ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIII (1983)

Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen, II

Von Reiner Kühnau (Halle an der Saale)

Zusammenfassung. Es werden die im ersten Teil dieser Arbeit begonnenen Untersuchungen fortgesetzt, wobei jetzt die quasikonformen Abbildungen $w(z)$ allgemeiner eine Dilatationsbeschränkung der Form $|w_{\bar{z}}/w_z - c| \leqslant k$ erfüllen sollen.

I. Zu einer schlichten quasikonformen Abbildung $w = w(z)$ sei wie üblich $w_{\bar{z}}/w_z$ die komplexe Dilatation. In der Literatur sind bisher zahlreiche Beispiele von Extremalproblemen in Klassen quasikonformer Abbildungen betrachtet worden, wenn die komplexe Dilatation einer Beschränkung

$$|w_{\bar{z}}/w_z| \leqslant v(z) \tag{1}$$

mit gegebener Ortsfunktion $v(z)$ genügt. Neuerdings sind von M. Schiffer und G. Schober [6], [7] allgemeinere Dilatationsbeschränkungen betrachtet worden, z.B.

$$\left|\frac{w_{\bar{z}}}{w_z} - c(z)\right| \leqslant k(z) \tag{2}$$

mit gegebener komplexwertiger Ortsfunktion $c(z)$ und gegebener Ortsfunktion $k(z) \geqslant 0$, wobei

$$\sup\,[|c(z)| + k(z)] < 1. \tag{2'}$$

Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, dass sich die in [4] für Dilatationsbeschränkungen (1) dargestellte Methode der Randintegration unmittelbar auf diesen allgemeineren Fall (2) übertragen lässt, wobei sich überdies eine Verschärfung einiger in [6], [7] mit der Reneltschen Form der Schifferschen Variationsmethode gewonnener Ungleichungen erzielen lässt. Ausserdem lässt sich die Behandlung von Extremalproblemen bei (2) durch eine Lösung einer geeigneten Beltramischen Differentialgleichung auf ein entsprechendes Extremalproblem bei (1) zurückführen.

II. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ der z-Ebene enthalte $z = \infty$ im Innern. $j_0(z)$ sei eine stetige schlichte Abbildung von $\mathfrak{G}$, die dort

$$(3) \qquad j_{0\bar{z}} = c(z)\cdot j_{0z} + k(z)\cdot \overline{j_{0z}}$$

erfüllt, wobei die Bildrandkomponenten Strecken parallel zur reellen Achse sind. In $z = \infty$ liege die Entwicklung

$$(4) \qquad \big(z + \big(c(\infty) + k(\infty)\big)\bar{z}\big)\big(1 + \varepsilon(z)\big)$$

vor. Dabei erfülle $\mathfrak{G}$ in seinem Rande $\mathfrak{L}$ z.B. gleiche Glattheitsvoraussetzungen wie in [4], die Funktionen $c(z)$ und $k(z)$ nebst (2′) solche wie bei $p_0(z)$ in [4] (dort Voraussetzungen A, B bzw. B^*). $\varepsilon(z)$ bezeichne eine Funktion, für die mit jedem α, $0 < \alpha < 1$, gilt $z^{\alpha}\cdot\varepsilon(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Wie in [4] ist dann j_0 stückweise zweimal stetig differenzierbar und mit positiver Funktionaldeterminante versehen. Überdies ist die Existenz von j_0 (bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt) auf den Fall in [4] (entsprechend $c(z) \equiv 0$) durch Vorschalten einer Beltramiabbildung zurückführbar. Man vgl. hierzu z.B. [2]. Nach [2] bedeutet dieses "Vorschalten" – physikalisch gesehen – folgendes: (3) stellt komplexe Potentiale zu elektrostatischen Feldern in inhomogenen und anisotropen Medien dar, und dieser Fall ist durch Anwendung einer geeigneten Beltramiabbildung auf den Fall inhomogener aber isotroper Medien (entsprechend $c(z) \equiv 0$) zurückführbar.

Wir betrachten nun die Klasse $\mathfrak{A}$ der (nicht notwendig schlichten) Abbildungen $w = w(z)$ von $\mathfrak{G}$, die folgende Voraussetzungen erfüllen. 1° Die Abbildungen $w(z)$ seien stetig und stückweise zweimal stetig differenzierbar im Sinne wie in [4], Seite 271. 2° Es gelte $w_{\bar{z}} - cw_z = 0$ für $k = 0$, wobei $|w_{\bar{z}} - cw_z|^2/k$ stetig bleibt, wenn man diese Funktion dort $= 0$ definiert. 3° $w - j_0$ sei nach Stürzung $z = 1/\mathfrak{z}$ als Funktion von $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{z} = 0$ zweimal stetig partiell differenzierbar. (Man kann auch noch Abschwächungen dieser Bedingung wie in [5] betrachten.)

Jeder Abbildung $w(z) \in \mathfrak{A}$ wird nun das Funktional

$$(5) \qquad K_w = \Re\mathrm{e} \lim_{R\to\infty} \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w - j_0)\big(dz + \big(c(\infty) + k(\infty)\big)\overline{dz}\big)$$

(positive Wegorientierung)

zuerkannt. Der Grenzwert existiert dabei nach Voraussetzung 3.

Daneben betrachten wir noch das Funktional

$$(6) \qquad \mathfrak{F}_w = I_w + \iint_{\mathfrak{G}} \left(k\,|w_z|^2 - \frac{1}{k}|w_{\bar{z}} - cw_z|^2 \right) dx\,dy.$$

Dabei ist I_w der (bei Nichtschlichtheit in bekannter Weise vorzeichenbehaftete, z.B. gemäss $\frac{1}{2i}\int \bar{w}\,dw$ definierte) Inhalt des Komplementes des Bildgebietes.

Wie unten folgt, konvergiert in (6) das Gebietsintegral für $w(z) \in \mathfrak{A}$, wenn man von $\mathfrak{G}$ zunächst durch $|z| = R$ ein Teilgebiet abgrenzt und den Grenzübergang $R \to \infty$ durchführt.

Nun gilt in Verallgemeinerung von Satz 2 in [4] (auf den wir für $c(z) \equiv 0$, $k(z) \equiv v(z)$ zurückfallen) für $w(z) \in \mathfrak{A}$ der

SATZ. *Es is $K_w + \mathfrak{F}_w \leqslant 0$ und unter der zusätzlichen Voraussetzung von $|w_{\bar z} - c(z) \cdot w_z| \leqslant k(z) \cdot |w_z|$ und der Schlichtheit der Abbildungen auch $K_w \leqslant 0$, wobei das Gleichheitszeichen genau für $w(z) \equiv j_0(z) + \text{const}$ steht.*

Wird speziell $c(z) \equiv 0$, $k(z) \equiv 0$ für $|z| > 1$, $c(z) \equiv c$ ($= \text{const}$), $k(z) \equiv k$ ($= \text{const}$) für $|z| < 1$ gesetzt, wobei also $\mathfrak{G}$ die ganze z-Ebene ausmacht, dann haben wir es u.a. mit Abbildungen der Klasse Σ zu tun, die für $|z| < 1$ die Dilatationsbeschränkung $|w_{\bar z} - c \cdot w_z| \leqslant k \cdot |w_z|$ erfüllen. Für diese Abbildungen gilt dann also bei der Entwicklung

$$w(z) = z + \frac{a_1}{z} + \dots \quad \text{für } |z| > 1 \tag{7}$$

die Ungleichung

$$\Re a_1 + \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \left(k|w_z|^2 - \frac{1}{k}|w_{\bar z} - c \cdot w_z|^2 \right) dxdy \leqslant k + \Re c, \tag{8}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn

$$w(z) = j_0(z) = \begin{cases} z + \dfrac{c+k}{z} & \text{für } |z| \geqslant 1, \\ z + (c+k)\bar z & \text{für } |z| \leqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Aus (8) ergibt sich wie üblich noch als genauer Wertebereich für a_1 eine Kreisscheibe [6], [7] bzw. verschärfend

$$|a_1 - c| + \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \left(k|w_z|^2 - \frac{1}{k}|w_{\bar z} - cw_z|^2 \right) dxdy \leqslant k. \tag{10}$$

III. *Beweis des Satzes.* Bei gleichen Bezeichnungen wie in [4] lässt sich die dort vorgetragene Rechnung leicht wie folgt modifizieren. (20), (22), (24) in [4] können wir unverändert übernehmen. Statt (21) rechnen wir so:

$$\Re \frac{1}{2i} \oint (j_0 - w)\, dj_0 = \Re \iint (w_z j_{0\bar z} - w_{\bar z} j_{0z})\, dxdy$$

$$= \tfrac{1}{2} \iint \left(k|w_z|^2 - \frac{1}{k}|w_{\bar z} - cw_z|^2 \right) dxdy -$$

$$-\tfrac{1}{2}\iint\left(k|w_z-j_{0z}|^2-\frac{1}{k}|w_{\bar z}-cw_z-(j_{0\bar z}-cj_{0z})|^2\right)dxdy,$$

statt (23):

$$I_w-\frac{1}{2i}\int_{|z|=R}\bar w dw+\frac{1}{2i}\int_{|z|=R}\bar j_0 dj_0+\iint\left(k|w_z|^2-\frac{1}{k}|w_{\bar z}-cw_z|^2\right)dxdy+$$
$$+\iint\left[(1-k)|w_z-j_{0z}|^2+\frac{1}{k}|(w-j_0)_{\bar z}-c\cdot(w-j_0)_z|^2-|(w-j_0)_{\bar z}|^2\right]dxdy.$$

Damit entsteht statt (25) jetzt

$$\text{(11)}\quad \Re\frac{1}{i}\int_{|z|=R}(w-j_0)\left(dz+\left(c(\infty)+k(\infty)\right)\overline{dz}\right)+I_w+$$
$$+\iint\left(k|w_z|^2-\frac{1}{k}|w_{\bar z}-cw_z|^2\right)dxdy$$
$$=\Re\frac{1}{2i}\int_{|z|=R}\overline{(w-j_0)}\,[(w-j_0)_z\,dz+(w-j_0)_{\bar z}\,\overline{dz}]-$$
$$-\Re\frac{1}{i}\int_{|z|=R}\left[z+\left(c(\infty)+k(\infty)\right)\bar z-j_0\right][(w-j_0)_z\,dz+(w-j_0)_{\bar z}\,\overline{dz}]-$$
$$-\iint\left\{(1-k)|(w-j_0)_z|^2+\frac{1}{k}|(w-j_0)_{\bar z}-c(w-j_0)_z|^2-|(w-j_0)_{\bar z}|^2\right\}dxdy.$$

Hierbei gilt für den Integranden des letzten Integrals mit $D=w-j_0$

$$\{\;\}=(1-k)|D_z|^2+\frac{1}{k}|D_{\bar z}|^2+\frac{|c|^2}{k}|D_z|^2-\frac{2}{k}\Re(cD_z\overline{D_{\bar z}})-|D_{\bar z}|^2$$
$$\geqslant\left(1-k+\frac{|c|^2}{k}\right)|D_z|^2+\left(\frac{1}{k}-1\right)|D_{\bar z}|^2-2\frac{|c|}{k}|D_z|\,|D_{\bar z}|$$
$$=\left\{\left[\left(1-k+\frac{|c|^2}{k}\right)|D_z|-\frac{|c|}{k}|D_{\bar z}|\right]^2+\frac{1}{k}[(1-k)^2-|c|^2]|D_{\bar z}|^2\right\}\Big/\left(1-k+\frac{|c|^2}{k}\right)\geqslant 0.$$

In (11) streben rechts wieder die beiden Kurvenintegrale nach Null für $R\to\infty$, das Gebietsintegral rechts konvergiert, also auch das Gebietsintegral links, wie nach (6) behauptet. Das liefert die Behauptung des Satzes.

IV. *Zusatzbemerkungen.* 1° Ähnlich lassen sich die anderen Resultate in [4] verallgemeinern, gleichwie z.B. Theorem 2 in [7].

2° Obiger Satz lässt sich auch auf Satz 2 in [4] durch eine Beltramiabbildung zurückführen, bzw. allgemeiner ein Extremalproblem bei einer Dilatationsbeschränkung (2) auf ein Extremalproblem bei (1). Setzt man nämlich eine Lösung $\mathfrak{z}(z)$ von $\mathfrak{z}_{\bar z}=\lambda\mathfrak{z}_z$ mit einer Lösung $w(\mathfrak{z})$ von $w_{\bar{\mathfrak{z}}}=\mu w_{\mathfrak{z}}$

zu $w = w(z)$ zusammen, dann gilt

$$(12) \qquad w_{\bar{z}}/w_z = \frac{\lambda + (\mu \bar{\mathfrak{z}}_{\bar{z}}/\mathfrak{z}_z)}{1 + \bar{\lambda}(\mu \bar{\mathfrak{z}}_{\bar{z}}/\mathfrak{z}_z)}.$$

Wenn also bei festgehaltenem $\lambda = \lambda(z)$ die komplexe Dilatation $\mu(\mathfrak{z})$ eine Ungleichung $|\mu(\mathfrak{z})| \leqslant \nu(\mathfrak{z})$ mit gegebenem $\nu(\mathfrak{z})$ erfüllt, dann folgt wegen (12) (deutbar als lineare Transformation von $\mu \bar{\mathfrak{z}}_{\bar{z}}/\mathfrak{z}_z$) die Dilatationsbeschränkung (2) mit

$$(13) \qquad c = \lambda \frac{1-\nu^2}{1-|\lambda|^2\nu^2}, \qquad k = \nu \frac{1-|\lambda|^2}{1-|\lambda|^2\nu^2}.$$

Umgekehrt erhält man durch Auflösung von (13) nach λ und ν zu gegebenen c und k aus einer (2) erfüllenden Abbildung $w(z)$ eine mit einem gewissen ν die Dilatationsbeschränkung $|\mu(\mathfrak{z})| \leqslant \nu$ erfüllende Abbildung $w(\mathfrak{z})$. So ist also eine Dilatationsbeschränkung (2) immer auf eine solche (1) zurückführbar, wobei sich auch die in [6], [7] gegebene Extremalcharakterisierung durch eine Differentialgleichung wie (3) ergibt. Falls man so z.B. unseren obigen Satz auf Satz 2 in [4] zurückführen will, benutzt man noch die Beziehung ($\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$)

$$\iint \left(\nu |w_{\mathfrak{z}}|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{\mathfrak{z}}}|^2 \right) d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = \iint \left(k |w_z|^2 - \frac{1}{k} |w_{\bar{z}} - c w_z|^2 \right) dx\, dy.$$

Man kann diese Zurückführung von (2) auf (1) auch an den zugehörigen konkreten Ungleichungen verfolgen. So erhält man z.B.durch einfache Rechnung Theorem 4.1 in [6] bzw. Ungleichung (12) in [7] (entsprechend (8) bzw.(10) in dieser Mitteilung ohne den Integralterm) aus der Ungleichung der Zusatzbemerkung 1. in [3]. Man setzt dabei

$$\mathfrak{z}(z) = \begin{cases} z + \dfrac{\lambda}{z} & \text{für } |z| \geqslant 1, \\ z + \lambda \bar{z} & \text{für } |z| \leqslant 1, \end{cases}$$

wobei sich λ und ein gewisses ν über (13) aus c und k errechnen. In der $\mathfrak{z}$-Ebene liegt dann eine Ellipse vor, und es sind dann für die normierten konformen Abbildungen $w(\mathfrak{z})$ des Äusseren derselben mit quasikonformer Fortsetzung ins Innere mit $|w_{\bar{\mathfrak{z}}}/w_{\mathfrak{z}}| \leqslant \nu$ die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten abzuschätzen, was eben in [3] geschah.

Übrigens erhält man den Konvergenzsatz (Theorem 3.1) in [6] ebenfalls durch obige Beltramiabbildung sofort aus dem entsprechenden Strebelschen Konvergenzsatz, gleichwie man so die Lösung von (3) auf den Fall $c \equiv 0$ zurückführen kann.

3° Durch eine Dilatationsbeschränkung der Form (2) wird auch die Richtung der infinitesimalen Ellipsen, die in infinitesimale Kreise übergehen, mit in die Betrachtung einbezogen. Es verdient bemerkt zu werden, dass etwas Derartiges bzw. Verwandtes auch schon in der interessanten und wenig bekannten Arbeit [1] betrachtet wurde.

Schrifttum

[1] C. Andreian Cazacu, *Sur les transformations pseudo-analytiques*, Rev. Math. Pures Appl. 2 (1957), p. 383–397.

[2] R. Kühnau, *Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien*. II, J. reine angew. Math. 238 (1969), p. 61–66.

[3] —, *Bemerkungen zu den Grunskyschen Gebieten*, Math. Nachr. 44 (1970), p. 285–293.

[4] —, *Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen*, Ann. Polon. Math. 31 (1976), p. 269–289.

[5] —, *Zur Verallgemeinerung der Extremaleigenschaft der Parallelschlitzabbildung für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr. 86 (1978), p. 41–44.

[6] M. Schiffer and G. Schober, *A variational method for general families of quasiconformal mappings*, J. d'Anal. Math. 34 (1978), p. 240–264.

[7] —, —, *An application of the calculus of variations for general families of quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math. 747, Berlin–Heidelberg–New York 1979, hier Seiten 349–357.

Reçu par la Rédaction le 10.4.1980