(t, u)$ est continue pour $0 < t \leqslant a$, la condition suffisante et nécessaire d'unicité de la solution de l'équation (1) $x'(t) = f(t, x(t))$ avec la condition (2) $x(0) = y_0$, $|y_0| \leqslant r$ est l'existence pour chaque couple de solutions $\{x(t), \bar{x}(t)\}$ de l'équation (1) avec la condition (2) d'une fonction $\varrho(t, x(\cdot), \bar{x}(\cdot))$ telle que $\varrho(0, x(\cdot), \bar{x}(\cdot)) = 0$ et $|f(t, x(t)) - f(t, x(t))| \leqslant \omega(t, \varphi(t, t_0), \varrho(t, x, \bar{x}))$ où $\varphi(t, t_0, \xi)$ est la solution de l'équation $u' = \omega(t, u)$ satisfaisante à la condition $\varphi(t_0, t_0, \xi) = \xi$. Dans le cas où $\omega(t, u) = a(t)u$ et $\varrho(t, x(\cdot), x(\cdot))$ ne dépend pas de $(x(\cdot), \bar{x}(\cdot))$ on obtient $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant a(t)\varrho(t)\exp\int_{t_0}^{t} a(s)ds$. Dans le cas envisagé par Jürgen Witte $|f(t, x)| \leqslant a(t)\varrho(t)\exp\int_{t_0}^{t} a(s)ds$, $y_0 = 0$.

Envisageons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

où la fonction $f(x, y)$ est continue dans l'ensemble $D = (0, 1] \times [-a, a]$. Jürgen Witte a démontré dans [2] l'unicité de la solution $y(x)$ de l'équation (1) telle que

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0 \tag{2}$$

dans le cas où sont satisfaites les conditions suivantes:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant h(x)|y_1 - y_2| \tag{3}$$

et il existe $\varrho(x)$ continue dans $[0, 1]$, $\varrho(0) = 0$ telle que

$$|f(x, y)| \leqslant \varrho(x)h(x)\left[\exp\int_{1}^{x} h(s)ds\right] \quad \text{pour } |y| \leqslant a,\ 0 < x \leqslant 1, \tag{4}$$

$h(x)$ étant une fonction continue dans $(0, 1]$.

Dans la présente note nous allons démontrer un théorème plus général. Du théorème 1 et de la remarque 1 on obtient immédiatement la condition nécessaire et suffisante d'unicité des solutions de l'équation (1) avec la condition (2).

1. Hypothèses H.

1° La fonction $\omega(x, u)$ est continue pour $(x, u) \in \Omega = (0, 1] \times \times [0, \infty)$ croissante par rapport à u, $\omega(x, 0) \equiv 0$.

2° $\eta(x, x_0, c)$ est la solution minimale de l'équation

$$u' = \omega(x, u) \tag{1.1}$$

telle que

$$\eta(x_0, x_0, c) = c. \tag{1.2}$$

3° La fonction $g(x, y)$ est continue dans l'ensemble $D = (0, 1] \times \times [0, a]$ et on a

$$g(x, y) \leqslant \omega(x, y). \tag{1.3}$$

4° Pour chaque solution $y(x)$ de l'équation

$$y' = g(x, y) \tag{1.4}$$

définie dans $(0, x_0]$ $(x_0 \in (0, 1])$ telle que

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0 \tag{1.5}$$

il existe une fonction $\varrho(x, y(\cdot)) \geqslant 0$ continue dans $[0, 1]$

$$\varrho(0, y(\cdot)) = 0 \tag{1.6}$$

et un nombre δ, $0 < \delta \leqslant 1$, tel que

$$g(x, y(x)) < \omega\Big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x, y(\cdot))\big)\Big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta, \tag{1.7}$$

Théorème 1. *Les hypothèses* H *étant admises, chaque solution de l'équation* (1.4) *définie dans l'intervalle* $(0, a)$ (*où* $0 < a < 1$), *telle que* $\lim_{x \to 0} y(x) = 0$, *est égal à zéro dans tout l'intervalle* $0 < x < a$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une solution $y_1(x)$ de l'équation (1.4) définie dans $(0, a]$ $(0 < a < 1)$ telle que $y_1(x) \not\equiv 0$ et

$$\lim_{x \to 0} y_1(x) = 0. \tag{1.8}$$

Il existe donc $\xi_0 \in (0, a]$ tel que

$$c_0 = y_1(\xi_0) > 0. \tag{1.9}$$

En vertu de (1.3) on a

$$y_1'(x) \leqslant \omega\big(x, y_1(x)\big)$$

pour $x \in (0, \xi_0]$ tel que $y_1(x) \geqslant 0$, et par suite

$$y_1(x) \geqslant \eta(x, \xi_0, c_0) \geqslant 0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \xi_0. \tag{1.10}$$

De l'hypothèse 4° il résulte qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$y_1'(x) < \omega\Big(x, \eta\big(x, \xi_0, \varrho(x, y_1(\cdot))\big)\Big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0. \tag{1.11}$$

Envisageons $\varepsilon \in (0, c_0)$. Il existe $T \in (0, \delta_0)$ tel que

$$0 \leqslant \varrho\big(x, y_1(\cdot)\big) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T.$$

$\eta(x, \xi_0, \zeta)$ étant croissante par rapport à ζ on a

$$\eta\big(x, \xi_0, \varrho(x, y_1(\cdot))\big) \leqslant \eta(x, \xi_0, \varepsilon) \leqslant \eta(x, \xi_0, c_0) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T. \tag{1.12}$$

Dans la suite nous allons démontrer qu'il existe $x_0 \in (0, T]$ tel que

$$\eta_0 = y_1(x_0) - \eta(x_0, \xi_0, \varepsilon) > 0. \tag{1.13}$$

De l'inégalité (1.10) et (1.12) il découle que pour chaque $x \in (0, T]$ on a

$$y_1(x) - \eta(x, \xi_0, \varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T.$$

Supposons que

$$y_1(x) - \eta(x, \xi_0, \varepsilon) \equiv 0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T.$$

On a donc

$$y_1'(x) \equiv \eta'(x, \xi_0, \varepsilon) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T$$

et par suite

$$\omega\big(x, \eta(x, \xi_0, \varepsilon)\big) \equiv g\big(x, y_1(x)\big)$$

d'où, en vertu de (1.11), il vient

$$\omega\big(x, \eta(x, \xi_0, \varepsilon)\big) < \omega\Big(x, \eta\big(x, \xi_0, \varrho(x, y_1(\cdot))\big)\Big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T$$

mais, en vertu de (1.12), $\omega(x, u)$ étant croissante, on obtient

$$\omega\big(x, \eta(x, \xi_0, \varepsilon)\big) < \omega\big(x, \eta(x, \xi_0, \varepsilon)\big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant T,$$

ce qui est impossible et ainsi nous avons démontré qu'il existe $x_0 \in (0, T]$ tel que η_0 défini par (1.13) est positif,

$$\eta_0 > 0.$$

Dans l'intervalle $(0, T]$ on a

$$y_1'(x) < \omega\Big(x, \eta\big(x, \xi_0, \varrho(x, y_1(\cdot))\big)\Big) \leqslant \omega\big(x, \eta(x, \xi_0, \varepsilon)\big)$$

et par suite

$$y_1(x) \geqslant \eta(x, \xi_0, \varepsilon) + y_1(x_0) - \eta(x_0, \xi_0, \varepsilon) = \eta(x, \xi_0, \varepsilon) + \eta_0 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant x_0$$

c'est-à-dire

$$y_1(x) \geqslant \eta_0 > 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_0$$

donc

$$0 = \lim_{x \to 0} y_1(x) \geqslant \eta_0 > 0.$$

Nous avons ainsi démontré que $y_1(x) = 0$ dans $0 < x \leqslant 1$.

2. Remarque 1. Dans le cas où $g(x, y)$ est continue dans D l'hypothèses H est la condition nécessaire d'unicité de la solution $y(x)$ de l'équation (1.4) satisfaisant à (1.5). C'est-à-dire que si $y(x) = 0$ est la solution unique de l'équation (1.4) satisfaisant à la condition (1.5), il s'ensuit qu'il existe une fonction $\omega(x, u)$ continue dans Ω par rapport à (x, u) et de classe C^1 par rapport à u, croissante par rapport à u et telle qu'il existe $\varrho(x)$ continue dans $[0, 1]$, $\varrho(x) > 0$ pour $x \in (0, 1]$, $\varrho(0) = 0$ et telle que

$$0 = g(x, 0) < \omega\big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x, 0)\big)\big)$$

pour chaque $x_0 \in (0, 1]$. Il suffit de prendre pour $\omega(x, u)$ une fonction croissante par rapport à u, continue par rapport à (x, u), de classe C^1 par rapport à u et telle que

$$\omega(x, u) \geqslant u + \max_{0 \leqslant s \leqslant u} |g(x, s)|.$$

On vérifie facilement qu'une telle fonction existe. Envisageons $\varrho(x)$ quelconque continue dans $[0, 1]$ et telle que $\varrho(0) = 0 < \varrho(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. De l'unicité des solutions de l'équation

$$\eta' = \omega(x, \eta)$$

il résulte que $\eta\big(x, x_0, \varrho(x)\big) > 0$ pour $0 < x \leqslant 1$ et par suite

$$\omega\big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x)\big)\big) > 0 = g\big(x, y(x)\big) = g(x, 0)$$

pour $0 < x \leqslant 1$.

3. Remarque 2. Dans les hypothèses H l'inégalité (1.7) ne peut être remplacée par l'inégalité faible. On peut construire un simple exemple d'équation (1.4) satisfaisant aux hypothèses H, avec inégalité faible au lieu de l'inégalité (1.7), et tel qu'il existe une solution $y(x) \not\equiv 0$ telle que $\lim_{x \to 0} y(x) = 0$. Il suffit d'envisager l'équation suivant:

EXEMPLE 1. Envisageons l'équation (1.4) avec la fonction $g(x, y)$ définie par les relations suivantes

$$g(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{pour } y \geqslant x^2,\ 0 < x \leqslant 1, \\ 2[x - \sqrt{x^2 - y}] & \text{pour } 0 \leqslant y \leqslant x^2. \end{cases}$$

Posons par définition $\omega(x, y) = g(x, y)$ pour $y \geqslant 0$. La fonction (x, y) ainsi définie est croissante par rapport à y et continue par rapport à (x, y) pour $0 < x \leqslant 1$, $y \geqslant 0$. Pour (x_0, y_0) tel que $x_0^2 \leqslant y_0$ on a

$$\eta(x, x_0, y_0) = x^2 - x_0^2 + y_0$$

et par suite $\lim\limits_{x \to 0} \eta(x, x_0, y_0) = y_0 - x_0^2$ pour $y_0 \geqslant x_0^2$. Pour $0 \leqslant y_0 < x_0^2$ on a

$$y' = 2x - 2\sqrt{x^2 - y} \quad \text{pour } x \text{ tel que } y \leqslant x^2$$

et par suite

$$\frac{y' - 2x}{2\sqrt{x^2 - y}} = -1 \quad \text{pour } y \leqslant x^2$$

d'où on obtient

$$y(x) = 2(x_0 - \sqrt{x_0^2 - y_0})(x - x_0) + y_0 \quad \text{pour } x_0 \geqslant x \geqslant x_0 - \sqrt{x_0^2 - y_0}$$

et par suite

$$\eta(x, x_0, c) = \begin{cases} 2(x_0 - \sqrt{x_0^2 - c})(x - x_0) + c & \text{pour } x_0 - \sqrt{x_0^2 - c} \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 & \text{pour } 0 < x \leqslant x_0 - \sqrt{x_0^2 - c}, \end{cases}$$

c'est-à-dire $\eta(x, x_0, c) \to 0$ pour $x \to 0$ pour $c \leqslant x_0^2$. Chaque solution de l'équation (1.4) telle que $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$, $y(x) \not\equiv 0$ est de la forme

$$y(x) = \eta(x, x_0, c_0) \quad \text{où } 0 < c_0 \leqslant x_0^2$$

et

$$y'(x) = 2x \quad \text{pour } 0 < x \leqslant x_0 - \sqrt{x_0^2 - c_0} = \delta_0.$$

Posons

$$\varrho\big(x, y(\cdot)\big) = \begin{cases} x_0^2 - (x - x_0)^2 & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \delta_0, \\ c_0 & \text{pour } \delta_0 \leqslant x \leqslant x_0. \end{cases}$$

On a

$$\eta\Big(x, x_0, \varrho\big(x, y(\cdot)\big)\Big) = \eta(x, x_0, c_0) \quad \text{pour } \delta_0 \leqslant x \leqslant x_0.$$

Pour $0 < x \leqslant \delta_0$ on a

$$x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varrho\big(x, y(\cdot)\big)} \equiv x_0 - \sqrt{x_0^2 - x_0^2 + (x - x_0)^2} = x$$

et par suite

$$\eta\Big(x, x_0, \varrho\big(x, y(\cdot)\big)\Big) = x^2$$

d'où il vient

$$\omega\Big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x, y(\cdot))\big)\Big) = 2x = y'(x) \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0,$$

$$\lim_{x\to 0} \varrho(x, y(\cdot)) = \lim_{x\to 0} [x_0^2 - (x - x_0)^2] = 0.$$

4. Remarque 3. Dans le cas où il y a unicité des solutions de l'équation (1.1) pour $0 < x \leqslant 1$, $u \geqslant 0$ on peut remplacer l'inégalité (1.7) par l'inégalité faible

$$(1.7') \qquad g(x, y(x)) \leqslant \omega\Big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x, y(\cdot))\big)\Big) \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta_0.$$

Dans le cas envisagé

$$0 < \eta(x_0, \xi_0, \varepsilon) < \eta(x_0, \xi_0, c_0) \leqslant y_1(x_0),$$

donc $\eta_0 > 0$ pour chaque $x_0 \in (0, \xi_0]$, et par suite la démonstration du théorème en question est plus simple que dans le cas envisagé dans le théorème 1.

5. Exemple 2. (Application du théorème 1). Envisageons l'équation (1.4)

$$y' = g(x, y)$$

où la fonction $g(x, y)$ satisfait aux hypothèses suivantes:

Hypothèses H_0. $g(x, y)$ est continue dans D et croissante par rapport à y

$$(5.1) \qquad 0 \leqslant g(x, y) \leqslant h(x) y^2 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant 1,\ y^2 \leqslant a^2.$$

Pour chaque $x_0 \in (0, 1]$ il existe $T \in (0, x_0)$ tel que

$$(5.2) \qquad g(x, a) < \frac{h(x)}{\big[2 \int_x^{x_0} h(s)\,ds\big]^2} \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant T.$$

Théorème 1_0. *Les hypothèses* H_0 *étant admises, la fonction* $\psi(x) \equiv 0$ *est la solution unique de l'équation* (1.4) *telle que* $\lim_{x\to 0} \psi(x) = 0$.

Démonstration. Dans le cas envisagé on a

$$(5.3) \qquad \omega(x, u) = h(x) u^2 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant 1,$$

$$(5.4) \qquad \eta(x, x_0, c) = \frac{c}{1 - c \int_{x_0}^{x} h(s)\,ds} \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_0.$$

Supposons que $y(x)$ est une solution de (1.4) telle que $0 < y(x_0) = y_0 \leqslant a$ et que

$$(5.5) \qquad \lim_{x\to 0} y(x) = 0.$$

Posons $\varrho(x) = \max\big(x, 2y(x)\big)$. De l'hypothèses (5.1) il résulte que

$$\varrho(x) \geqslant 2y(x) \geqslant 2\sqrt{\frac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}} \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_0.$$

Mais, en vertu de (5.2), $g(x, y)$ étant croissante, on a

$$\sqrt{\frac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}} \leqslant \sqrt{\frac{g(x, a)}{h(x)}} < \frac{1}{2\int_x^{x_0} h(s)\,ds} \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant T < T_0$$

et par suite

$$1 - \int_x^{x_0} h(s)\,ds \sqrt{\frac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}} > \tfrac{1}{2}$$

d'où on obtient d'abord

$$2\sqrt{\frac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}} \geqslant \frac{\sqrt{\dfrac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}}}{1 - \int_x^{x_0} h(s)\,ds \sqrt{\dfrac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}}}$$

puis

$$\varrho(x) > \frac{\sqrt{\dfrac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}}}{1 - \int_{x_0}^{x} h(s)\,ds \sqrt{\dfrac{g\big(x, y(x)\big)}{h(x)}}} \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant T.$$

Par conséquent

$$g\big(x, y(x)\big) < \left[\frac{\varrho(x)}{1 + \varrho(x)\int_x^{x_0} h(s)\,ds}\right]^2 \cdot h(x) \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant T.$$

En vertu de (5.1) et (5.4) on a donc

$$g\big(x, y(x)\big) < \omega\Big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x)\big)\Big).$$

De la définition de $\varrho(x)$ et de l'hypothès (5.5) il résulte que $\lim\limits_{x \to 0} \varrho(x) = 0$. Les hypothèses H du théorème 1 sont donc satisfaites et par suite $y(x) \equiv 0$ pour $0 < x \leqslant x_0$.

Il est évident que la croissance de $g(x, y)$ n'est pas nécessaire. Il suffit de remplacer (5.2) par

$$|g(x, y)| < \frac{h(x)}{\left[\int_x^{x_0} h(s)\,ds\right]^2} \qquad \text{pour } |y| \leqslant a,\ 0 < x \leqslant T < x_0$$

et (5.1) par $|g(x, y)| \leqslant h(x) y^2$.

6. Envisageons l'équation

$$y' = f(x, y) \tag{6.1}$$

où la fonction $f(x, y)$ satisfait aux hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES $\overline{\mathrm{H}}$. 1° La fonction $f(x, y)$ est continue dans l'ensemble

$$\tilde{D} = \{(x, y)\colon\, x \in (0, 1],\ |y - y_0| \leqslant \bar{a}\} \qquad (\bar{a} > 0).$$

2° La fonction $\tilde{\omega}(x, u)$ est continue par rapport à (x, u) pour $0 < x \leqslant 1$, $u \geqslant 0$, $\tilde{\omega}(x, u)$ croissante par rapport à u, $\tilde{\omega}(x, 0) = 0$.

3° $\tilde{\eta}(x, x_0, c)$ est la solution minimale de l'équation

$$u' = \tilde{\omega}(x, u) \tag{6.2}$$

telle que $\tilde{\eta}(x_0, x_0, c) = c$ pour $x_0 \in (0, 1]$, $c \geqslant 0$.

4° La condition suivante est satisfaite:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \tilde{\omega}(x, |y_1 - y_2|) \qquad \text{pour } (x, y_1),\ (x, y_2) \in \tilde{D}. \tag{6.3}$$

5° Pour chaque $a \in (0, 1]$ et chaque couple de solutions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ de l'équation (6.1) définies dans l'intervalle $(0, a]$ et telles que

$$\lim_{x\to 0} \varphi_1(x) = \lim_{x\to 0} \varphi_2(x) = y_0 \tag{6.4}$$

il existe $\bar{\delta}$, $0 < \bar{\delta} \leqslant a$ et une fonction $\varrho(x, \varphi_1, \varphi_2)$, continue pour $0 < x \leqslant \bar{\delta}$ $\varrho(0, \varphi_1, \varphi_2) = 0$, telle que

$$\big|f\big(x, \varphi_1(x)\big) - f\big(x, \varphi_2(x)\big)\big| \leqslant \tilde{\omega}\Big(x, \tilde{\eta}\big(x, a, \varrho(x, \varphi_1, \varphi_2)\big)\Big) \tag{6.5}$$
$$\text{pour } 0 < x \leqslant \bar{\delta}.$$

THÉORÈME 2. *Les hypothèses $\overline{\mathrm{H}}$ étant admises, il existe a_0, $0 < a_0 \leqslant 1$, let que dans l'intervalle $(0, a_0]$ il n'existe qu'une solution $\varphi(x)$ de l'équation* (6.1) *satisfaisant à la condition*

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = y_0. \tag{6.6}$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une solution $\varphi(x)$ de l'équation (6.1) satisfaisant à (6.6) et définie dans l'intervalle $(0, a]$. Il existe donc $\bar{a}_0$, $0 < \bar{a}_0 \leqslant \bar{a}$ tel que

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant \bar{a}/2 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant \bar{a}_0, \tag{6.7}$$

Supposons qu'il existe encore une solution $\psi(x)$ de l'équation (6.1) satisfaisant à (6.6) et définie dans un intervalle $(0, \beta]$, $0 < \beta \leqslant \bar{a}_0$. Posons par définition

$$\varphi_1(x) = \min\big(\psi(x), \varphi(x)\big) \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant \beta,$$
$$\varphi_2(x) = \max\big(\psi(x), \varphi(x)\big) \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant \beta.$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$ satisfont à l'équation (6.1) et à (6.6). On a de plus

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \beta.$$

Désignons par τ le plus grand s tel que

$$|\varphi_i(x) - y_0| \leqslant \bar{a}/2 \quad \text{pour } 0 < x \leqslant s.$$

Nous allons démontrer que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ dans $(0, \tau]$ d'où il résultera que

$$|\varphi_i(\tau) - y_0| = |\varphi(\tau) - y_0| \leqslant \bar{a}/2$$

et par suite $\tau = \beta$.

Envisageons la fonction $Y(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x)$. Elle satisfait à l'équation

$$Y' = f\big(x, Y + \varphi_1(x)\big) - f\big(x, \varphi_1(x)\big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \tau.$$

Posons par définition

$$g(x, Y) = \begin{cases} f\big(x, Y + \varphi_1(x)\big) - f\big(x, \varphi_1(x)\big) & \text{pour } 0 < Y \leqslant \bar{a}/2,\ 0 < x \leqslant \tau, \\ f\big(\tau, Y + \varphi_1(\tau)\big) - f\big(\tau, \varphi_1(\tau)\big) & \text{pour } 0 < Y \leqslant \bar{a}/2,\ x \in (\tau, 1]. \end{cases}$$

On vérfie facilement que l'équation

$$Y' = g(x, Y) \tag{6.8}$$

satisfait à l'hypothèses H du théorème 1 avec $a = \bar{a}/2$ et

$$\omega(x, u) = \begin{cases} \tilde{\omega}(x, u) & \text{pour } 0 < x \leqslant \tau, \\ \tilde{\omega}(\tau, u) & \text{pour } \tau \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\delta = \min(\tau, \bar{\delta})$$

et par suite chaque solution $Y(x) \geqslant 0$ de l'équation (6.8) telle que $\lim\limits_{x\to 0} Y(x) = 0$ est égale à zéro dans l'intervalle $0 < x \leqslant 1$, d'où il vient

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \tau.$$

Le théorème 2 est ainsi démontré (avec $a_0 = \tau$).

7. En vertu de la remarque 3 on obtient une modification du théorème 2 en remplaçant les hypothèses $\bar{\mathbf{H}}$ par les suivantes:

HYPOTHÈSES $\bar{\bar{\mathrm{H}}}$. 1° La fonction $f(x, y)$ est continue dans $\tilde{D}$.

2° Il existe une fonction $\tilde{\omega}(x, u)$ continue dans l'ensemble $(0, 1] \times \times [0, \infty)$, $\tilde{\omega}(x, u)$ croissante par rapport à u, $\tilde{\omega}(x, 0) = 0$.

3° Par chaque point $(x_0, c) \in (0, 1] \times [0, \infty)$ il passe une solution unique $\tilde{\eta}(x, x_0, c)$ de l'équation (4.2) (telle que $\eta(x_0, x_0, c) = c$).

4° L'inégalité (6.3) est satisfaite.

5° Pour chaque $a \in (0, 1]$ est chaque couple $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ de solutions de l'équation (6.1), définies dans $(0, a]$ et telles qu'on a (6.4), il existe δ, $0 < \delta \leqslant a$ et une fonction $\varrho(x, \varphi_1, \varphi_2)$ continue (par rapport à x)

pour $0 < x \leqslant a$, $\varrho(0, \varphi_1, \varphi_2) = 0$ telle que

$$|f(x, \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_2(x))| \leqslant \tilde{\omega}\big(x, \eta(x, a, \varrho(x, \varphi_1, \varphi_2))\big),$$

pour $0 < x \leqslant \delta$.

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* $\bar{\bar{\mathrm{H}}}$ *étant admises, il y a unicité des solutions de l'équation* (6.1) *satisfaisant à la condition*

$$\lim_{x \to 0} y(x) = y_0.$$

7. Remarque 4. Pour $y_0 = 0$ la condition (6.5) est satisfaite, par exemple dans le cas où pour chaque solution $y(x)$ satisfaisant à la condition $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$ on a

$$|f(x, y(x))| \leqslant \tilde{\omega}\Big(x, \eta\big(x, \varrho(x, y(\cdot))\big)\Big)$$

où $\varrho(x, y(\cdot)) \to 0$ pour $x \to 0$ et $\tilde{\omega}(x, \tilde{\eta}(x, c_1)) + \tilde{\omega}(x, \tilde{\eta}(x, c_2)) \leqslant \tilde{\omega}(x, \tilde{\eta}(x, c_1 + c_2))$, $\tilde{\eta}(x, c)$ est la solution de l'équation

$$y' = \tilde{\omega}(x, y)$$

telle que $\eta(1, c) = c$. Par example pour

$$\tilde{\omega}(x, y) = k(x) y, \qquad k(x) \geqslant 0,$$

on a $\tilde{\eta}(x, c) = c \exp \int\limits_1^x k(t)\,dt$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(x, \tilde{\eta}(x, c_1)) + \tilde{\omega}(x, \tilde{\eta}(x, c_2)) &= k(x)(c_1 + c_2) \exp \int_1^x k(t)\,dt \\ &= \tilde{\omega}(x, \tilde{\eta}(x, c_1 + c_2))\end{aligned}$$

et, par suite, le cas envisagé par Jürgen Witte est un cas particulier du théorème 2.

8. Remarque 5. Dans le cas où $g(x, y)$ est continue dans $D = [0, 1] \times [0, a]$ on obtient du théorème 1 l'unicité de la solution $y(x)$ satisfaisant à la condition $y(0) = 0$, par exemple si $\omega(x, u)$ est continue dans l'ensemble $\Lambda = (0, 1] \times [0, a]$ par rapport à (x, u), de classe C^1 par rapport à u, croissante par rapport à u, et telle que pour chaque solution $u(x)$ de l'équation (1.1) telle que

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x)}{x} = 0 \tag{8.1}$$

on a $u(x) = 0$ dans $[0, 1]$.

Pour appliquer le théorème 1 il suffit de démontrer que pour chaque solution $y(x)$ telle que $y(0) = 0$, définie dans $[0, x_0]$ il existe une fonction $\varrho(x, y(\cdot))$ continue dans $[0, x_0]$ telle que $\varrho(0, y(\cdot)) = 0$ et satisfaisant à (1.7). Envisageons une solution quelconque $y(x)$ de l'équation (1.4) telle que $y(0) = 0$ et posons par définition

$$\varrho(x, y(\cdot)) = \eta(x_0, x, y(x)) \qquad \text{pour } x \leqslant x_0.$$

On a donc

$$\eta\big(x, x_0, \varrho(x, y(\cdot))\big) = \eta\big(x, x_0, \eta(x_0, x, y(x))\big) = y(x),$$

$$g(x, y(x)) = g\Big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x, y(\cdot))\big)\Big)$$

$$\leqslant \omega\Big(x, \eta\big(x, x_0, \varrho(x, y(\cdot))\big)\Big) \qquad \text{pour } x \leqslant x_0.$$

Il reste à prouer que $\varrho(x, y(\cdot)) \to 0$ pour $x \to 0$. Supposons que $\varrho(x, y) \nrightarrow 0$ pour $x \to 0$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $x_v \to 0$, $x_v \in (0, x_0]$ et une constante $c_0 > 0$ telles que

$$\varrho(x_v, y(\cdot)) \geqslant c_0 > 0.$$

De la définition de $\varrho(x, y(\cdot))$ on tire donc

$$\eta(x_0, x_v, y(x_v)) = c_v \geqslant c_0 > 0, \qquad y(x_v) = \eta(x_v, x_0, c_v).$$

On a

$$y'(x) \leqslant \omega(x, y(x)) \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_0$$

et par suite

$$y(x) \geqslant \eta(x, x_0, c_v) > 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_v$$

d'où

$$y(x) \geqslant \eta(x, x_0, c_0) > 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_v$$

et

$$\frac{y(x)}{x} \geqslant \frac{\eta(x, x_0, c_0)}{x} > 0 \qquad \text{pour } 0 < x \leqslant x_v,$$

$y(x)$ étant une solution de (1. 4) dans $[0, x_0]$, il existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to 0} y(x) = 0$$

d'où il vient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta(x, x_0, c_0)}{x} = \lim_{x\to 0} \eta(x, x_0, c_0) = 0.$$

Mais nous avons supposé que l'unique solution de (1.1) satisfaisant à (8.1) est la solution banalle $u(x) = 0$, d'où il vient

$$0 < c_0 = \eta(x_0, x_0, c_0) = 0$$

ce qui est impossible. On a donc pour chaque suite $x_v \to 0$ $\varrho(x_v, y(\cdot)) \to 0$ et on peut appliquer le théorème 1 avec la remarque 4.

9. **Remarque 6.** Dans notre théorème 2 la fonction $\omega(x, u)$ peut être quelconque pour $0 < x \leqslant 1$, $u \geqslant 0$, telle que $\omega(x, 0) = 0$, $\omega(x, u) \geqslant 0$ de classe C^1 par rapport à u, continue par rapport à (x, u). L'hypothèses que chaque solution $u(x)$ de l'équation (1.1) telle que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{u(x)}{x} = 0$ est égale à zéro n'est pas nécessaire pour l'unicité des solutions de l'équation (6.1) avec la condition (6.6). Mais il peut arriver qu'il n'existe aucune solution de l'équation (6.1) satisfaisant à (6.6).

Exemple 3. Envisageons l'équation

$$y' = -\frac{1}{x^2}y - \frac{1}{x^2}e^{2/x} \quad \text{pour } 0 < x \leqslant 1. \tag{9.1}$$

Chaque solution de l'équation (9.1) est de la forme

$$y(x) = e^{1/x}(ce^{-1} - e + e^{1/x}) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant 1$$

et par suite $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \infty$. C'est-à-dire qu'il n'existe pas de solution de l'équation (9.1) satisfaisant à (6.6). La condition (6.5) est donc satisfaite pour chaque couple φ_1, φ_2 satisfaisant à (6.6). Dans le cas envisagé on a

$$\omega(x, u) = \frac{1}{x^2}u$$

et par suite

$$\eta(x, x_0, c) = c\exp(-1/x + 1/x_0).$$

On a donc

$$\lim_{x\to 0}\eta(x, x_0, c) = \lim_{x\to 0}\frac{\eta(x, x_0, c)}{x} = 0.$$

Dans le cas envisagé les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites tandis que celles du théorème de Kamke sur l'unicité des solutions ne le sont pas. L'exemple 3 démontre que les hypothèses H ne sont pas suffisantes pour l'existence d'une solution $\varphi(x)$ de l'équation (6.1) satisfaisant à (6.6).

10. **Remarque 7.** Il est évident que dans le cas où $f(x, y)$ ne peut être prolongée d'une manière continue sur $x = 0$, $|y| \leqslant a$, la condition que $f(x, y)$ soit continue pour $0 < x \leqslant \delta$, $|y| \leqslant a$ et que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \omega(x, |y_1 - y_2|)$ pour $0 < x \leqslant \delta$, $|y| \leqslant a$, où $\omega(x, u)$ est une fonction de classe C^1 pour $0 < x \leqslant \delta$, $0 \leqslant u \leqslant a$, croissante et telle que $u = 0$ est la solution unique de l'équation

$$u' = \omega(x, u)$$

telle que $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x} = 0$, n'est pas suffisante pour l'unicité des solutions de l'équation

$$y' = f(x, y)$$

telles que $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Par exemple, dans le cas où $f(x, y) = y/x$ pour $0 < x \leqslant 1$, $|y| \leqslant a$, $\omega(x, u) = u/x$ pour $0 < x \leqslant 1$, $0 \leqslant u \leqslant a$. Dans le cas envisagé on a $y(x, x_0, y_0) = \dfrac{y_0}{x_0}x$ et $\lim\limits_{x\to 0} y(x, x_0, y_0) = 0$. Pour assurer l'unicité il faut supposer la continuité de la fonction $f(x, y)$ au point $(0, 0)$. Nos conditions H, $\overline{\mathrm{H}}$, $\overline{\overline{\mathrm{H}}}$ n'exigent pas la continuité au point $(0, y_0)$. Par exemple dans le cas où $g(x, y) = -y/x$ pour $0 < x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant a$ on peut poser $\omega(x, u) = 0$ et par suite $\eta(x, x_0, c) = c$. $\varrho(x)$ peut être une fonction quelconque telle que $\varrho(x) \to 0$. On a

$$\omega\big(x, \eta(x, x_0, \varrho(x))\big) \equiv 0 \geqslant -y(x)/x$$

pour $y(x) \geqslant 0$, $x > 0$. On peut donc appliquer le théorème 1 avec la modification donné dans la remarque 3.

Remarque 8. On vérifie facilement que dans le théorème 2 l'inégalité (6.3) peut être remplacée par l'inégalité

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqslant \tilde{\omega}(x, y_1 - y_2) \quad \text{pour } y_1 \geqslant y_2,\ (x, y_1), (x, y_2) \in \tilde{D}. \tag{10.1}$$

La condition 5° peut être remplacée par la condition suivante:

5'° Pour chaque couple de solutions $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ de l'équation (6.1) définies dans $(0, a]$ telles que

$$\lim_{x\to 0}\varphi_1(x) = \lim_{x\to 0}\varphi_2(x), \tag{10.2}$$

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant a \tag{10.3}$$

il existe une fonction $\varrho(x, \varphi_1, \varphi_2)$ continue dans $[0, \delta]$ $(0 < \delta \leqslant a)$ telle que

$$f\big(x, \varphi_1(x)\big) - f\big(x, \varphi_2(x)\big) \leqslant \tilde{\omega}\Big(x, \eta\big(x, a, \varrho(x, \varphi_1, \varphi_2)\big)\Big) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta. \tag{10.4}$$

11. Remarque 9. Dans le cas où $y_0 = 0$ l'existence d'une solution de l'équation (6.1) satisfaisant à la condition (6.6) peut être obtenue par exemple dans le cas où il existe une fonction $z(x) > 0$ de classe C^1 dans

(0, 1] telle que

$$\lim_{x\to 0} z(x) = 0,$$

(11.1) $$f(x, z(x)) < z'(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta \leqslant 1,$$

(11.2) $$f(x, -z)(x)) > -z'(x) \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \delta \leqslant 1.$$

La démonstration du théorème en question est une simple conséquence du théorème de Ważewski [1]. La condition (4) du théorème de Jürgen Witte est un cas particulier de la condition (11.1), (11.2). On vérifie facilement que dans le cas où $\varrho(x) \to 0$ pour $x \to 0$ l'intégrale

$$\int_0^x \varrho(s) h(s) \exp\Big[\int_1^s h(\tau)\, d\tau\Big]\, ds$$

existe:

$$z(x) = \int_0^x \varrho(s) h(s) \exp\Big[\int_1^s h(t)\, dt\Big]\, ds + \varepsilon x.$$

Travaux cités

[1] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrals des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon. Math. 2 (1947), p. 279–313.

[2] Jürgen Witte, *Ein Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$*, Math. Zeitschr. 140 (1974), p. 281–287.

Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1977