ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXX (1975)

Über Homomorphismen einer Gruppe von Matrizen

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice) und B. SZOCIŃSKI (Gliwice)

Zussammenfassung. Eine Matrix $A(a_{ij})$ über einem kommutativen Körper K heisst doppelt pseudostochastisch, wenn sie die folgenden Bedingungen: $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$ erfüllt. Mit $D = DS(n, K)$ wird die Gruppe aller regulären doppelt pseudostochastischen Matrizen derselben Ordnung n und mit $[D, D]$ ihre Kommutatorgruppe bezeichnet. Es sei $[A]$ das Element der Faktorgruppe $D/[D, D]$, das die Matrix A enthält. Die Formel $g([A])\colon = \operatorname{Det} A$ bestimmt eine Abbildung von $D/[D, D]$ in $K^* = K - [0]$. Unter der Voraussetzung, dass die Charakteristik K gleich 0 ist, werden die folgenden Sätze bewiesen.

SATZ 3.1. *Die Abbildung g ist ein Isomorphismus.*

SATZ 4.1. *Jeder Homomorphismus f von D in eine kommutative Gruppe G hat die Form $f(X) = \varphi(\operatorname{Det} X)$, wo $\varphi\colon K^* \to G$ ein Homomorphismus bedeutet.*

Aus dem Satz 4.1 ergibt sich, dass jede multiplikative Funktion F, die D in einen beliebigen kommutativen Körper $\tilde{K}$ abbildet, die Form $F(X) = \psi(\operatorname{Det} X)$ hat, wo $\psi\colon K^* \to \tilde{K}$ beliebige multiplikative Funktion ist.

Einleitung. Eine Matrix $A = (a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ über einem kommutativen Körper K heisst doppelt pseudostochastisch, wenn sie die folgenden Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \tag{1}$$

erfüllt (vgl. [1], Def. 1). Diese Matrizen werden kurz „dps-Matrizen" genannt.

Alle regulären dps – Matrizen derselben Ordnung n mit Matrizenmultiplikation bilden eine Gruppe (vgl. [1], Hilfssatz 1.1), die wir mit $DS(n, K)$ bzw. kurz mit D bezeichnen werden.

In der vorliegenden Note bestimmen wir die allgemeine Form der Homomorphismen von D in eine beliebige Abelsche Gruppe G unter der Voraussetzung, dass die Charakteristik des Körpers K gleich Null ist.

1. Hier werden wir die in [1] eingeführten Bezeichnungen benutzen. Insbesondere wird mit P_{jk}, $j \neq k$, j, $k = 1, 2, \ldots, n$ die Permutationsmatrix und mit $F_i(a)$, $1 < i < n$, $a \neq 0$ bzw. mit $G_{jk}(\beta)$, $\beta \neq 0$, die elementare Matrix erster bzw. zweiter Art bezeichnet (vgl. [1], Def. 1.1, 2.1, 1.3).

Die Matrix P_{jk} entsteht, wenn wir in der Einheitsmatrix E die j-te Zeile mit der k-ten vertauschen.

$F_i(a)$ erhalten wir, wenn wir in E die i-te und die $(i+1)$-te Zeile durch die folgenden Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle (1)} & & {\scriptstyle (i-2)} & {\scriptstyle (i-1)} & {\scriptstyle (i)} & {\scriptstyle (i+1)} & & {\scriptstyle (n)} \\ (0 & \ldots & 0 & 1-a & a & 0 & \ldots & 0), \\ (0 & \ldots & 0 & a-1 & 1-a & 1 & 0 \ldots & 0) \end{array}$$

entsprechend ersetzen.

Die Elemente der Matrix $G_{ij}(\beta)$ sind folgendermassen definiert:

$$a_{ii} = a_{jj} = \frac{1+\beta}{2}, \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{1-\beta}{2},$$

$$a_{kl} = \delta_{kl} \quad \text{in allen anderen Fällen.}$$

Aus den obigen Definitionen folgt

Hilfssatz 1.1. *Die Abbildungen*

$$F_i\colon K^* \to D, \quad G_{kj}\colon K^* \to D$$

sind Homomorphismen der multiplikativen Gruppe $K^* = K - \{0\}$ *in die Gruppe* D.

Wir beweisen jetzt den nachstehenden

Hilfssatz 1 2. *Elementare Matrizen und Permutationsmatrizen erfüllen die folgende Gleichung*

$$(1.1) \quad F_{n-1}(1-a)G_{n-1n}\left(\frac{2\beta}{1-a}-1\right) = F_{n-1}(1-\beta-a)\cdot P_{n-1n}F_{n-1}\left(1-\frac{\beta}{1-\beta-a}\right),$$

für $n \geqslant 3$, $a \neq 1$, $a+\beta \neq 1$, $\beta \neq (1-a)/2$.

Beweis. Es genügt (1.1) nur für Matrizen dritter Ordnung zu beweisen.

Durch Multiplizieren beider Seiten lässt sich leicht zeigen, dass die folgende Identiät

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{1-\alpha} & 1-\frac{\beta}{1-\alpha} \\ 0 & 1-\frac{\beta}{1-\alpha} & \frac{\beta}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta+\alpha & 1-\beta-\alpha & 0 \\ -\beta-\alpha & \beta+\alpha & 1 \end{pmatrix} P_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{1-\beta-\alpha} & 1-\frac{\beta}{1-\beta-\alpha} & 0 \\ -\frac{\beta}{1-\beta-\alpha} & \frac{\beta}{1-\beta-\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, aus der sich (1.1) für $n = 3$ ableiten lässt.

2. Jetzt geben wir zwei Sätze über die kanonische Zerlegung der regulären dps — Matrizen an.

SATZ 2.1 *Jede Matrix $A \in D$ kann in der Form*

$$A = L \cdot G_{n-1n}(\beta) \cdot R \tag{2.1}$$

dargestellt werden, wobei L und R Produkte einer endlichen Anzahl der Matrizen P_{kj} und $F_i(a_i)$ sind.

Für $n \geqslant 3$ ist dieser Satz in [1] unter der Voraussetzung (3.2) bewiesen worden. Da jede Matrix $A \in DS(2, K)$ die Form

$$A = G_{12}(\beta), \quad \beta = \operatorname{Det} A \tag{2.2}$$

hat, gilt (2.1) auch im Falle $n = 2$.

Im weiteren wird die Identität (2.1) für $n \geqslant 3$ mit Hilfe von (1.1) etwas umgeformt. Wir setzen in (1.1) für $\alpha = 0$. Dann geht diese in folgende Gleichung über:

$$G_{n-1n}(2\beta-1) = F_{n-1}(1-\beta)P_{n-1n}F_{n-1}\left(\frac{1-2\beta}{1-\beta}\right), \tag{2.3}$$

$$\beta \neq 1, \quad \beta \neq \tfrac{1}{2}, \quad n \geqslant 3,$$

die zeigt, dass man jede von E verschiedene Matrix G_{n-1n} durch die Matrizen P_{n-1n}, $F_{n-1}(a)$ ausdrücken kann.

Sehr einfach ist auch die Relation

$$F_l(a) = P_{il}P_{i+1\,l+1}F_i(a)P_{i+1\,l+1}P_{il} \tag{2.4}$$

nach zuprüfen.

Aus (2.3), (2.4) und aus der Darstellung (2.1) folgt

SATZ 2.2. *Die Gruppe D für $n \geqslant 3$ lasst sich durch die Matrizen P_{jk} und $F_{n-1}(a)$ herleiten.*

3. Wir bezeichnen mit $[D, D]$ die Kommutatorgruppe von D und mit $[A]$ das Element der Faktorgruppe $D/[D, D]$, welches die Matrix A enthält. Die Formel

$$g([A]):=\operatorname{Det} A \tag{3.1}$$

bestimmt eine Abbildung der Gruppe $D/[D, D]$ in K^*. Unter der Voraussetzung, dass die Charakteristik $\chi(K)$ des Körpes K gleich Null ist,

$$\chi(K)=0, \tag{3.2}$$

beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 3.1. *Die Abbildung g ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die Permutationsmatrizen P_{jk} erzeugen die n-te symmterische Gruppe S_n.

Da $S_n \subset D$ ist, muss auch die Inklusion

$$A_n \subset [D, D]$$

gelten, wobei A_n die Kommutatorgruppe von S_n darsteltt. Es gilt die Relation

$$P_{jk}=P_{2k}P_{1j}P_{12}P_{1j}P_{2k}. \tag{*}$$

Aus (*) und aus der Bemerkung, dass jedes gerade Produkt der Permutationsmatrizen zu A_n also auch zu $[D, D]$ gehört, folgt die Gleichheit.

$$[P_{jk}]=[P_{12}]. \tag{3.3}$$

Jetzt nehmem wir an, dass $n \geqslant 3$ ist. Aus (3.3) und aus den Satz 2.2 ergibt sich

$$[A]=[P_{12}^{\sigma}\cdot F_{n-1}(a)], \quad \sigma=0,1 \tag{3.4}$$

für jedes Element $[A]$ der Faktorgruppe $D/[D, D]$. Die Relation (3.4) zeigt, dass $[A]$ dann und nur dann zum Kern g gehört, wenn gilt

$$\operatorname{Det}(P_{12}^{\sigma}\cdot F_{n-1}(a))=1$$

d.h. wenn σ und a die Beziehung

$$(-1)^{\sigma}\cdot a=1 \tag{3.5}$$

erfüllen. Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden

$$\sigma=0, \quad a=1, \tag{3.6}$$

und

$$\sigma=1, \quad a=-1. \tag{3.7}$$

Im Falle (3.6) ist $[A] = [E]$. Um den Fall (3.7) abzuschliessen, setzen wir in (1.1) für $\alpha = 2$ ein. Dann erhalten wir

$$[F_{n-1}(-1)G_{n-1n}(-2\beta-1)] = [P_{12}F_{n-1}(-2\beta-1)] \tag{3.8}$$

für $\beta \neq -1$ und $\beta \neq -\frac{1}{2}$. Aus (3.8) folgt, dass der Homomorphismus

$$[F_{n-1}(\xi)\cdot G_{n-1n}^{-1}(\xi)] \tag{3.9}$$

der Gruppe K^* in die Gruppe $D/[D, D]$ für $\xi \neq 1$ konstant ist.

Auf Grund (3.2) muss (3.9) gleich $[E]$ sein. Daraus ergibt sich die Relation

$$[P_{12}F_{n-1}(-1)] = [E]$$

welche zeigt, dass die Beziehung $[A] = [E]$ auch im Falle (3.7) gilt. Kern g besteht also aus einen Element $[E]$ und unser Satz ist für $n \geqslant 3$ beweisen. Wenn $n = 2$ so folgt der Satz 3.1 ohne weiteres aus (2.2).

4. Zum Abschluß noch einige einfache Folgerungen aus Satz 3.1, die für die Geometrie bzw. Theorie der geometrischen Objekte wichtig sind.

SATZ 4.1. *Unter der Voraussetzung* (3.2) *hat jeder Homomorphismus der Gruppe $DS(n, K)$ in die kommutative Gruppe G die Form*

$$f(X) = \varphi(\mathrm{Det}X) \tag{4.1}$$

wobei φ ein Homomorphismus der multiplikativen Gruppe K^* in die Gruppe G bedeutet.

Beweis. Es ist bekannt, dass f in der Form

$$f = \bar{f}\circ\nu \tag{4.2}$$

dargestellt werden kann.

$\bar{f}$ und ν sind die folgendermassen definierten Homomorphismen:

$$\nu\colon D\to D/[D, D], \quad \nu(A) := [A],$$
$$\bar{f}\colon D/[D, D]\to G, \quad \bar{f}([A]) := f(A).$$

Auf Grund von Satze 3.1 kann man (4.2) in der Form

$$f = \bar{f}\circ g^{-1}\circ g\circ\nu$$

schreiben, aus der dann (4.1) folgt, wenn wir für $\varphi = \bar{f}\circ g^{-1}$ setzen.

Es sei $\tilde{K}$ ein beliebiger kommutativer Körper. Für die multiplikativen Funktionem, die $DS(n, K)$ in $\tilde{K}$ abbilden, erhalten wir leicht aus dem Satz 4.1 die

FOLGERUNG 4.1. Unter der Voraussetzung (3.2) hat jede multiplikative Funktion f,

$$f\colon DS(n, K) \to \tilde{K},$$

die Form

$$f(X) = \psi(\operatorname{Det} X),$$

wobei $\psi\colon K^* \to \tilde{K}$ eine multiplikative Funktion ist.

Literatur

[1] M. Kucharzewski und B. Szociński, *Über eine kanonische Form der regulären doppelt pseudostochastischen Matrizen*, Prace Naukowe U. Śl. 37, Prace Mat. 4 (1973), p. 35–43.

Reçu par la Rédaction le 28. 6. 1972