ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

9.2.1.

Sur l'existence d'une solution d'une équation différentielle à argument avancé

par J. BŁAŻ (Katowice)

Dans ce travail j'établis des conditions suffisantes pour que l'équation intégro-différentielle, que j'appellerai équation à argument avancé, de la forme

$$\varphi'(t) = \int_0^\infty f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]dr(t, s) \tag{1}$$

admette exactement une solution, définie dans l'intervalle $\Delta = \langle 0, +\infty)$ et satisfaisant à la condition initiale $\varphi(0) = \eta$. Je généralise ainsi des résultats de S. Doss et K. Nasr [6], relatifs aux solutions bornées de l'équation $dx/dt = f[t, x(t), x(t+h)]$, $h = \text{const} > 0$, et aussi celui du travail [4], obtenu pour l'équation $dx/dt = f\big[t, x\big(t+a(t)\big)\big]$, dans laquelle l'avance de l'argument est variable, et pour des systèmes d'équations de ce type. Le problème de l'existence d'une solution de l'équation différentielle à argument avancé plus simple $dx/dt = f\big[t, x(t), x\big(t+a(t)\big)\big]$ a été étudié récemment par A. Bielecki [1] et T. Dłotko [5]; ils ont établi les conditions suffissantes pour l'existence d'une solution de cette équation dans certaines classes de fonctions, plus étendues que celle des fonctions bornées.

L'équation (1) correspond au cas où la vitesse d'un processus à un instant donné dépend de l'état de ce processus dans un intervalle de temps antérieur à l'instant donné.

Au § 1 j'étudie le cas où cet intervalle est infini; j'y étalbis un théorème sur l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1) dans la classe des fonctions bornées.

Au § 2 je m'occupe du cas où l'intervalle de temps considéré est borné. En utilisant la métrique proposée par A. Bielecki [2] j'obtiens un théorème d'existence dans une classe de fonctions plus étendue que celle des fonctions bornées.

Je tiens à exprimer ma vive reconnaissance à M. A. Bielecki et M. T. Dłotko, qui ont bien voulu me communiquer les resultats contenus dans les notes [1] et [5].

§ 1. Sur l'équation (1) nous ferons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES (H). 1° *La fonction $f(t, x, y)$ est définie et continue dans le domaine $D = \{(t, x, y)\colon\ 0 \leqslant t,\ -\infty < x, y < +\infty\}$.*

2° *Tout couple de points (t, X, Y) et (t, x, y) du domaine D satisfait à l'inégalité*

$$|f(t, X, Y) - f(t, x, y)| \leqslant \beta_1(t)\,|X - x| + \beta_2(t)\,|Y - y|\,,$$

où les coefficients $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ sont des fonctions continues et non négatives dans l'intervalle Δ.

3° $\int\limits_0^\infty [\beta_1(t) + \beta_2(t)]\,dt = q < +\infty.$

4° *Il existe un couple de nombres x_0, y_0 tel que*

$$\int\limits_0^\infty |f(t, x_0, y_0)|\,dt = C < +\infty\,.$$

5° *La fonction $r(t, s)$, que j'appellerai noyau, est définie pour $t \geqslant 0$ et $s \geqslant 0$.*

6° *Pour tout $t \in \Delta$ on a les relations $r(t, 0) \equiv 0$, variation $\bigvee\limits_{s=0}^{\infty} r(t, s) \leqslant V =$* const.

7° *Quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $K > 0$ telque $\bigvee\limits_{s=K}^{\infty} r(t, s) < \varepsilon$ pour tout $t \in \Delta$.*

8° *Quels que soient $k > 0$ et $u \in \Delta$, il existe la limite*

$$\lim_{t \to u} \int\limits_0^k |r(t, s) - r(u, s)|\,ds = 0\,.$$

Admettant les hypothèses (H) nous établirons un lemme sur la continuité de l'intégrale de Stieltjes:

LEMME. *Si la fonction $\varphi(t)$ est continue et bornée dans l'intervalle Δ, la fonction*

$$\Theta(t) = \int\limits_0^\infty f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]\,dr(t, s) \tag{2}$$

est continue dans l'intervalle Δ (1).

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons démontrer que la fonction $\Theta(t)$ est continue en tout point u de l'intervalle Δ. On voit aisément que

$$|\Theta(t) - \Theta(u)|$$
$$= \Big|\int\limits_0^\infty f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]\,dr(t, s) - \int\limits_0^\infty f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)]\,dr(u, s)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{4} A_i\,,$$

(1) Vide [3].

où

$$A_1 = \left| \int_0^K \{f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)] - f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)]\} dr(t, s) \right| ,$$

$$A_2 = \left| \int_K^\infty f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)] dr(t, s) \right| ,$$

$$A_3 = \left| \int_K^\infty f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)] dr(u, s) \right| ,$$

$$A_4 = \left| \int_0^K f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)] dr(t, s) - \int_0^K f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)] dr(u, s) \right| ,$$

K étant un nombre positif quelconque fixé (pour l'instant). Comme

$$A_1 \leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant K} |f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)] - f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)]| V ,$$

la fonction A_1 est, en vertu de l'hypothèse 1°, arbitrairemen petite dès que les t sont assez proches de u. De l'hypothèse du lemme et de 1° résulte que la fonction $f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]$ est bornée pour les t assez proches de u, donc

$$A_2(t) \leqslant M \bigvee_{s=K}^{\infty} r(t, s) ,$$

où M est un nombre positif convenable. Il suit de là et de 7° que la constante K peut être choisie de manière que la fonction A_2 devienne aussi petite que l'on veut. Un raisonnement analogue s'applique à la fonction A_3. La fonction A_4 admet une limitation qui ne diffère pas essentiellement de celle qui a été donnée par A. D. Myszkis (v. [7], p. 22) pour le cas d'un argument retardé. La démonstration du lemme se trouve ainsi achevée.

En appliquant la méthode du point fixe nous établirons maintenant un théorème d'existence.

THÉORÈME I. *Si les hypothèses* (H) *et l'inégalité* $qV < 1$ *sont vérifiées, il existe dans la classe des fonctions bornées exactement une solution de l'équation* (1) *définie dans l'intervalle* Δ *et vérifiant la condition initiale* $\varphi(0) = \eta$.

Démonstration. Remarquons d'abord que, en vertu du lemme, l'équation (1) est équivalente à l'équation intégrale

$$\varphi(t) = \int_0^t \left\{ \int_0^\infty f[\tau, \varphi(\tau), \varphi(\tau+s)] dr(\tau, s) \right\} d\tau + \eta . \tag{3}$$

Désignons par E l'ensemble des fonctions $\varphi(t)$ continues et bornées dans l'intervalle Δ, c'est-à-dire vérifiant la condition $\|\varphi\| = \sup_{t \geqslant 0} |\varphi(t)| < +\infty$, la métrique étant définie par

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sup_{t \geqslant 0} |\varphi(t) - \psi(t)| = \|\varphi - \psi\| . \tag{4}$$

L'ensemble E est évidemment un espace métrique complet. Considérons dans l'espace E la transformation F:

$$\tilde{\varphi}(t) = F(\varphi) = \int_0^t \Big\{ \int_0^\infty f[\tau, \varphi(\tau), \varphi(\tau+s)]\, dr(\tau, s) \Big\} d\tau + \eta \,. \tag{5}$$

Nous allons prouver que

$$F(E) \subset E \quad \text{et} \quad \varrho[F(\varphi), F(\psi)] \leqslant \alpha \varrho(\varphi, \psi)\,, \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \,. \tag{6}$$

En effet, il résulte de l'hypothèse 2° qu'on a les inégalités

$$\begin{aligned}
&|f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]| \\
&\qquad \leqslant |f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)] - f(t, x_0, y_0)| + |f(t, x_0, y_0)| \\
&\qquad \leqslant \beta_1(t)\,|\varphi(t) - x_0| + \beta_2(t)\,|\varphi(t+s) - y_0| + |f(t, x_0, y_0)| \\
&\qquad \leqslant (a + \|\varphi\|)[\beta_1(t) + \beta_2(t)] + |f(t, x_0, y_0)| \,,
\end{aligned}$$

$$\text{où } a = \max(|x_0|, |y_0|) \,.$$

D'où, en vertu de (5) et des hypothèses 3°, 4° et 6° on tire les inégalités

$$\begin{aligned}
|\tilde{\varphi}(t)| &\leqslant (a + \|\varphi\|) \int_0^t [\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)] \mathop{\mathrm{V}}_{s=0}^{\infty} r(\tau, s)\, d\tau + \int_0^t |f(\tau, x_0, y_0)| \mathop{\mathrm{V}}_{s=0}^{\infty} r(\tau, s)\, d\tau + |\eta| \\
&\leqslant [(a + \|\varphi\|) q + C] V + |\eta| = \text{const} \,.
\end{aligned}$$

D'autre part, comme

$$|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\psi}(t)| \leqslant \varrho(\varphi, \psi) \int_0^\infty [\beta_1(t) + \beta_2(t)] \mathop{\mathrm{V}}_{s=0}^{\infty} r(t, s)\, dt \leqslant V q \varrho(\varphi, \psi)$$

et $0 < Vq < 1$, les relations (6) sont vérifiées. Par conséquent, en vertu du théorème de Banach, la démonstration du théorème est achevée.

Remarque 1. En particulier si l'on pose $r(t, s) = e\big(s - a(t)\big)$, où

$$e(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad -\infty < u \leqslant 0 \,, \\ 1 & \text{pour} \quad 0 < u < +\infty \,, \end{cases}$$

l'équation (1) prend la forme $\varphi'(t) = f\big[t, \varphi(t), \varphi\big(t + a(t)\big)\big]$, dans laquelle l'avance de l'argument (discrète) est variable; lorsque $a(t) \equiv h = \text{const}$ on obtient l'équation considérée par S. Doss et K. Nasr, dans laquelle l'avance est constante.

Remarque 2. Les hypothèses (H) n'assurent pas l'unicité de la solution de l'équation [1] dans la classe des fonctions continues; outre la solution bornée unique il peut exister une seconde solution non bornée de cette équation satisfaisant à la même condition initiale, comme le montre l'exemple de l'équation

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(2t)}{1 - e^t}, \quad t \geqslant 1, \; \varphi(1) = e,$$

pour laquelle on a, outre la solution $\varphi(t) = e$, la solution non bornée $\varphi(t) = e^t$.

Remarque 3. Si $\varphi(t)$ est une solution bornée de l'équation (1), la fonction $\varphi(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$. En effet, en vertu des hypothèses (H) il vient

$$J(t) = \int_0^t \left| \int_0^\infty f[\tau, \varphi(\tau), \varphi(\tau+s)]\, dr(\tau, s) \right| d\tau \leqslant [(a + \|\varphi\|)q + c]V = \text{const}.$$

D'autre part, comme la fonction $J(t)$ est non décroissante, l'intégrale

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]\, dr(t, s) \right\} dt$$

est convergente.

§ 2. Considérons maintenant le cas où la vitesse du processus décrit par l'équation (1) à un instant donné dépend de l'état de ce processus dans un intervalle de temps fini, antérieur à l'instant donné. Au lieu des hypothèses (H) admettons les hypothèses (H*):

HYPOTHÈSES (H*). 1° *On suppose vérifiées les conditions* 1°, 2°, 4° *et* 5° *des hypothèses* (H) (§ 1) *et de plus*:

2° *Il existe une fonction* $\sigma(t)$ *continue et non négative dans l'intervalle* Δ *telle que* $r(t, 0) \equiv 0$, $\bigvee_{s=0}^{\sigma(t)} r(t, s) \leqslant V = \text{const}$ *et que* $r(t, s) = r\big(t, \sigma(t)\big)$ *pour* $\sigma(t) < s < +\infty$; $t \in \Delta$.

3° *Quel que soit* $u \in \Delta$ *la condition*

$$\lim_{t \to u} \int_0^{\sigma(t)+1} |r(t, s) - r(u, s)|\, ds = 0$$

est vérifiée.

4° $\sup\limits_{t \geqslant 0} \Lambda(t) = \Lambda < +\infty$, *où* $\Lambda(t) = \int_t^{t+\sigma(t)} [\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)]\, d\tau$.

De même qu'au § 1 nous établirons d'abord un lemme sur la continuité de l'intégrale de Stieltjes (2).

LEMME. *Si la fonction* $\varphi(t)$ *est continue dans l'intervalle* Δ *et si les hypothèses* (H*) *sont vérifiées, la fonction* $\Theta(t)$, *définie par la formule* (2) *est continue dans l'intervalle* Δ.

Démonstration. Soit u un nombre arbitrairement fixé de l'intervalle Δ; choisissons un nombre $\delta > 0$ assez petit pour qu'on ait $\sigma(t) \leqslant \sigma(u)+1$ pour $|t-u| \leqslant \delta$. Il est facile de vérifier que l'on a alors l'inégalité $|\Theta(t)-\Theta(u)| \leqslant A_1^* + A_2^*$, où

$$A_1^* = \Big|\int\limits_0^{\sigma(u)+1} \{f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)] - f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)]\} dr(t, s)\Big|,$$

$$A_2^* = \Big|\int\limits_0^{\sigma(u)+1} f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)] dr(t, s) - \int\limits_0^{\sigma(u)+1} f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)] dr(u, s)\Big|.$$

Comme

$$|f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)] - f[u, \varphi(u), \varphi(u+s)]| \leqslant \beta_1(t)|\varphi(t)-\varphi(u)| + \beta_2(t)|\varphi(t+s)-\varphi(u+s)|,$$

on a

$$A_1^* \leqslant V \max_{0\leqslant s\leqslant\sigma(u)+1} \{\beta_1(t)|\varphi(t)-\varphi(u)| + \beta_2(t)|\varphi(t+s)-\varphi(u+s)|,$$

d'où on déduit aisément que la fonction A_1^* tend vers zéro lorsque $t \to u$. La fonction A_2^* ne diffère pas de la fonction A_4 (§ 1); la conclusion du lemme en résulte immédiatement.

Considérons maintenant, suivant l'exemple de A. Bielecki [2], l'ensemble E_k des fonctions $\varphi(t)$ définies et continues dans l'intervalle Δ et satisfaisant à la condition

$$\sup_{t\geqslant 0} \{|\varphi(t)| e^{-k\Phi(t)}\} = \|\varphi\| < +\infty,$$

la métrique étant définie par

$$\varrho(\varphi, \psi) = \sup_{t\geqslant 0} \{|\varphi(t)-\psi(t)| e^{-k\Phi(t)}\} = \|\varphi-\psi\|,$$

où

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t [\beta_1(\tau)+\beta_2(\tau)] d\tau$$

et k est un nombre positif.

L'ensemble E_k est un espace métrique complet; nous allons prouver que la transformation (5) définie dans l'espace E_k satisfait aux conditions (6). En effet, soit $\varphi(t) \in E_k$; alors

$$|\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\| e^{k\Phi(t)},$$

donc

$$|\varphi(t)-x_0| \leqslant \Gamma e^{k\Phi(t)} \quad \text{et} \quad |\varphi(t+s)-y_0| \leqslant \Gamma e^{k\Phi(t+\sigma(t))},$$

où $\Gamma = \max(|x_0|, |y_0|) + \|\varphi\|$. En vertu des hypothèses (H*) on en conclut que

$$|f[t, \varphi(t), \varphi(t+s)]| \leqslant \Gamma[\beta_1(t) e^{k\Phi(t)} + \beta_2(t) e^{k\Phi(t+\sigma(t))}] + |f(t, x_0, y_0)|$$
$$\leqslant \Gamma[\beta_1(t) + \beta_2(t) e^{k\Lambda(t)}] e^{k\Phi(t)} + |f(t, x_0, y_0)|.$$

Donc

$$|\tilde{\varphi}(t)| \leqslant \Gamma V e^{kA}/k \int_0^t k[\beta_1(\tau)+\beta_2(\tau)]e^{k\Phi(\tau)}d\tau + V\int_0^t |f(\tau, x_0, y_0)|d\tau + |\eta|$$

$$\leqslant \Gamma V e^{kA}/k \int_0^t k\Phi'(\tau)e^{k\Phi(\tau)}d\tau + VC + |\eta| \leqslant Qe^{k\Phi(t)},$$

où Q est un nombre positif convenablement choisi. Par conséquent $\|\tilde{\varphi}(t)\| \leqslant Q < +\infty$, ce qui signifie que $\tilde{\varphi}(t) \in E_k$. Comme, d'autre part,

$$|\tilde{\varphi} - \tilde{\psi}| \leqslant \|\varphi - \psi\| V \int_0^t [\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)e^{kA(\tau)}]e^{k\Phi(\tau)}d\tau$$

$$\leqslant \|\varphi - \psi\| V e^{kA}/k \int_0^t k\Phi'(\tau)e^{k\Phi(\tau)}d\tau = (\|\varphi-\psi\| V e^{kA}/k)e^{k\Phi(t)},$$

il vient

$$\|\tilde{\varphi} - \tilde{\psi}\| \leqslant \|\varphi - \psi\| V e^{kA}/k .$$

Si l'on suppose enfin vérifiée l'inégalité

$$Ve^{kA}/k < 1, \tag{7}$$

on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME II. *Si les hypothèses* (H*) *et l'inégalité* (7) *sont vérifiées, il existe dans la classe E_k exactement une solution de l'équation* (1) *satisfaisant à la condition initiale $\varphi(0) = \eta$.*

Remarque. Comme la fonction $z(k) = e^{kA}/k$ est minimum pour $k = 1/A$, l'inégalité (7) peut être remplacée, pour la classe $E_{1/A}$, par la condition $AVe < 1$, c'est-à-dire par l'inégalité

$$\sup_{t\geqslant 0} \int_0^{t+\sigma(t)} [\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)]d\tau < 1/eV .$$

Travaux cités

[1] A. Bielecki, *Certaines conditions suffissantes pour l'existence d'une solution de l'équation $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t), \varphi(\nu(t))\big)$*, Folia Soc. Sci. Lublinensis 2 (1962), p. 70-73.

[2] — *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 261-264.

[3] — et M. Maksym, *Sur une généralization d'un théorème de A. D. Myshkis concernant un systeme d'équations differentielles ordinaires à argument retardé*, Folia Soc. Sci. Lublinensis 2 (1962), p. 74-78.

[4] J. Błaż, *O istnieniu rozwiązania układu równań różniczkowych z wyprzedzającym argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP Katowice 3 (1962), p. 7-11.

[5] T. Dłotko, *Sur une methode de A. Bielecki appliquée à l'équation* $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t), \varphi(h(t))\big), h(t) \geqslant t$, Ann, Univ. Mariae Curie-Skłodowska (sous presse).

[6] S. Doss, K. Nasr, *On the functional equation* $dy/dx = f[x, y(x), y(x+h)]$, $h > 0$, Amer. Journ. Math. LXXV, 4 (1953), p. 713-716.

[7] A. D. Мышкис (A. D. Myszkis), *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Moskwa-Leningrad 1951.

Reçu par la Rédaction le 13. 11. 1961