ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLV (1985)

О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений

Нгуен Ван Мау (Ханой, Вьетнам)

В заметке изучаются полные сингулярные интегральные уравнения вида

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int_{\Gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t). \tag{1}$$

К настоящему времени хорошо изучены теории Нетера для данного класса полных уравнений (1) в различных пространствах. Известно, что характеристические уравнения и союзные с ними для уравнений (1) (при $K(t,\tau)=0$) приводятся ко краевой задаче Римана и было показано, что они решаются в замкнутой форме ([1], [3]). Полные сингулярные интегральные уравнения (1) не решаются, вообще говоря, в замкнутой форме и в общем случае будут сведены к уравнениям Фредгольма. Однако имеется ряд случаев, когда уравнение (1) может быть решено в замкнутой форме ([1]–[5]). Наиболее общий класс полных уравнений (1), допускающих искать решение в замкнутой форме, исследовался в [5] (см. также [1]) в случае, когда функция $\big(a(t)+b(t)\big)^{-1}K(t,\tau)$ аналитична (или мероморфна) по τ и t в области D^+.

В настоящей заметке доказывается некоторое достаточное условие аналитического продолжения сингулярных интегральных операторов и исследуется новый общий класс уравнений вида (1), разрешимых в замкнутой форме. Этот класс содержит в частности многие уравнения, рассматриваемы в [1]–[5]. Далее в § 3 приводится один конкретный пример, допускающий искать решение в замкнутой форме.

§ 1. Пусть Γ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур, ограничивающий односвязную область D^+. Всюду ниже предполагается, что функция $M(t,\tau)$ определена и непрерывна по обеим переменным $(t,\tau)\in\Gamma\times\Gamma$.

Введем обозначения [5]:

$$(\boldsymbol{K}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t},\quad (S_M\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{M(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}. \tag{3}$$

В дальнейшем $\varphi \in \boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}$ означает пространство гёлдеровских функций $H^\lambda(\Gamma), 0 < \lambda \leqslant 1$.

Обозначим $P = \frac{1}{2}(I+S)$; $Q = \frac{1}{2}(-I+S)$. Тогда, на основании формул Сохоцкого [1], [3], будем иметь

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^+ \oplus \boldsymbol{B}^- \quad \text{где} \quad \boldsymbol{B}^+ = P\boldsymbol{B}; \quad \boldsymbol{B}^- = Q\boldsymbol{B}.$$

Лемма 1 ([1], [5]). *Если функция $M(t, \tau)$ аналитически продолжима в область D^+ по обеим переменным $(t, \tau) \in \Gamma \times \Gamma$ и $M(t, t) \equiv 0$, то*

1° $(\boldsymbol{K}\varphi)(t) \in \boldsymbol{B}^+$ *для всякой функции* $\varphi \in \boldsymbol{B}$.

2° $(\boldsymbol{K}\varphi)(t) = 0$ *для всякой функции* $\varphi \in \boldsymbol{B}^+$.

Следствие 1, [5]. *Если все условия леммы* 1 *выполнены, то*

$$(Q\boldsymbol{K}\varphi)(t) = (\boldsymbol{K}P\varphi)(t) = 0, \quad t \in \Gamma.$$

Лемма 2. *Пусть все функции $K_j(t, \tau)$, $M_j(t, \tau)$; $j = 1, 2$, аналитически продолжимы в D^+ по обеим переменным и пусть*

$$K_j(t, t) = M_j(t, t) - 1 = 0, \quad \forall t \in \Gamma; \quad j = 1, 2.$$

Тогда

$$I + S_{K_1} - S_{K_2} = S_{M_1} \cdot S_{M_2}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in B$. Из следствия 1 следует, что

$$SS_{K_j} = S_{K_j}; \quad S_{K_j}S = -S_{K_j},$$

ледовательно

$$SS_{K_j} + S_{K_j}S = S_{K_i} - S_{K_j}; \quad S_{K_i}S_{K_j} = 0.$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} S_{M_2} \cdot S_{M_1} &= (S_{K_2} + S) \cdot (S_{K_1} + S) = \\ &= S_{K_2} \cdot S_{K_1} + (S_{K_2}S + SS_{K_1}) + I = S_{K_1} - S_{K_2} + I. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 2. *Если $M_1(t, \tau) - M_2(t, \tau) = M_0(t, \tau)$ и функции $M_j(t, \tau)$ аналитически продолжим в области D^+ по обеим переменным и $M_1(t, t) = M_2(t, t) = 1$, то*

$$S_{M_1}S_{M_2} = I - S_{M_0}; \quad S_{M_2}S_{M_1} = I + S_{M_0}.$$

В частности, $S^2_{M_1} = I$.

Теорема 1. *Пусть $M(t, \tau)$ аналитически продолжима в область D^+ по t и $M(t, t) = 0$, $\forall t \in \Gamma$. Пусть для всякой $\tau \in \Gamma$ справедливо неравенство*

$$|M(t_1, \tau) - M(t_2, \tau)| \leqslant A|t_1 - t_2|; \quad \forall t_1, t_2 \in \Gamma; \quad A = \text{const}.$$

Тогда $(S_M\varphi)(t)\in \boldsymbol{B}^+$ *для всякой* $\varphi(t)\in \boldsymbol{B}$.

Доказательство. При $t_1\neq t_2$ имеем

$$\left|\frac{M(t_1,\tau)-M(t_2,\tau)}{t_1-t_2}\right|\leqslant A.$$

Согласно теореме Уолш–Сиуем [6], последнее равенство справедливо для всех $t_1, t_2\in D^+\cup\Gamma$. В частности,

$$\left|\frac{M(z,\tau)-M(t,\tau)}{z-t}\right|\leqslant A;\quad \forall z\in D^+,\quad \forall t\in\Gamma.$$

Отсюда следует, что функция

$$F(z)=\int\limits_\Gamma \frac{M(z,\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}$$

является аналитической функцией в D^+. Далее, применив метод доказательства основной леммы в [1] (стр. 34) убедимся, что функция $F(z)$ ведет себя при переходе через точку $z=t$ контура Γ как функция непрерывная, т. е., $(S_M\varphi)(t)\in \boldsymbol{B}^+$.

Теорема доказана.

§ 2. Рассмотрим уравнение

$$a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t) \tag{6}$$

в пространстве $\boldsymbol{B}$. Запишем его в виде

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M(t,\tau)-M(t,t)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t),$$

где $b(t)=M(t,t)$.

Пусть $a(t), b(t)\in \boldsymbol{B}$, $a(t)\pm b(t)\neq 0$, $\forall t\in\Gamma$ и пусть функции $N_j(t,\tau)$ $(j=1,2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$N_1(t,t)=N_2(t,t)=0,\quad \forall t\in\Gamma, \tag{7}$$

$$M(t,\tau)-M(t,t)=N_1(t,\tau)-N_2(t,\tau). \tag{8}$$

В этом пункте мы используем следующие обозначения

$$M_1(t,\tau)=\frac{N_1(t,\tau)}{a(t)+b(t)};\quad M_2(t,\tau)=\frac{N_2(t,\tau)}{a(t)-b(t)}, \tag{9}$$

$$M_{12}(t,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M_1(t,\tau)M_2(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau-\frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{M_1(t,\tau)M_2(\tau,\tau_1)}{\tau-t}d\tau, \tag{10}$$

$$(11)\quad M_{21}(t,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{M_2(t,\tau)M_1(\tau,\tau_1)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Очевидно, $M_{12}(t,t)=M_{21}(t,t)=0, \forall t\in\Gamma$.

Теорема 2. *Пусть функции $N_1(t,\tau), N_2(t,\tau)$ удовлетворяют условиям* (7)–(8) *и пусть функции $M_1(t,\tau)$ и $M_2(t,\tau)$ аналитически продолжимы в D^+ и D^- ($\infty\in D^-=C\setminus\{D^+\cup\Gamma\}$) соответственно по обеим переменным. Тогда уравнение* (6) *разрешимо в замкнутой форме в следующих случаях:*

1° *Функция $M_{12}(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным.*

2° *Функция $M_{21}(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^- по обеим переменным.*

Доказательство. Пусть уравнение (6) разрешимо. Тогда можно писать уравнение (6) в следующим виде [1], [3]:

$$(12)\quad \varphi^+(t)+(S_{M_1}\varphi^-)(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\cdot[\varphi^-(t)+(S_{M_2}\varphi^+)(t)]+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}$$

где $\varphi^+(t)=(P\varphi)(t)$; $\varphi^-(t)=(Q\varphi)(t)$.

Из условий, наложенных на функции $M_1(t,\tau), M_2(t,\tau)$ следует, что функции

$$(13)\quad \Phi^+(t)=\varphi^+(t)+(S_{M_1}\varphi^-)(t)\in \boldsymbol{B}^+,$$

$$(14)\quad \Phi^-(t)=\varphi^-(t)+(S_{M_2}\varphi^+)(t)\in \boldsymbol{B}^-.$$

Поэтому, соотношение (12) представляет собой обычную задачу Римана, из которой в замкнутой форме определяются функции $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$.

Рассмотрим случай 1° (относительно случая 2° рассматривается аналогичным образом). Из (13) и (14) следует, что

$$\varphi^+(t)-(S_{M_{12}}\varphi^+)(t)=\Phi^+(t)-(S_{M_1}\Phi^-)(t).$$

Из условий, наложенных на функции $M_{12}(t,\tau)$ следует, что

$$(I-S_{M_{12}})^{-1}=I+S_{M_{12}}\quad \text{(см. следствие 2)}.$$

Отсюда

$$\varphi^+(t)=[(I+S_{M_{12}})(\Phi^+-S_{M_1}\Phi^-)](t),\qquad \varphi^-(t)=\Phi^-(t)-(S_{M_2}\Phi^+)(t).$$

Тогда, решение интегрального уравнения (6) вычисляется по формуле $\varphi(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть функция $M_1(t,\tau)$ удовлетворяет всем условиям теоремы* 1 *и функция $M_2(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^- по обеим переменным. Пусть далее, функция*

$$M_{11}(t,\tau)=M_1(t,\tau)-M_{12}(t,\tau)$$

аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным. Тогда уравнение (6) *разрешимо в замкнутой форме.*

Доказательство. Перепишем уравнение (6) в следующем виде

$$\varphi^+(t)+(S_{M_1}\varphi)(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\,[\varphi^-(t)+(S_{M_2}\varphi)(t)]+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Из условий; наложенных на функции $M_1(t,\tau)$ и $M_2(t,\tau)$ следует, что

$$(S_{M_2}\varphi^-)(t)=0;\qquad \Phi^-(t)=\varphi^-(t)+(S_{M_2}\varphi^+)(t)\in \boldsymbol{B}^-,\tag{15}$$

$$\Phi^+(t)=\varphi^+(t)+(S_{M_1}\varphi)(t)\in \boldsymbol{B}^+.\tag{16}$$

Вновь мы пришли к задаче Римана, из которой функции $\Phi^\pm(t)$ опреде ляются в замкнутой форме. Далее из (15) и (16) будем иметь

$$\varphi^+(t)+(S_{M_{11}}\varphi^+)(t)=\Phi^+(t)-(S_{M_1}\Phi^-)(t).$$

Отсюда, в силу следствия 2, следует, что

$$\varphi^+(t)=[(I-S_{M_{11}})(\Phi^+-S_{M_1}\Phi^-)](t),\qquad \varphi^-(t)=\Phi^-(t)-(S_{M_2}\Phi^+)(t).$$

Тогда решение интегрального уравнения (6) вычисляется по формуле $\varphi(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим общий случай, когда функции $M_1(t,\tau)$ и $M_2(t,\tau)$ мероморфно продолжимы в D^+ и D^- соответственно.

Применим следующие представления, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть функция $M_1(t,\tau)$ мероморфно продолжима в D^+ по обеим переменным и $M_1(t,t)=0$, $t\in\Gamma$. Пусть далее,*

1° *$M_1(t,\tau)$ имеет полюсы по переменной t порядков α_k в точках z_k, где $z_k\in D^+$; $k=1,2,\ldots,p$.*

2° *$M_1(t,\tau)$ имеет полюсы по переменной τ порядков β_j в точках ζ_j, где $\zeta_j\in D^+$; $j=1,2,\ldots,q$.*

Тогда имеется следующее представление

$$M_1(t,\tau)=\frac{\tau-t}{H(t)}\,[M_0(t,\tau)+\sum_{k=0}^{q}H_k(t,\tau)]\quad \text{где } H(t)=\prod_{k=1}^{p}(t-z_k)^{\alpha_k};\tag{17}$$

$$H_k(t,\tau)=\sum_{j=1}^{\beta_k\ \ 1}a_{jk}(t)(\tau-\zeta_k)^{j-\beta_k};\quad k=1,2,\ldots,q.$$

$M_0(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным.

Доказательство. Введем обозначение

$$\tilde M_1(t,\tau)=(\tau-t)^{-1}H(t)M_1(t,\tau).$$

Тогда функция $\tilde M_1(t,\tau)$ аналитически продолжается по t в D^+ и функция $(\tau-\zeta_k)^{\beta_k}\cdot\tilde M_1(t,\tau)$ аналитична в окрестности ζ_k по переменной τ. В этой окрестности будем иметь следующее разложение

$$(\tau-\zeta_k)^{\beta_k}\cdot \tilde{M}_1(t,\tau)=\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk}(t)(\tau-\zeta_k)^j;\qquad k=1,2,\ldots,q.$$

Отсюда $\tilde{M}_1(t,\tau)=H_k(t,\tau)+M_0(t,\tau)$, где $M_0(t,\tau)$ аналитична в окрестности ζ_k. Продолжая этот процесс относительно остальных точек, мы получим формулу (17). Лемма доказана.

Аналогично легко доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть функция $M_2(t,\tau)$ мероморфно продолжима в D^- по обеим переменным и $M_2(t,t)=0$, $\forall t\in\Gamma$. Пусть далее функция $M_2(t,\tau)$ имеет по переменной t полюсы порядков α_k' в точках $z_k'\in D^-$; $z_k'\neq\infty$; $k=1,2,\ldots,p'$ и по переменной τ полюсы порядков β_j' в точках $\zeta_j'\in D^-$; $\zeta_j'\neq\infty$; $j=1,2,\ldots,q'$.*

Тогда справедливо следующее представление

$$M_2(t,\tau)=\frac{\tau-t}{X(t)}\Big[N_0(t,\tau)+\sum_{k=1}^{q'}X_k(t,\tau)\Big] \tag{18}$$

где

$$X(t)=\prod_{k=1}^{p'}(t-z_k')^{\alpha_k'};\qquad z_k'\in D^-,$$

$$X_k(t)=\sum_{j=0}^{\beta_k-1} b_{jk}(t)(\tau-\zeta_k')^{j-\beta_k'};\quad k=1,2,\ldots,q.$$

$N_0(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^- по обеим переменным.

Используя представления (17)–(18), получим

$$(S_{M_1}\varphi)(t)=\frac{1}{H(t)}\Big[(M_0\varphi)(t)+\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{\beta_k-1}c_{jk}a_{jk}(t)\Big] \tag{19}$$

где

$$(M_0\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} M_0(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$c_{jk}=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}(\tau-\zeta_k)^{j-\beta_k}\varphi(\tau)d\tau;\quad k=1,2,\ldots,q;\ j=1,2,\ldots,\beta_k-1.$$

Аналогично имеем:

$$(S_{M_2}\varphi)(t)=\frac{1}{X(t)}\Big[(N_0\varphi)(t)+\sum_{k=1}^{q'}\sum_{j=1}^{\beta_k'-1}c_{jk}'\cdot b_{jk}(t)\Big] \tag{19'}$$

где

$$(N_0\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}N_0(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$c'_{jk}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\tau-\zeta'_k)^{j-\beta'_k}\varphi(\tau)d\tau;\quad k=1,2,\ldots,q';\ j=1,2.$$

Условимся обозначать

$$\tilde{M}_{12}(t,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(\tau_1-t)M_0(t,\tau)N_0(\tau,\tau_1)}{H(t)X(\tau)}\,d\tau,$$

(20)

$$\tilde{M}_{21}(t,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{(\tau_1-t)N_0(t,\tau)M_0(\tau,\tau_1)}{H(\tau)X(t)}\,d\tau.$$

Теорема 4. *Пусть функции $M_1(t,\tau)$ и $M_2(t,\tau)$ удовлетворяют условиям леммы 3 и 4 соответственно. Тогда уравнение* (6) *разрешимо в замкнутой форме в следующих случаях:*

1° *Функция $M_{12}(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным*

2° *Функция $M_{21}(t,\tau)$ аналитически продолжима в D^- по обеим переменным*

Доказательство. Для случая 1°. Ради простоты, положим

$$\mu=\max_{1\leqslant k\leqslant q}\beta_k;\quad \mu'=\max_{1\leqslant k\leqslant q'}\beta'_k;\quad \mu_0=q\mu+q'\cdot\mu';\quad \nu_0=q\cdot\mu,$$

$a_{jk}(t)=0$ при $j=\beta_k,\ \beta_k^{+1},\ldots,\mu$; $b_{jk}(t)=0$ при $j=\beta'_k,\ \beta'_k+1,\ldots,\mu'$. Тогда

$$(S_{M_1}\varphi)(t)=\frac{1}{H(t)}\Big[(M_0\varphi)(t)+\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{\mu}c_{jk}a_{jk}(t)\Big]=$$

$$=\frac{1}{H(t)}\Big[(M_0\varphi)(t)+\sum_{k=1}^{\nu_0}\lambda_kd_k(t)\Big],$$

$$(S_{M_2}\varphi)(t)=\frac{1}{X(t)}\Big[(N_0\varphi)(t)+\sum_{k=\nu_0+1}^{\mu_0}\lambda_kd_k(t)\Big],$$

где $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\mu_0}\}$ — некоторая перестановка набора чисел $\{c_{jk},c'_{\nu l};\ j=1,2,\ldots,\mu;\ \nu=1,2,\ldots,\mu';\ k=1,2,\ldots,q;\ l=1,2,\ldots,q'\}$ и соответственно $\{d_1(t),d_2(t),\ldots,d_{\mu_0}(t)\}$ — расположение набора функций $\{a_{jk}(t),b_{\nu l}(t)\}$ в таком же порядке.

Учитывая, что $(M_0\varphi^+)(t)=0$, $(N_0\varphi^-)(t)=0$, приводим уравнение (6) к соотношению:

$$(21)\qquad H(t)\varphi^+(t)+(M_0\varphi^-)(t)=\frac{H(t)}{X(t)}\cdot\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\cdot[X(t)\varphi^-(t)+(N_0\varphi^+)(t)]+ \\ +\sum_{k=1}^{\mu_0}\lambda_k c_k(t)+f_1(t),$$

где

$$c_k(t)=\begin{cases} d_k(t) & \text{при } k=1,2,\ldots,\nu_0,\\ -\dfrac{H(t)}{X(t)}\cdot\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\cdot d_k(t) & \text{при } k=\nu_0+1,\ldots,\mu_0,\end{cases}$$

$$f_1(t)=\frac{H(t)f(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Если учесть, что $(M_0\varphi^-)(t)\in \boldsymbol{B}^+$; $(N_0\varphi^+)(t)\in \boldsymbol{B}^-$ (см. лемму 1), то получим

$$(22)\qquad \Phi^+(t)=H(t)\varphi^+(t)+(M_0\varphi^-)(t)\in \boldsymbol{B}^+,$$

$$(23)\qquad \Phi^-(t)=X(t)\varphi^-(t)+(N_0\varphi^+)(t)\in \boldsymbol{B}^-.$$

Следовательно, соотношение (21) представляет собой обычную задачу Римана, из которой в замкнутой форме определяются функции $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$.

Из (22) и (23) следует, что

$$\varphi^+(t)-(S_{\tilde M_{12}}\varphi^+)(t)=\frac{1}{H(t)}\Phi^+(t)-\frac{1}{H(t)}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{M_0(t,\tau)\Phi^-(t)}{X(\tau)}\,d\tau.$$

Из условий, наложенных на функции $\tilde M_{12}(t,\tau)$ следует, что

$$(24)\qquad \varphi^+(t)=[(I+S_{\tilde M_{12}})\boldsymbol{R}\Phi](t),\qquad \varphi^-(t)=\frac{1}{X(t)}\Phi^-(t)-\frac{1}{X(t)}(N_0\varphi^+)(t),$$

где

$$(\boldsymbol{R}\Phi)(t)=\frac{\Phi^+(t)}{H(t)}-\frac{1}{H(t)}\cdot\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{M_0(t,\tau)\Phi^-(\tau)d\tau}{X(\tau)}.$$

Следовательно, если $\varphi^+(t)\in\boldsymbol{B}^+$, $\varphi^-(t)\in\boldsymbol{B}^-$, то искомая функция $\varphi(t)$ определится в замкнутой форме. Однако наличие множителей $H(t), X(t)$ перед $\varphi^+(t)$, $\varphi^-(t)$ соответственно, число произвольных постоянных в общем решении уменьшится.

Далее, нужно определить неизвестные постоянные (коэффициенты) λ_k. Перепишем (24) в следующем виде

$$\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \sum_{k=1}^{\mu_0} \lambda_k F_k(t) + F_0(t), \tag{25}$$

где $F_0(t), F_k(t)$; $k = 1, 2, \ldots, \mu_0$, вполне определенные функции. Умножая обе части (23) на $(t-\zeta_k)^{j-\mu}$; $j = 1, 2, \ldots, \mu-1$, и интегрируя эти равенства вдоль Γ, получим

$$c_{jk} = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \lambda_\nu a_{\nu kj} + a_{0kj}, \tag{26}$$

где

$$a_{\nu kj} = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma F_\nu(t)(t-\zeta_k)^{j-\mu} dt;$$

$$j = 1, 2, \ldots, \mu-1; \; k = 1, 2, \ldots, q, \; \nu = 0, 1, \ldots, \mu_0.$$

Аналогичным образом, умножая обе части (25) на $(t-\zeta'_k)^{j-\mu'_k}$ и интегрируя вдоль Γ, получим

$$c'_{jk} = \sum_{\nu=1}^{\mu_0} \lambda_\nu a'_{\nu kj} + a'_{0kj}, \tag{27}$$

где

$$a'_{\nu kj} = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma F_\nu(t)(t-\zeta'_k)^{j-\mu'} dt,$$

$$j = 1, 2, \ldots, \mu'-1; \; k = 1, 2, \ldots, q'; \quad \nu = 0, 1, \ldots, \mu_0.$$

Таким образом, из (26)–(27) мы получим систему линейных уравнений относительно λ_k; $k = 1, 2, \ldots, \mu_0$. Теорема доказана.

Замечание. В случае $M_{12}(t, \tau_1) = 0$ и $\bar{M}_{12}(t, \tau_1) = 0$ утверждения теорем 3 и 4 были получены в [1], [5].

§ 3. **Пример.** Рассмотрим уравнение

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} + \frac{a(t)+b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{Q(\tau)P(\tau)M_0(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} - \tag{28}$$
$$- \frac{a(t)-b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \left[d(t) + \frac{c(\tau)}{P(t)}\right] \frac{\varphi(\tau)d\tau}{Q(t)(\tau - t)} = f(t),$$

где Γ простой замкнутый контур; $0 \in D^+$, $\infty \in D^-$; $a(t), b(t) \in H^\lambda(\Gamma)$; $a(t) \pm \pm b(t) \neq 0$, $\forall t \in \Gamma$; $P(t)$, $Q(t)$ — произвольные полиномы, имеющие нули только в D^+; $d(t), c(t)$ — произвольные функции аналитически продолжимы в D^-, причём $d(t)+c(t)/P(t) = 0$, $\forall t \in \Gamma$; $M_0(t, \tau)$ — произвольная функция, аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным, причём $M_0(t, t) = 0$, $\forall t \in \Gamma$.

Мы покажем, что уравнение (28) разрешимо в замкнутой форме. В самом деле, в этом случае функции $M_1(t, \tau)$ и $M_2(t, \tau)$ принимают виды

$$M_1(t, \tau) = Q(\tau)P(\tau)M_0(t, \tau), \qquad M_2(t, \tau) = \frac{1}{Q(t)}\left(d(t)+\frac{c(\tau)}{P(t)}\right).$$

Из условий, наложенных на заданных функциях, следует, что функция $M_1(t, \tau)$ аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным, а функция $M_2(t, \tau)$ мероморфно продолжима по t, аналитически продолжима по τ в D^-, причём функция $M_{12}(t, \tau)$ (см. формулу (20)) имеет следующий вид,

$$\tilde{M}_{12}(t, \tau_1) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\tau_1 - t)P(\tau)M_0(t, \tau)b(\tau)d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\tau_1 - t)M_0(t, \tau)c(\tau_1)d\tau.$$

Так как $\int_\Gamma M_0(t, \tau)d\tau = 0$, то

$$\tilde{M}_{12}(t, \tau_1) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (\tau_1 - t)P(\tau)M_0(t, \tau)B(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что $M_{12}(t, \tau_1)$ аналитически продолжима в D^+ по обеим переменным. Следовательно, по теореме 4, уравнение (28) разрешимо в замкнутой форме.

Цитированная литература

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, „Наука", М. 1977.

[2] В. А. Какичев, *О некоторых уравнениях Фредгольма, разрешимых в особых интегралах Коши*, Изв. ВУЗ, математика № 4 (1961), 25–38.

[3] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, „Наука", М. (1968)

[4] D. Przeworska-Rolewicz, *Equations with transformed argument; an algebraic approach*, PWN, Warszawa 1973.

[5] С. Г. Самко, *О разрешимости в замкнутой форме сингулярных уравнений*, ДАН СССР, т. 189, № 3 (1969), 483–485.

[6] W. E. Sewell, *Degree of approximation by polynomials in the complex domain*, Priceton 1942.

ХАНОЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HANOI UNIVERSITY, HANOI, VIETNAM

Reçu par la Rédaction le 8.03.1982