ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques

par J. SZARSKI (Kraków)

Dans la présente note nous considérons deux systèmes non linéaires d'inégalités différentielles aux dérivées partielles du second ordre de la forme suivante

$$z_t^i \leqslant f^i(t, X, Z, z_x^i, z_{xx}^i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{0.1}$$

$$z_t^i \geqslant f^i(t, X, Z, z_x^i, z_{xx}^i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{0.2}$$

où l'on a posé

$$X = (x_1, \ldots, x_n), \quad Z = (z^1, \ldots, z^m),$$

$$z_x^i = (z_{x_1}^i, \ldots, z_{x_n}^i), \quad z_{xx}^i = (z_{x_1x_1}^i, z_{x_1x_2}^i, \ldots, z_{x_nx_n}^i).$$

Il s'agit de prouver que pour deux suites de fonctions $u^i(t, X)$, $v^i(t, X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ satisfaisant aux systèmes d'inégalités (0.1) et (0.2) respectivement, à l'intérieur d'un ensemble Ω (cf. définition 1), on a $u^i \leqslant v^i$ dans Ω, si les fonctions f^i sont elliptiques (cf. définition 3) par rapport à la suite $u^j(t, X)$ et satisfont à une condition de monotonie (cf. définition 4) et si les inégalités initiales $u^i(0, X) \leqslant v^i(0, X)$ ainsi que certaines inégalités aux limites (cf. 9°) sont remplies.

Le cas où les inégalités différentielles, les inégalités initiales ainsi que celles aux limites sont fortes, a été traité par M. Mlak [1]. Dans notre théorème nous introduisons une hypothèse (cf. 2° et 3°) qui garantit l'unicité de la solution d'un problème mixte correspondant au système d'équations de la forme (0.1). Dans le cas des inégalités fortes, traité par M. Mlak, cette hypothèse est superflue. La méthode de la démonstration de nos théorèmes est celle des inégalités différentielles ordinaires.

§ 1. DÉFINITION 1 (cf. [3]). Nous désignons par Ω un ensemble dans l'espace-temps $(t, x_1, \ldots, x_n)$, jouissant des propriétés suivantes:

(a) Ω est ouvert, situé dans la couche $0 < t < T$, où $T \leqslant +\infty$, et pour chaque t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, la portion de Ω contenue dans la couche $0 \leqslant t \leqslant t_0$ est bornée.

(b) Pour chaque t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, l'intersection de la fermeture de Ω avec le plan $t = t_0$ est non vide; nous désignons par S_{t_0} la projection de cette intersection sur le plan $t = 0$.

(c) Pour chaque t_0, $0 \leqslant t_0 < T$, et pour tout point $X_0 \epsilon S_{t_0}$ on peut faire correspondre à toute suite t_ν, telle que $0 < t_\nu < T$ et $t_\nu \to t_0$, une suite de points X_ν de façon que $X_\nu \epsilon S_{t_\nu}$ et $X_\nu \to X_0$ [1].

Définition 2 (cf. [3]). Nous désignons par Σ la partie de la frontière de Ω qui est contenue dans la couche ouverte $0 < t < T$.

Etant donnée une fonction $a(t, X)$ définie sur Σ, nous désignons par Σ_a le sous-ensemble de Σ (qui peut être vide ou identique à Σ) dans lequel on a $a > 0$.

Définition 3. La fonction $f^i(t, X, Z, Q, R)$, où $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $R = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, définie pour $(t, X) \epsilon \Omega, Z, Q, R$ arbitraires, est dite *elliptique* par rapport à une suite de fonctions $u^j(t, X)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ de classe C^1 dans Ω, lorsque pour toute suite de nombres $r_{jk}, \tilde{r}_{jk}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, où $r_{jk} = r_{kj}$, $\tilde{r}_{jk} = \tilde{r}_{kj}$, telle que la forme quadratique

$$\sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk} - \tilde{r}_{jk}) \lambda_j \lambda_k$$

est non positive, on a l'inégalité

$$f^i\big(t, X, U(t, X), u^i_x(t, X), R\big) \leqslant f^i\big(t, X, U(t, X), u^i_x(t, X), \tilde{R}\big)$$

pour $(t, X) \epsilon \Omega$.

Définition 4. Nous disons que la suite de fonctions $f^i(t, X, Z, Q, R)$ *satisfait à la condition* W_+, lorsque l'indice i_0 étant fixé arbitrairement les relations

$$z^j \leqslant \tilde{z}^j \ (j \neq i_0), \quad z^{i_0} = \tilde{z}^{i_0}$$

impliquent l'inégalité

$$f^{i_0}(t, X, Z, Q, R) \leqslant f^{i_0}(t, X, \tilde{Z}, Q, R).$$

§ 2. Les définitions du paragraphe 1 étant adoptées, nous pouvons énoncer notre théorème.

Théorème 1. *Supposons que:*

1° *Les fonctions* $f^i(t, X, Z, Q, R)$ *sont définies pour* $(t, X) \epsilon \Omega$ *et* Z, Q, R *arbitraires et satisfont à la condition* W_+ (cf. définition 4).

2° $f^i(t, X, Z, Q, R) - f^i(t, X, \tilde{Z}, Q, R) \leqslant \sigma^i(t, z^1 - \tilde{z}^1, z^2 - \tilde{z}^2, \ldots, z^m - \tilde{z}^m)$, *lorsque* $z^j \geqslant \tilde{z}^j$ *pour* $j = 1, 2, \ldots, m$.

[1] Les conditions (a), (b) et (c) sont nécessaires pour garantir la continuité des fonctions $M^i(t)$ qui interviennent dans la suite (cf. [3]).

3° *Les fonctions* $\sigma^i(t, z^1, \ldots, z^m)$ *sont continues et non négatives pour* $0 \leqslant t < T$, $z^j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *et satisfont à la condition* W_+. *L'unique intégrale du système d'équations différentielles ordinaires*

$$\frac{dz^i}{dt} = \sigma^i(t, z^1, \ldots, z^m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

issue de l'origine, est identiquement nulle.

4° *Les fonctions* $u^i(t, X)$, $v^i(t, X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *sont continues dans la fermeture de* Ω, *de classe* C^1 *dans* $\dot{\Omega}$ *et possèdent des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables* $x_1, \ldots, x_n$ *continues dans* Ω.

5° *Pour chaque indice i la fonction* f^i *est elliptique par rapport à la suite* $u^j(t, X)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ (cf. définition 3).

6° *Les inégalités différentielles*

$$u^i_t(t, X) \leqslant f^i\big(t, X, U(t, X), u^i_x(t, X), u^i_{xx}(t, X)\big),$$

$$v^i_t(t, X) \geqslant f^i\big(t, X, V(t, X), v^i_x(t, X), v^i_{xx}(t, X)\big)$$

sont remplies en tout point $(t, X) \in E_i$, *où*

$$E_i = \{(t, X) \in \Omega\colon\ u^i(t, X) > v^i(t, X)\}.$$

7° $u^i(0, X) \leqslant v^i(0, X)$ *pour* $X \in S_0$.

8° *Les fonctions* $a^i(t, X)$ *sont non négatives sur* Σ (cf. définition 2) *et les fonctions* $\varphi_i(t, X, z)$, *définies pour* $(t, X) \in \Sigma$, *z arbitraire, sont strictement croissantes par rapport à z. A chaque point de* Σ_{a^i} (cf. définition 2) *correspond une demidroite* l_i, *issue de ce point, orthogonale à l'axe t et dont un segment, commençant en ce point, est contenu dans la fermeture de* Ω.

9° *Les fonctions* u^i *et* v^i *admettent une dérivée suivant la demidroite* l_i *en tout point de* Σ_{a^i} *et vérifient les inégalités*

$$\varphi^i\big(t, X, u^i(t, X)\big) - \varphi^i\big(t, X, v^i(t, X)\big) \leqslant a^i(t, X)\,\frac{\partial[u^i(t, X) - v^i(t, X)]}{\partial l_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

pour $(t, X) \in \Sigma$, *où l'on a posé*

$$\frac{\partial(u^i - v^i)}{\partial l_i} = 0 \quad \textit{pour} \quad (t, X) \in \Sigma - \Sigma_{a^i}. \tag{2.0}$$

Dans toutes ces hypothèses, les inégalités

$$u^i(t, X) \leqslant v^i(t, X) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.1}$$

ont lieu dans Ω.

Démonstration. Posons

$$M^i(t) = \max_{X \epsilon S_t} [u^i(t, X) - v^i(t, X)], \qquad M^i_+(t) = \max\big(0, M^i(t)\big).$$

Les inégalités (2.1) sont évidemment équivalentes aux égalités

(2.2) $$M^i_+(t) = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T) \; (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il suffit donc de démontrer (2.2). Or, la fonction $M^i(t)$ est continue dans l'intervalle $[0, T)$ (cf. [3], lemme 1.1) et par conséquent

I. *$M^i_+(t)$ est continue dans $[0, T)$.*

D'après l'hypothèse 7° on a

II. $M^i_+(0) = 0$.

En vertu de 3°, I et II, pour démontrer (2.2) il suffit de prouver l'implication suivante (cf. [2], lemme 1.2):

III. *Si pour un indice i_0 et pour un t_0, $0 < t_0 < T$, on a*

(2.3) $$M^{i_0}_+(t_0) > 0,$$

alors

(2.4) $$\bar{D}_- M^{i_0}_+(t_0) \leqslant \sigma^{i_0}\big(t_0, M^1_+(t_0), \ldots, M^m_+(t_0)\big),$$

où $\bar{D}_-$ désigne la dérivée supérieure à gauche.

Par conséquent, afin d'achéver la démonstration de notre théorème, il ne nous reste qu'à établir l'implication III.

Supposons donc qu'on ait (2.3). On a alors

$$M^{i_0}_+(t_0) = M^{i_0}(t_0)$$

et

(2.5) $$\bar{D}_- M^{i_0}_+(t_0) = \bar{D}_- M^{i_0}(t_0).$$

D'autre part, il existe un point $X_0 \epsilon S_{t_0}$, tel que

(2.6) $$M^{i_0}_+(t_0) = M^{i_0}(t_0) = u^{i_0}(t_0, X_0) - v^{i_0}(t_0, X_0).$$

Nous allons prouver que le point (t_0, X_0) *est un point intérieur de Ω.* Supposons donc que $(t_0, X_0) \epsilon \Sigma$. D'après 9° on a alors

(2.7) $$\varphi^{i_0}\big(t_0, X_0, u^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \varphi^{i_0}\big(t_0, X_0, v^{i_0}(t_0, X_0)\big) \leqslant \alpha^{i_0}(t_0, X_0) \left[\frac{\partial(u^{i_0} - v^{i_0})}{\partial l_{i_0}}\right]_{(t_0, X_0)}.$$

D'autre part, d'après (2.0), (2.6) et la définition de $M^{i_0}(t_0)$ nous avons

$$\left[\frac{\partial(u^{i_0} - v^{i_0})}{\partial l_{i_0}}\right]_{(t_0, X_0)} \leqslant 0,$$

d'où, $a^{i_0}(t_0, X_0)$ étant non négative, on obtient de (2.7)

$$\varphi^{i_0}\big(t_0, X_0, u^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \varphi^{i_0}\big(t_0, X_0, v^{i_0}(t_0, X_0)\big) \leqslant 0 ,$$

ce qui est impossible en vertu de (2.3) et (2.6), puisque d'après 8° la fonction $\varphi^{i_0}(t_0, X_0, z)$ est strictement croissante par rapport à z.

Le point (t_0, X_0) étant un point intérieur de Ω nous avons d'après 4°, (2.6) et la définition de $M^{i_0}(t_0)$

$$u^{i_0}_x(t_0, X_0) = v^{i_0}_x(t_0, X_0) , \tag{2.8}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} [u^{i_0}_{x_j x_k}(t_0, X_0) - v^{i_0}_{x_j x_k}(t_0, X_0)]\lambda_j \lambda_k \leqslant 0 \tag{2.9}$$

pour tout système $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et (cf. [3], lemme 1.1)

$$\bar{D}_- M^{i_0}(t_0) \leqslant u^{i_0}_t(t_0, X_0) - v^{i_0}_t(t_0, X_0) . \tag{2.10}$$

En vertu de (2.3) et (2.6) le point $(t_0, X_0) \in E_{i_0}$ (cf. 6°), et par conséquent, d'après 6°, (2.5) et (2.10), nous avons

$$\begin{aligned}\bar{D}_- M^{i_0}_+(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), u^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), v^{i_0}_x(t_0, V_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) .\end{aligned}$$

D'après (2.8) la dernière inégalité peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\bar{D}_- M^{i_0}_+(t_0) \leqslant \big[f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), u^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big)\big] + \\ + \big[f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big)\big] .\end{aligned}$$

Selon 5° et (2.9) la première différence du second membre de cette inégalité est non positive. Nous en obtenons donc

$$\begin{aligned}\bar{D}_- M^{i_0}_+(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) .\end{aligned} \tag{2.11}$$

En vertu de (2.6) et de la définition de $M^j_+(t)$ on a

$$u^{i_0}(t_0, X_0) = v^{i_0}(t_0, X_0) + M^{i_0}_+(t_0) ,$$

$$u^j(t_0, X_0) \leqslant v^j(t_0, X_0) + M^j_+(t_0) \qquad (j \neq i_0) .$$

Par conséquent, en vertu de la condition W_+ (cf. 1°), il résulte de (2.11) que

$$\bar{D}_- M_+^{i_0}(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0) + M_+(t_0), u_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) - \\ - f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), u_x^{i_0}(t_0, X_0), v_{xx}^{i_0}(t_0, X_0)\big) .$$

Comme $M_+^j(t_0) \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \dots, m)$, on en déduit d'après 2° l'inégalité (2.4). De cette façon nous avons établi l'implication III, ce qui termine la démonstration de notre théorème.

§ 3. Considérons le système d'équations

$$z_t^i = f_i(t, X, Z, z_x^i, z_{xx}^i) \qquad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{3.1}$$

et une solution $u^i(t, X)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ de (3.1), définie dans l'ensemble Ω.

DÉFINITION 5. La solution $u^i(t, X)$ sera dite *solution parabolique régulière* du système (3.1), lorsque chaque fonction f^i est elliptique par rapport à la suite $u^j(t, X)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ (cf. définition 3) et les fonctions $u^i(t, X)$ satisfont à l'hypothèse 4°.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du théorème 1 qui vient d'être démontré.

THÉORÈME 2. *Dans les hypothèses* 1°, 2°, 3° *et* 8° *du théorème* 1 *le problème mixte*

$$z^i(0, X) = \psi_1^i(X) \quad \textit{pour} \quad X \in S_0 \ (i = 1, 2, \dots, m) , \tag{3.2}$$

$$a^i(t, X)\frac{\partial z^i(t, X)}{\partial l_i} - \varphi^i\big(t, X, z^i(t, X)\big) = \psi_2^i(t, X) \\ \textit{pour} \ (t, X) \in \Sigma \ (i = 1, 2, \dots, m) \tag{3.3}$$

où les fonctions ψ_1^i, ψ_2^i *sont données d'avance sur* Σ, *relatif au système* (3.1), *admet dans* Ω *au plus une solution parabolique régulière.*

Maintenant nous allons montrer que pour l'unicité du problème mixte (3.1), (3.2), (3.3) l'hypothèse 1° (à savoir la condition W_+), bien restrictive, est superflue, lorsque'on remplace l'hypothèse 2° par une condition un peu plus forte. En effet, nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 3. *Supposons que les hypothèses* 3° *et* 8° *du théorème* 1 *soient satisfaites et que*

2°′ *pour chaque* i_0 *on a*

$$f^{i_0}(t, X, Z, Q, R) - f^{i_0}(t, X, \tilde{Z}, Q, R) \leqslant \sigma^{i_0}(t, |z^1 - \tilde{z}^1|, \dots, |z^m - \tilde{z}^m|) ,$$

lorsque $z^{i_0} \geqslant \tilde{z}^{i_0}$.

Dans ces hypothèses, le problème mixte (3.2), (3.3), *relatif au système* (3.1), *admet dans* Ω *au plus une solution parabolique régulière.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient u^j, v^j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ deux solutions paraboliques régulières dans Ω du problème considéré. On a alors

$$(3.4)\qquad u^i(0, X) - v^i(0, X) = 0 \quad \text{pour} \quad X \in S_0 \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(3.5)\qquad a^i(t, X)\frac{\partial[u^i(t, X) - v^i(t, X)]}{\partial l_i} = \varphi^i\big(t, X, u^i(t, X)\big) - \varphi^i\big(t, X, v^i(t, X)\big)$$
$$\text{pour } (t, X) \in \Sigma \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Posons

$$M^i(t) = \max_{X \in S_t}[u^i(t, X) - v^i(t, X)], \qquad N^i(t) = \max_{X \in S_t}[v^i(t, X) - u^i(t, X)],$$

$$W^i(t) = \max_{X \in S_t}|u^i(t, X) - v^i(t, X)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il est clair que la conclusion de notre théorème est équivalente aux relations

$$(3.6)\qquad W^i(t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < T \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Or, tout comme dans la démonstration du théorème 1, pour prouver (3.6) il suffit d'établir l'implication III pour les fonctions $W^i(t)$. Supposons donc que

$$(3.7)\qquad W^{i_0}(t_0) > 0.$$

On a alors soit

$$(3.8)\qquad W^{i_0}(t_0) = M^{i_0}(t_0) \quad \text{et} \quad \bar{D}_- W^{i_0}(t_0) \leqslant \bar{D}_- M^{i_0}(t_0),$$

soit

$$(3.9)\qquad W^{i_0}(t_0) = N^{i_0}(t_0) \quad \text{et} \quad \bar{D}_- W^{i_0}(t_0) \leqslant \bar{D}_- N^{i_0}(t_0).$$

Nous pouvons supposer qu'on a par exemple (3.8), la démonstration dans le cas (3.9) étant tout à fait analogue. Il existe un point $X_0 \in S_{t_0}$ tel que

$$(3.10)\qquad W^{i_0}(t_0) = M^{i_0}(t_0) = u^{i_0}(t_0, X_0) - v^{i_0}(t_0, X_0).$$

Par un raisonnement analogue à celui qui nous a conduit à l'inégalité (2.11) nous obtenons, en nous appuyant sur 8° et (3.5), l'inégalité

$$\bar{D}_- W^{i_0}(t_0) \leqslant f^{i_0}\big(t_0, X_0, U(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big) -$$
$$- f^{i_0}\big(t_0, X_0, V(t_0, X_0), u^{i_0}_x(t_0, X_0), v^{i_0}_{xx}(t_0, X_0)\big),$$

d'où selon 2°′, (3.7) et (3.10), il résulte que

$$(3.11)\qquad \bar{D}_- W^{i_0}(t_0)$$
$$\leqslant \sigma^{i_0}\big(t_0, |u^1(t_0, X_0) - v^1(t_0, X_0)|, \ldots, |u^m(t_0, X_0) - v^m(t_0, X_0)|\big).$$

Comme

$$|u^j(t_0, X_0) - v^j(t_0, X_0)| \leqslant W^j(t_0) \qquad (j \neq i_0),$$
$$|u^{i_0}(t_0, X_0) - v^{i_0}(t_0, X_0)| = W^{i_0}(t_0),$$

et comme les fonctions σ^i satisfont à la condition W_+ (cf. definition 4), on déduit de l'inégalité (3.11)

$$\bar{D}_- W^{i_0}(t_0) \leqslant \sigma^{i_0}\big(t_0, W^1(t_0), \dots, W^m(t_0)\big), \tag{3.12}$$

ce qui termine la démonstration du fait que (3.7) implique (3.12). Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

Travaux cités

[1] M. Mlak, *Differential inequalities of parabolic type*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), p. 349-354.

[2] J. Szarski, *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre*, Ann. Polon. Math. 2 (1955), p. 237-249.

[3] — *Sur la limitation et l'unicité des solutions des problèmes de Fourier pour un système non linéaire d'équations paraboliques*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), p. 211-216.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1962