ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Über die Lösung der Funktionalgleichung $f[y+xg(y)] = L[h(x), k(y)]$

von E. VINCZE (Miskolc)

In der Theorie der geometrischen Objekte ([1]) (vgl. [3], [5]), und zwar bei der Bestimmung eindimensionaler differentieller Objekte dritter Klasse von zwei Komponenten, trifft man die Funktionalgleichung

$$f(x+y) = f\left[\frac{x}{f(y)}\right] f(y),$$

die man kürzer auch in der Form

$$f[y+xf(y)] = f(x)f(y) \tag{1}$$

schreiben kann. Dieselbe Gleichung haben S. Gołąb und A. Schinzel ([4]) unter ganz allgemeinen Bedingungen untersucht.

In dieser Arbeit wollen wir die folgende Verallgemeinerung der Gleichung (1) untersuchen:

$$f[y+xg(y)] = L[h(x), k(y)], \tag{2}$$

wo $f(x), g(x), h(x), k(x)$ und $L(u, v)$ unbekannte Funktionen sind. Es gilt der folgende

SATZ. *Sind die folgenden Bedingungen für die in der Gleichung* (2) *stehenden nicht alle identisch konstanten Funktionen erfüllt:*

(I) *die Definitionsbereiche und Wertevorräte der Funktionen sind*

$$x \in H_1, \quad h(x)\colon H_1 \to H; \quad y \in H_2, \quad k(y)\colon H_2 \to H, \quad g(y)\colon H_2 \to H';$$
$$z \in H_2 + H_1 g(H_2) = H_3, \quad f(z)\colon H_3 \to H_0; \quad u, v \in H, \quad L(u, v)\colon H \times H \to H_0,$$

wobei H_1, H_2, H_3, H, H' und H_0 beliebige reelle Mengen sind;

(II) *aus $f(z_1) = f(z_2)$ folgt $z_1 = z_2$;*

(III) *es gibt Konstanten $x = a$ $(\in H_1)$ und $y = b$ $(\in H_2)$, für die $h(a) = k(b) = c$ $(\in H)$ gilt;*

(IV) *die Funktion $L(u, v)$ ist stetig und streng monoton in beiden Veränderlichen; die Gleichung $L(u, c) = w$ ist für ein beliebiges Element w $(\in H_0)$ bezüglich u eindeutig auflösbar: $u = L^{-1}(w, c)$ $(\in H)$;*

(V) *die Funktion* $L(u, v)$ *ist symmetrisch*: $L(u, v) = L(v, u)$;
dann ist (1)

$$L(u, v) = m^{-1}[p(u)+p(v)], \qquad p(c) = 0,$$

und

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} g(y) \equiv \beta \neq 0, & (\beta = \text{const}) \\ f(z) = m^{-1}[\varphi(z-\beta a-b)], \\ h(x) = p^{-1}[\varphi(\beta x-\beta a)], \\ k(y) = p^{-1}[\varphi(y-b)]; \end{cases}$$

oder

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} g(y) = ay+\beta, & (a \neq 0, \text{ const}; \beta = \text{const}) \\ f(z) = m^{-1}\left\{\psi\left[\dfrac{az+\beta}{(1+aa)(ab+\beta)}\right]\right\}, \\ h(x) = p^{-1}\left[\psi\left(\dfrac{1+ax}{1+aa}\right)\right], \\ k(y) = p^{-1}\left[\psi\left(\dfrac{ay+\beta}{ab+\beta}\right)\right]; \end{cases}$$

wo die Funktionen $\varphi(u), \psi(u)$ *den Cauchyschen Funktionalgleichungen*

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v), \quad \psi(uv) = \psi(u)+\psi(v)$$

genügen und $m(t), p(t)$ *stetig und streng monoton sonst aber beliebig sind. Die Gleichung* (2) *hat kein andere Lösung, bei der die auftretenden Funktionen* $f(z)$, $g(y)$, $h(x)$, $k(y)$ *nicht alle identisch konstant sind.*

Beweis. Wegen der Eigenschaften (III), (IV) und (V) gelten

$$f[y+ag(y)] = L[c, k(y)] = L[k(y), c],$$

$$\text{(3)} \quad k(y) = L^{-1}\{f[y+ag(y)], c\};$$

$$\text{(4)} \quad f[b+xg(b)] = L[h(x), c],$$

$$\text{(5)} \quad h(x) = L^{-1}\{f[b+xg(b)], c\}.$$

Wir können voraussetzen, daß $g(b) \neq 0$ ist. Da nämlich $g(b) = 0$ wegen (4) $f(b) = L[h(x), c]$ nach sich zieht, wäre dann $h(x) \equiv$ const oder die Funktion $L(u, v)$ würde von der ersten Veränderlichen nicht abhängen (also die Bedingungen (II) und (IV) nicht erfüllt wären).

Im weiteren setzen wir voraus, daß $g(b) \neq 0$ ist. Nunmehr erhalten wir aus (2) mit (3) und (5) die Gleichung

$$\text{(6)} \quad f[y+xg(y)] = L\left[L^{-1}\{f[b+xg(b)], c\}, L^{-1}\{f[y+ag(y)], c\}\right].$$

---

(1) Dies bedeutet, daß die mit der Operation (Funktion) $L(u, v)$ versehene Menge H isotop zur Additionsgruppe der reellen Zahlen ist.

Es seien x, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ bei gegebenen y und z durch

$$b+xg(b) = z+ag(z)\,,$$
$$y+ag(y) = \bar{y}\,,\qquad z+ag(z) = \bar{z}$$

angegeben. Dann ergibt sich aus (6) nach (V)

$$\text{(7)}\quad f[y+xg(y)] = f\left[y+\frac{z+ag(z)-b}{g(b)}g(y)\right] = L\{L^{-1}[f(\bar{z}), c], L^{-1}[f(\bar{y}), c]\}$$
$$= L\{L^{-1}[f(\bar{y}), c], L^{-1}[f(\bar{z}), c]\} = f\left[z+\frac{y+ag(y)-b}{g(b)}g(z)\right],$$

d.h. wegen (II)

$$y+\frac{z+ag(z)-b}{g(b)}g(y) = z+\frac{y+ag(y)-b}{g(b)}g(z)\,.$$

Hieraus erhalten wir die Lösung

$$\text{(8)}\quad \begin{aligned}(y-b)[g(z)-g(b)] &= (z-b)[g(y)-g(b)]\,,\\ g(y) &= \alpha y+\beta\,.\end{aligned}$$

Weiterhin werden wir zwei Fälle: $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ unterscheiden.

A. Im Falle $\alpha = 0$ ist $g(y) \equiv \beta$; da $g(b) \neq 0$ gilt, ist $\beta \neq 0$. Aus (7) ergibt sich

$$\text{(9)}\quad \begin{aligned}f(y+z+\beta a-b) &= L\{L^{-1}[f(y+\beta a), c], L^{-1}[f(z+\beta a), c]\}\\ &= M[f(y+\beta a), f(z+\beta a)]\,,\end{aligned}$$

wo

$$\text{(10)}\quad M(u, v) \overset{\text{df}}{=} L[L^{-1}(u, c), L^{-1}(v, c)]$$

ist. Wenn wir nun $u = y-b$, $v = z-b$ und

$$\text{(11)}\quad F(u) \overset{\text{df}}{=} f(u+\beta a+b)$$

setzen, so können wir statt der Gleichung (9) die Gleichung

$$\text{(12)}\quad F(u+v) = M[F(u), F(v)]$$

schreiben, die nur dann eine nicht identisch konstante Lösung $F(u)$ hat, wenn die Funktion $M(\xi, \eta)$ assoziativ ist ([2], S. 55):

$$M[M(\xi, \eta), \zeta] = M[\xi, M(\eta, \zeta)]\,.$$

Da eine assoziative und in beiden Veränderlichen stetige und streng monotone Funktion $M(\xi, \eta)$ die Form

$$M(\xi, \eta) = m^{-1}[m(\xi)+m(\eta)]$$

hat ([2], S. 176), können wir

$$F(u+v) = M[F(u), F(v)] = m^{-1}\{m[F(u)]+m[F(v)]\},$$

(13) $$F(u) = m^{-1}[\varphi(u)]$$

schreiben, wo

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)+\varphi(v)$$

gilt.

Beachten wir nun (IV) und (10), dann ergibt sich

$$L(u, v) = M[L(u, c), L(v, c)] = m^{-1}\{m[L(u, c)]+m[L(v, c)]\},$$

also

(14) $$m[L(u, v)] = p(u)+p(v), \quad p(u) \overset{\mathrm{df}}{=} m[L(u, c)].$$

Andererseits erhält man mit $v = c$ die Formel $p(c) = 0$.

Wegen (11) und (13) gilt

$$f(z) = m^{-1}[\varphi(z-\beta a-b)],$$

und da

$$L(u, c) = m^{-1}[p(u)], \quad L^{-1}(u, c) = p^{-1}[m(u)]$$

sind, erhalten wir aus (5) und (3) tatsächlich die Lösungen

$$h(x) = p^{-1}[\varphi(\beta x-\beta a)],$$
$$k(y) = p^{-1}[\varphi(y-b)],$$

die auch der Gleichung (2) genügen.

B. Es sei nun in (8) $\alpha \neq 0$, also gilt

$$y+\frac{z+ag(z)-b}{g(b)}g(y) = \frac{1+\alpha a}{\alpha(ab+\beta)}(\alpha y+\beta)(\alpha z+\beta)-\frac{\beta}{\alpha},$$

$$\bar{y} = y+ag(y) = \frac{1+\alpha a}{\alpha}(\alpha y+\beta)-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Hier können wir $1+\alpha a \neq 0$ voraussetzen. Falls $\alpha = -1/a$, dann ergibt sich $g(y) = -y/a+\beta$, und nach (2)

$$f\left(-\frac{1}{a}xy+\beta x+y\right) = L[h(x), k(y)].$$

Wenn man hier $y = \beta a$ einsetzt, dann gilt $f(\beta a) = L[h(x), k(\beta a)]$; wir haben aber schon im vorigen die Unmöglichkeit dieses Falles gezeigt.

Führen wir die Bezeichnungen

$$u = \frac{\alpha y+\beta}{\alpha b+\beta}, \quad v = \frac{\alpha z+\beta}{\alpha b+\beta},$$

(15) $$G(u) \overset{\mathrm{df}}{=} f\left[\frac{(1+\alpha a)(\alpha b+\beta)u-\beta}{\alpha}\right]$$

und (10) ein, dann erhalten wir statt (7) die Gleichung

$$G(uv) = M[G(u), G(v)], \tag{16}$$

die ebenso gelöst werden kann wie (12).

Da

$$M(\xi, \eta) = m^{-1}[m(\xi)+m(\eta)]$$

auch jetzt gilt, ist die Lösung von (16)

$$G(u) = m^{-1}[\psi(u)], \tag{17}$$

wobei

$$\psi(uv) = \psi(u)+\psi(v)$$

gültig ist. Aus (15) ergibt sich

$$f(z) = m^{-1}\left\{\psi\left[\frac{az+\beta}{(1+aa)(ab+\beta)}\right]\right\}$$

und so erhalten wir nach (5) und (3) tatsächlich die Lösungen

$$h(x) = p^{-1}\left[\psi\left(\frac{1+ax}{1+aa}\right)\right],$$

$$k(y) = p^{-1}\left[\psi\left(\frac{ay+\beta}{ab+\beta}\right)\right],$$

die auch der Gleichung (2) genügen.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Bemerkung. Wenn eine der Funktionen $f(z), h(x), k(y)$ auf einer Menge von positivem Masse durch eine meßbare Funktion majorisierbar oder minorisierbar (insbesonderestreng monoton) ist, dann kann man statt der Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ die stetigen Lösungen der entsprechenden Cauchyschen Gleichungen schreiben.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél, *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte*, III-IV, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 8 (1957), S. 19-52.

[2] — *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel. Stuttgart, Berlin 1961.

[3] — und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[4] S. Gołąb et A. Schinzel, *Sur l'équation fonctionnelle* $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$, Publ. Math. Debrecen 6 (1959), S. 113-125.

[5] M. Hosszú, *Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects*, Publ. Math. Debrecen 5 (1958), S. 294-329.

Reçu par la Rédaction le 2. 5. 1961