ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLV (1985)

Les inégalités du type de Grunsky pour les fonctions de la classe $\mathcal{K}$

par Halina JONDRO (Katowice)

Abstract. This paper is devoted to studying an extremal problem using variational methods for the class $\mathcal{K}$ of univalent Grunsky–Shah functions.

1. L'inégalité généralisée du type de Grunsky. Soit $H(U)$ l'espace des fonctions holomorphes dans $U = \{z\colon |z| < 1\}$, avec la convergence uniforme sur des ensembles compacts, $H'(U)$ — l'espace conjugué, $\mathcal{K}$ — la famille des fonctions, holomorphes et univalentes dans U, de la forme

(1) $$f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

et satisfaisant à la condition:

(2) $$f(z_1)\overline{f(z_2)} \neq -1 \quad \text{pour } z_1, z_2 \in U \text{ arbitraires.}$$

Définissons dans la famille $\mathcal{K}$ la fonctionnelle:

(3) $$I(f) = \operatorname{Re}\left\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right) + L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log\left(1+f(z)\overline{f(\zeta)}\right)\right)\right\},$$

où $L^2(\varphi(z, \zeta)) = L(L(\varphi(z, \zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z, \bar{\zeta})) = \overline{L(\overline{L(\varphi(z, \bar{\zeta}))})}$, $\varphi(z, \zeta)$ est une fonction holomorphe dans $U \times U$, λ — un nombre réel arbitraire. On peut facilement remarquer, en utilisant la formule de Caccioppoli–Köthe sur la représentation générale de la fonctionnelle linéaire de $H'(U)$, [2], [6], que $\psi(\zeta) = L(\varphi(z, \zeta)) \in H(U)$. Nous constatons aussi facilement que la fonctionnelle (3) possède en un point arbitraire $f \in \mathcal{K}$ une dérivée partielle complexe au sens de Gâteaux, c'est-à-dire qu'il existe une fonctionnelle $\Lambda_f \in H'(U)$ telle que

$$I(f^*) = I(f) + \varepsilon\Lambda_f(h) + o(\varepsilon),$$

où $\varepsilon > 0$, f^* est unê fonction arbitraire de $\mathcal{K}$ telle que

$$f^*(z) = f(z) + \varepsilon h(z) + o(\varepsilon), \quad h(z) \in H(U),$$

et $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$, lorsque $\varepsilon \to 0$ presque uniformément dans U. Cette dérivée est la fonctionnelle suivante:

$$\Lambda_f(h) = \lambda^2 \frac{h'(0)}{f'(0)} + 2\lambda L\left(\frac{h(z)}{f(z)}\right) + \overline{L^2\left(\frac{h(z)-h(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right) -}$$
$$- |L|^2\left(\frac{h(z)\overline{f(\zeta)}}{1+f(z)\overline{f(\zeta)}}\right) - |L|^2\left(\frac{f(z)\overline{h(\zeta)}}{1+f(z)\overline{f(\zeta)}}\right).$$

Posons, conformément à [5], page 545,

$$D(w) = \Lambda_f\left(\frac{wf}{f-w}\right)$$

et ensuite

$$A(w) = D(w) + \overline{\Lambda_f(f)} + \overline{D(-1/\bar{w})}.$$

Après un calcul facile nous obtenons:

$$A(w) = -\left[\lambda - L\left(\frac{w}{f(z)-w}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1+\bar{w}f(z)}\right)}\right]^2. \tag{4}$$

Supposons maintenant que $f \in \mathscr{K}$ soit la fonction pour laquelle la fonctionnelle (3) atteint la valeur la plus grande dans $\mathscr{K}$. Alors, d'après le théorème 4, [5], page 546, cette fonction satisfait à l'équation différentielle-fonctionnelle de la forme:

$$\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 A\,(f(\zeta)) = B(\zeta), \tag{5}$$

où

$$B(\zeta) = E(\zeta) + \overline{\Lambda_f(zf'(z))} + \overline{E(1/\bar{\zeta})}, \qquad E(\zeta) = \Lambda_f\left(\frac{\zeta z f'(z)}{z-\zeta}\right).$$

Il résulte de la forme de la fonction $B(\zeta)$ et du théorème de Caccioppoli–Köthe que cette fonction est une fonction holomorphe au moins dans un anneau $P = \{\zeta\colon r < |\zeta| < 1/r\}$, $0 < r < 1$. On sait, en outre, que $B(\zeta)$ est non positive pour $\zeta \in \partial U$. (Théorème 4, [5], page 546.) Il en résulte, entre autres, que toutes les racines de la fonction $B(\zeta)$, situées sur ∂U sont d'ordre pair.

Il résulte de la relation (5), qui est remplie entre autres dans l'anneau $P_1 = \{\zeta\colon r < |\zeta| < 1\}$, que la fonction $-(\zeta f'(\zeta)/f(\zeta))^2.\ A(f(\zeta))$ est holomorphe dans cet anneau et se prolonge comme la fonction holomorphe sur l'anneau P et qu'elle est non négative sur ∂U. D'après (4) cette fonction est le carré de la fonction

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left(\lambda - L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right) + \overline{L\left(\frac{1}{1+\overline{f(\zeta)}f(z)}\right)}\right), \tag{6}$$

qui est aussi une fonction holomorphe dans l'anneau P_1, donc en vertu de (5) elle est une branche de la racine carrée de $-B(\zeta)$ dans le même anneau. Posons

$$B^*(\zeta)=\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left(\lambda-L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right)+\overline{L\left(\frac{1}{1+\overline{f(\zeta)}f(z)}\right)}\right).$$

La fonction $B^*(\zeta)$ se prolonge de l'anneau P_1, comme fonction continue et même holomorphe, sur l'anneau $\{\zeta\colon r<|\zeta|\leqslant 1\}$. En effet, si $\zeta^*\in\partial U$ et $B(\zeta^*)\neq 0$, dans un voisinage du point ζ^* deux branches univoques de la racine carrée de $-B(\zeta)$ existent et l'une d'elles doit être identique à $B^*(\zeta)$ dans une partie commune du cercle unité et de ce voisinage de ζ^*. Si notamment $B(\zeta^*)=0$, on doit avoir $B(\zeta)=(\zeta-\zeta^*)^{2k}\tilde{B}(\zeta)$, dans un voisinage de ζ^*, où $\tilde{B}(\zeta^*)\neq 0$, car ζ^* est une racine d'ordre pair de $B(\zeta)$. Donc dans un voisinage du point ζ^* il existe de nouveau deux branches univoques de la racine carrée de $-B(\zeta)$ et l'une d'elles est identique à $B^*(\zeta)$ dans la partie commune de ce voisinage et du cercle unité U. En outre $B^*(\zeta)$, ainsi prolongée, est réelle sur la circonférence ∂U. Considérons la fonction

$$G(\zeta)=L\left(\frac{\zeta}{z-\zeta}\right)-\overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}.$$

Elle est holomorphe dans l'anneau P et réelle sur la circonférence ∂U. La fonction

$$B^*(\zeta)+G(\zeta)=\lambda\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}-L\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{\zeta}{z-\zeta}\right)+$$
$$+\overline{L\left(\frac{\overline{\zeta f'(\zeta)}}{\overline{f(\zeta)}}\frac{1}{1+\overline{f(\zeta)}f(z)}\right)}-\overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}$$

est holomorphe dans le cercle U et se prolonge d'une façon continue au cercle fermé $\bar{U}$, restant réelle sur la circonférence ∂U. En appliquant le principe de la symétrie de Schwarz, nous déduisons que la fonction $B^*(\zeta)+$ $+G(\zeta)$ se prolonge comme fonction holomorphe au plan fermé $\bar{C}$. Donc elle est une fonction constante. Puisque $B^*(0)+G(0)=\lambda$, nous obtenons la relation suivante:

$$\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)\left(\lambda-L\left(\frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)}\right)+\overline{L\left(\frac{1}{1+\overline{f(\zeta)}f(z)}\right)}\right)\tag{7}$$
$$=\lambda-L\left(\frac{\zeta}{z-\zeta}\right)+\overline{L\left(\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right)}.$$

Remarquons ensuite que les identités suivantes ont lieu:

$$\lambda \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \lambda = \lambda\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta} \log \frac{f(\zeta)}{\zeta},$$

(8)
$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \cdot \frac{f(\zeta)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{\zeta}{z-\zeta} = -\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta} \log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta},$$

$$\frac{\bar{\zeta}\overline{f'(\zeta)}}{\overline{f(\zeta)}} \cdot \frac{1}{1+\overline{f(\zeta)}\, f(z)} = \frac{\bar{\zeta}\overline{f'(\zeta)}}{\overline{f(\zeta)}} - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \log\left(1+\overline{f(\zeta)}\, f(z)\right),$$

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} = 1 - \bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} \log(1-\bar{\zeta}z).$$

En mettant (8) dans (7), en tenant compte du fait que la fonctionnelle L est linéaire et continue,

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} \varphi(z, \zeta)\right) = \frac{\partial}{\partial\zeta} L(\varphi(z, \zeta))$$

et en intégrant par rapport à ζ çes relations ainsi obtenues, nous avons

(9)
$$\lambda \log \frac{f(\zeta)}{\zeta} + L\left(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - \overline{L\left(\log\left(1+\overline{f(\zeta)}\, f(z)\right)\right)} + \overline{L\left(\log(1-\bar{\zeta}z)\right)} = C,$$

où

(10)
$$C = \lambda \log f'(0) + L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right).$$

Nous allons prouver que

(11)
$$\mathrm{Re}\, C = 0.$$

Pour cela, il suffit de montrer que $\mathrm{Re}\, C = -\mathrm{Re}\, \bar{C}$.

D'abord nous allons montrer que les frontières des domaines $f(U)$ et $h(U)$ ne peuvent être disjointes. Supposons que $\partial f(U) \cap \partial h(U) = \emptyset$. Puisque, en outre, $f(U) \cap h(U) = \emptyset$ nous obtenons $\overline{f(U)} \cap \overline{h(U)} = \emptyset$. L'ensemble $C \setminus (\overline{f(U)} \cup \overline{h(U)}) \subset C \setminus (f(U) \cup h(U))$, mais l'ensemble $C \setminus (f(U) \cup h(U))$ n'a pas de points intérieurs. (Conclusion du théorème (5), [5], page 547.)([1]) Alors l'ensemble $C \setminus (\overline{f(U)} \cup \overline{h(U)})$ n'a non plus de points intérieurs; comme, il est ouvert, il est vide. Ainsi $C = \overline{f(U)} \cup \overline{h(U)}$, et cela est contradictoire avec la connexité de C. C'est pourquoi $\partial f(U)$ et $\partial h(U)$ doivent posséder un

([1]) On peut démontrer que si $\lambda \neq 0$ ou $L \neq 0$, $A(w) \not\equiv 0$ dans un domaine qui couvre l'ensemble $C \setminus (f(U) \cup h(U))$. Si notamment $\lambda = 0$ et $L = 0$, on a $\mathrm{Re}\, I(f) = 0$ pour chaque $f \in \mathscr{K}$ et le problème de la maximalisation de cette fonctionnelle est soluble.

point commun. Soit $w^* \in \partial f(U) \cap \partial h(U)$. Alors, il existe deux suites de points $\zeta_n', \zeta_n'' \in U$, $n = 1, 2, \ldots$, telles que $f(\zeta_n') \to w^* \leftarrow h(\zeta_n'') = [-\overline{f(\zeta_n'')}]^{-1}$, où $\zeta_n' \to \zeta'$, $\zeta_n'' \to \zeta''$, $\zeta', \zeta'' \in \partial U$. En mettant d'abord $\zeta = \zeta_n'$ et ensuite $\zeta = \zeta_n''$ dans (9), et en calculant la limite avec $n \to \infty$, nous obtenons:

$$\lambda \log \frac{w^*}{\zeta'} + L\left(\log \frac{f(z)-w^*}{z-\zeta'}\right) - \overline{L(\log(1+\overline{w}^* f(z)))} + \overline{L(\log(1-\overline{\zeta}' z))} = C,$$

$$\lambda \log \frac{-1}{w^*\zeta''} + L\left(\log \frac{1+\overline{w}^* f(z)}{\overline{w}^*(z-\zeta'')}\right) - \overline{L\left(\log\left(1-\frac{1}{\overline{w}^*} f(z)\right)\right)} + \overline{L(\log(1-\overline{\zeta}'' z))} = C,$$

d'où l'on voit que (11) est remplie. L'égalité suivante résulte de (11) et de (10):

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda \log f'(0) + L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right)\right\} = 0. \tag{12}$$

De la relation (9) nous obtenons ensuite

$$\lambda L\left(\log \frac{f(\zeta)}{\zeta}\right) + \tag{13}$$
$$+ L^2\left(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - |L|^2\left(\log(1+\overline{f(\zeta)}\, f(z))\right) +$$
$$+ |L|^2\left(\log(1-\overline{\zeta} z)\right) = 0.$$

En sommant les parties réelles des members de l'égalité (13) et l'égalité (12) multipliée par λ, nous obtenons la valeur de la fonctionnelle (3) pour la fonction maximale f:

$$I(f) = -|L|^2\left(\log(1-\overline{\zeta} z)\right).$$

Ainsi nous avons obtenu le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si f est la fonction maximale pour la fonctionnelle* (3), *f satisfait à la relation*:

$$\lambda \log \frac{f(\zeta)}{\zeta} + L\left(\log \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right) - \overline{L(\log(1+\overline{f(\zeta)}\, f(z)))} + \overline{L(\log(1-\overline{\zeta} z))} \tag{14}$$
$$= \lambda \log f'(0) + L\left(\log \frac{f(z)}{z}\right),$$

et la valeur de la fonctionnelle (3) *pour f a la forme suivante*

$$\mathrm{Re}\, I(f) = I(f) = -|L|^2\left(\log(1-\overline{\zeta} z)\right). \tag{15}$$

Considérons maintenant les conditions, sous lesquelles on peut prétendre que la fonctionnelle (3) atteint un maximum dans la famille $\mathscr{K}$.

Avant tout remarquons que la fonctionnelle (3) est bornée supérieurement dans la famille $\mathscr{K}$, ce qui résulte de la représentation intégrale de la fonctionnelle de $H'(U)$, des estimations connues dans la classe S

(S – classe des fonctions holomorphes et univalentes dans U, normalisées par la condition $f(0)=f'(0)-1=0$), $|\tilde{f}(z)|$, $\left|\log\dfrac{\tilde{f}(z)-\tilde{f}(\zeta)}{z-\zeta}\right|$, [3], cela résulte aussi de ce que $|f'(0)|\leqslant 1$, [4], p. 197; de plus, puisque avec ζ constant, $0\neq\zeta\in U$, la fonction

$$\frac{1}{\overline{f(\zeta)}\,f'(0)}\log(1+\overline{f(\zeta)}\,f(z))\in S,$$

alors d'après le théorème de la déformation, appliqué deux fois, et d'après l'inégalité $|f'(0)|\leqslant 1$ pour $f\in\mathscr{K}$, nous avons

$$|\log(1+\overline{f(\zeta)}\,f(z))|\leqslant\frac{|z|\,|\zeta|}{(1-|z|)^2(1-|\zeta|)^2}.$$

Supposons d'abord que $\lambda\neq 0$. Soit $M=\sup\limits_{\mathscr{K}}\operatorname{Re}I(f)$. Alors il existe une suite de fonctions $f_n\in\mathscr{K}$, telle que $\operatorname{Re}I(f_n)\to M$. La famille $\mathscr{K}$ est normale, donc on peut supposer que la suite $\{f_n\}$ est presque uniformément convergente. Si $f_n\to f\in\mathscr{K}$, $\operatorname{Re}I(f)=M$, alors f est la fonction qui réalise le maximum de la fonctionnelle (3) dans $\mathscr{K}$. Si notamment $f_n\to 0$, nous pouvons mettre f_n sous la forme: $f_n=b_n\tilde{f}_n$, où $\tilde{f}_n\in S$, $b_n\to 0$, et nous pouvons supposer, à cause de la compacité de la famille S, que $\tilde{f}_n\to\tilde{f}\in S$. Mais $\operatorname{Re}I(f_n)\to-\infty$. Cela est impossible, car il existe des fonctions pour lesquelles la valeur de la fonctionnelle (3) est plus grand que $-\infty$. Alors, dans le cas où $\lambda\neq 0$ la fonctionnelle (3) atteint dans la famille $\mathscr{K}$ un maximum, qui est égal au second membre de la formule (15). Nous pouvons énoncer ce résultat comme le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si $\lambda\neq 0$, réel, alors l'inégalité suivante est remplie pour chaque fonction $f\in\mathscr{K}$:*

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda^2\log f'(0)+2\lambda L\left(\log\frac{f(z)}{z}\right)+L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)-|L|^2\left(\log(1+\overline{f(\zeta)}\,f(z))\right)\right\}\leqslant-|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)). \tag{16}$$

Cette inégalité est exacte, il existe même une fonction $f\in\mathscr{K}$ pour laquelle l'égalité est remplie. En outre chacune de ces fonctions satisfait à la relation (14).

Si $\lambda=0$, l'inégalité (16) est évidemment aussi remplie. De plus, cette inégalité est exacte, même si l'on ne sait pas si dans la famille $\mathscr{K}$ il existe une fonction qui réalise le signe d'égalité. Pour le prouver remarquons que pour chaque fonction $\tilde{f}\in S$ l'inégalité suivante est remplie

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{\tilde{f}(z)-\tilde{f}(\zeta)}{z-\zeta}\right)\right\}\leqslant-|L|^2(\log(1-\bar{\zeta}z)), \tag{17}$$

[8], p. 116, Conclusion 11.4. Remarquons aussi qu'il existe une fonction de la classe S, qui réalise le signe d'égalité dans cette inégalité.

Pour chaque fonction bornée $\hat{f} \in S$, il existe aussi un b_0 tel que si $|b| < b_0$, $b\hat{f} \in \mathscr{K}$ et $\operatorname{Re} I(b\hat{f})$ est arbitrairement proche du premier membre de l'inégalité (17), pour b suffisamment petit. Si maintenant $\tilde{f} \in S$ est la fonction qui réalise l'égalité dans l'inégalité (17), alors on peut l'approcher par la fonction bornée $\hat{f}(z) = \frac{1}{\varrho}\tilde{f}(\varrho z)$, où $0 < \varrho < 1$ et ϱ est suffisament proche de 1, et ensuite on peut remplacer cette dernière par la fonction $b\hat{f}$ avec b suffisament proche de 0. La valeur de la fonctionnelle (3) pour cette fonction sera arbitrairement proche du second membre de l'inégalité (17), d'où l'on voit qu'on ne peut pas améliorer cette inégalité.

Le résultat ci-dessus mène au théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Pour chaque fonction $f \in \mathscr{K}$ l'inégalité suivante est remplie*:

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)-|L|^2\left(\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right\} \leqslant -|L|^2\left(\log(1-\bar{\zeta}z)\right). \tag{18}$$

Cette inégalité est exacte.

On peut aussi considérer la fonctionnelle:

$$I(f) = \operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right\}.$$

En procédant de même que dans le cas de la fonctionnelle (3), nous obtenons le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Pour chaque fonction $f \in \mathscr{K}$ l'inégalité suivante est remplie*

$$\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right\} \leqslant -|L|^2\left(\log(1-\bar{\zeta}z)\right).$$

Cette inégalité est exacte dans le même sens que dans le théorème 3.

Remarque 1. Remarquons que si $L \in H'(U)$, on a $iL \in H'(U)$, donc en posant dans l'inégalité (18) iL au lieu de L, nous obtenons l'inégalité:

$$-\operatorname{Re}\left\{L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right\} \leqslant -|L|^2\left(\log(1-\bar{\zeta}z)\right).$$

Utilisant cette dernière inégalité et celle du théorème 4, nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\left|L^2\left(\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right)+|L|^2\left(\log(1+f(z)\overline{f(\zeta)})\right)\right| \leqslant -|L|^2\left(\log(1-\bar{\zeta}z)\right).$$

2. Cas particuliers des inégalités du type de Grunsky. Appliquons maintenant les théorèmes obtenus ci-dessus pour estimer certaines fonctionnelles dans la famille $\mathscr{K}$.

1° Posons

$$L(h) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m (h(z_m) - h(0)), \qquad \text{où } h \in H(U),\ \lambda_m,\ m = 1, \ldots, N,$$

étant des nombers complexes arbitraires, z_m, $m = 1, \ldots, N$ — points arbitraires du cercle U. On a évidemment $L(1) = 0$. Soit $\lambda \neq 0$ un nombre réel arbitraire. D'après le théorème 2, il résulte que la fonction arbitraire $f \in \mathscr{K}$ satisfait à l'inégalité suivante:

$$\text{(19)} \quad \operatorname{Re}\Big\{(\lambda - \sum_{m=1}^{N} \lambda_m)^2 \log f'(0) + \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \log\Big(\frac{z_m z_n}{f(z_m) f(z_n)} \cdot \frac{f(z_m) - f(z_n)}{z_m - z_n}\Big) +$$
$$+ 2\lambda \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log \frac{f(z_m)}{z_m} - \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_n \bar{\lambda}_m \log(1 + f(z_n)\overline{f(z_m)})\Big\}$$
$$\leqslant - \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_n \bar{\lambda}_m \log(1 - z_n \bar{z}_m).$$

Dans le cas où $m = n$ nous prenons comme valeur du quotient $\dfrac{f(z_m) - f(z_n)}{z_m - z_n}$ la valeur $f'(z_m)$. Cette inégalité est exacte, il existe une fonction $f \in \mathscr{K}$ qui réalise le signe d'égalité. Pour cette fonction la relation suivante est remplie:

$$(\lambda - \sum_{m=1}^{N} \lambda_m) \log \frac{f(\zeta)}{\zeta f'(0)} + \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log\Big(\frac{z_m}{f(z_m)} \cdot \frac{f(z_m) - f(\zeta)}{z_m - \zeta}\Big) -$$
$$- \sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log(1 + f(\zeta)\overline{f(z_m)}) = - \sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log(1 - \zeta \bar{z}_m).$$

Dans le cas particulier où l'on suppose que $\operatorname{Im} \sum_{m=1}^{N} \lambda_m = 0$, on peut poser $\lambda = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m$. Ainsi l'inégalité (19) prend la forme:

$$\text{(20)} \quad \operatorname{Re}\Big\{\sum_{m,n=1}^{N} \Big(\lambda_m \lambda_n \log \frac{f(z_m) - f(z_n)}{z_m - z_n} - \lambda_n \bar{\lambda}_m \log(1 + f(z_n)\overline{f(z_m)})\Big)\Big\}$$
$$\leqslant - \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_n \bar{\lambda}_m \log(1 - z_n \bar{z}_m).$$

Elle est exacte, la fonction extrémale satisfait à la relation:

$$\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \log\left(\frac{z_m}{f(z_m)} \frac{f(z_m)-f(\zeta)}{z_m-\zeta}\right) - \sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log\left(1+f(\zeta)\overline{f(z_m)}\right)$$
$$= -\sum_{m=1}^{N} \bar{\lambda}_m \log(1-\zeta\bar{z}_m).$$

L'inégalité (20) est analogue à l'inégalité de Goluzin pour la classe S, [3], p. 120.

En posant en particulier dans (20), $N = 1$, $\lambda_1 = 1$, $z_1 = z$, nous obtenons une inégalité connue, [7], notamment

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$$

qui est exacte dans la famille $\mathscr{K}$, et la fonction extrémale $f(u)$ satisfait à l'équation fonctionnelle:

$$\frac{1}{f(z)} \cdot \frac{f(z)-f(u)}{1+f(u)\overline{f(z)}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z-u}{1-\bar{z}u}.$$

2° Posons maintenant dans (16), $L(h) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m h'(z_m)$, λ_m étant des nombers complexes arbitraires, z_m – des points arbitraires du cercle U et $\lambda \neq 0$ réel. Un calcul facile donne l'inégalité:

$$(21)\quad \operatorname{Re}\left\{\lambda^2 \log f'(0) + 2\lambda \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)} - \frac{1}{z_m}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_m \lambda_n \left(\frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(f(z_m)-f(z_n))^2} - \frac{1}{(z_m-z_n)^2}\right) - \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_n \bar{\lambda}_m \frac{f'(z_n)\overline{f'(z_m)}}{\left(1+f(z_n)\overline{f(z_m)}\right)^2}\right\}$$
$$\leqslant \sum_{m,n=1}^{N} \lambda_n \bar{\lambda}_m \frac{1}{(1-z_n\bar{z}_m)^2}.$$

Dans le cas où $n = m$, nous posons:

$$(22)\quad \frac{f'(z_m)f'(z_n)}{(f(z_m)-f(z_n))^2} - \frac{1}{(z_m-z_n)^2} = \lim_{z\to z_m} \left(\frac{f'(z_m)f'(z)}{(f(z_m)-f(z))^2} - \frac{1}{(z_m-z)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{6}\left[\frac{d}{dz}\frac{f''(z)}{f'(z)}\Big|_{z=z_m} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z_m)}{f'(z_m)}\right)^2\right] = \frac{1}{6}\{f(z_m), z_m\},$$

où $\{f(z), z\}$ désigne l'opérateur de Schwarz au point z. L'inégalité (21) est exacte et la fonction extrémale satisfait à l'équation fonctionnelle:

$$(23)\quad \lambda \log\frac{f(\zeta)}{\zeta}+\sum_{m=1}^{N}\lambda_m\left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)-f(\zeta)}-\frac{1}{z_m-\zeta}\right)-\sum_{m=1}^{N}\bar{\lambda}_m\cdot\frac{\overline{f'(z_m)}f(\zeta)}{1+f(\zeta)\overline{f(z_m)}}-$$
$$-\sum_{m=1}^{N}\bar{\lambda}_m\frac{\zeta}{1-\zeta\bar{z}_m}=\lambda\log f'(0)+\sum_{m=1}^{N}\lambda_m\cdot\left(\frac{f'(z_m)}{f(z_m)}-\frac{1}{z_m}\right).$$

En particulier, en posant dans (21), $N=1$, $z_1=z$, en vertu de (22) nous obtenons l'inégalité:

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda^2\log f'(0)+2\lambda\lambda_1\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}\right)+\tfrac{1}{6}\lambda_1^2\{f(z),z\}-|\lambda_1|^2\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\right\}$$
$$\leqslant|\lambda_1|^2\frac{1}{(1-|z|^2)^2},$$

qui est une inégalité exacte, et la fonction qui réalise le signe d'égalité satisfait à la relation (23), dans laquelle on a fait les substitutions convenables.

Dans le cas où $\lambda=0$, d'après les théorèmes 3 et 4, l'inégalité suivante est remplie:

$$\mathrm{Re}\left[\lambda_1^2\{f(z),z\}\pm 6|\lambda_1|^2\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\right]\leqslant\frac{6|\lambda_1|^2}{(1-|z|^2)^2};$$

comme λ_1 est un nombre arbitraire, nous avons même

$$|\{f(z),z\}|\leqslant\frac{6}{(1-|z|^2)^2}-\frac{6|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}.$$

Cette inégalité est aussi exacte. Elle a été obtenue par Bereśniewicz-Rajca [1], qui a aussi déterminé la fonction extrémale.

3° Soit $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite arbitraire de nombers complexes, telle que

$$(24)\qquad \limsup_{n\to\infty}|\lambda_n|^{1/n}<1,$$

et λ un nombre réel arbitraire. D'après le théorème de Töplitz [9], il existe une fonctionnelle $L\in H'(U)$, telle que $L(z^n)=\lambda_n$, $n=1,\ldots$, $L(1)=0$. En admettant les notations

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}(f)z^m\zeta^n=\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta},\qquad \sum_{m,n=1}^{\infty}\bar{b}_{mn}(f,\bar{f})z^m\bar{\zeta}^n=\log\left(1+\overline{f(\zeta)}f(z)\right),$$

nous déduisons des théorèmes 2 et 3 que pour chaque fonction $f\in\mathscr{K}$, l'inégalité suivante est remplie:

$$(25)\quad \mathrm{Re}\left\{\lambda^2\log f'(0)+2\lambda\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m a_{m0}(f)+\sum_{m,n=1}^{\infty}\lambda_m\lambda_n a_{mn}(f)-\right.$$
$$\left.-\sum_{m,n=1}^{\infty}\lambda_m\bar{\lambda}_n b_{mn}(f,\bar{f})\right\}\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|\lambda_m|^2}{m}.$$

Cette inégalité est exacte, et dans le cas où $\lambda \neq 0$, il existe même une fonction f qui réalise l'égalité. Cette fonction satisfait aux relations suivantes:

$$\lambda a_{n0}(f)+\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mn}(f)-\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\lambda}_m b_{mn}(f,\bar{f}) = \frac{1}{n}\cdot\bar{\lambda}_n, \qquad n = 1, \ldots$$

et

$$\operatorname{Re}\{\lambda \log f'(0)+\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{m0}(f)\} = 0.$$

L'inégalité (25) est analogue à l'inégalité de Grunsky pour les fonctions de la classe $\mathscr{K}$.

Enfin, remarquons, que satisfaire à l'inégalité (25) par chaque suite $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ qui remplit la condition (24) et par chaque λ réel équivant satisfaire à l'inégalité (16) par chaque $L \in H'(U)$, $L(1) = 0$, et par chaque nombre réel λ. Cela résulte aussi du théorème de Töplitz sur la représentation générale de la fonctionnelle de $H'(U)$. L'inégalité (16) n'est alors pas plus forte que l'inégalité (25) et c'est pourquoi on peut l'appeler inégalité de Grunsky pour les fonctions de la classe $\mathscr{K}$.

Travaux cités

[1] O. Bereśniewicz-Rajca, *Schwarzian for the functions of Shah–Tao–Shing*, Demonstratio Math. 9 (1976), 307–319.

[2] R. Caccioppoli, *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 13 (1931), 263–266.

[3] G. M. Goluzin, *Geometričeskaya teorya funkcii kompleksnogo peremennogo*, Moskva 1966, 68–109, 157–158.

[4] A. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1958, 197–204.

[5] H. Jondro, *Sur une méthode variationnelle dans la famille des fonctions de Grunsky–Shah*, Bull. Acad. Polon. Sci. 27 (1979), 541–547.

[6] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Grundlehren math. Wiss. 159, Springer-Verlag, New York 1969.

[7] N. A. Lebedev, *Princip ploščadeĭ v teorii odnolistnych funkciĭ*, Nauka, Moskva 1975, 167–234.

[8] G. Schober, *Univalent functions, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 478, Springer-Verlag, 1975.

[9] O. Töplitz, *Die linearen vollkommenen Räume der Funktionstheorie*, Comment. Math. Helv. 23.

Reçu par la Rédaction le 30.05.1981