Sur les transformations des systèmes d'équations différentielles linéaires aux coefficients variables

par Z. Mikołajska (Kraków)

Le théorème qui suit constitue une modification du théorème qui est démontré dans notre travail [1].

Théorème. *Considérons une transformation inversible*

$$(\mathrm{T}) \qquad x_i = F^i(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \quad t = \tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Admettons que les fonctions F^i *et leurs dérivées partielles du premier ordre soient continues et que le déterminant* $\det[F_{\xi_k}(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)]$ *soit différent de zéro dans l'espace de points* $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Désignons par T^{-1} *la transformation inverse appartenant à* T

$$(\mathrm{T}^{-1}) \qquad \xi_i = f^i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad \tau = t \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Admettons que la transformation T^{-1} *appliquée à un système quelconque d'équations différentielles linéaires*

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + b_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

conduit à un système aussi linéaire.

Ceci étant supposé nous affirmons que la transformation T *est linéaire, c'est-à-dire qu'elle est de la forme*

$$(\mathrm{T}) \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t) \xi_j + \beta_i(t), \quad \tau = t \quad (i=1, 2, \ldots, n)\,[1].$$

Démonstration. Posons par définition $c_{ij}(t) = f^i_{x_j}(t, 0, \ldots, 0)$, $d_i(t) = f^i(t, 0, \ldots, 0)$ et désignons par $C_{ij}(t)$ les éléments de la matrice inverse à $\|c_{ij}(t)\|$ (la matrice $C_{ij}(t)$ existe car la matrice $\|c_{ij}(t)\|$ n'est pas singulière). Envisageons la transformation linéaire

[1] Le théorème inverse est évident: La transformation linéaire appliquée à un système quelconque d'équations linéaires conduit à un système aussi linéaire.

$$(\mathrm{L}) \qquad \xi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t) X_j + d_i(t), \quad \tau = t \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et la transformation composée W=TL

$$(\mathrm{W}) \qquad x_i = H^i(\tau, X_1, \ldots, X_n), \quad t = \tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On vérifie facilement, que pour la transformation inverse $\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$

$$(\mathrm{W}^{-1}) \quad X_i = h^i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(t)[f^j(t, x_1, \ldots, x_n) - d_j(t)], \quad \tau = t$$

on a

$$(1) \quad h^i(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \quad h^i_{x_k}(t, 0, \ldots, 0) = \sum_{j=1}^{n} C_{ij}(t) f^j_{x_k}(t, 0, \ldots, 0) = \delta_{ik},$$

d'où pour la transformation W on obtient

$$(2) \qquad H^i(\tau, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\begin{aligned}(3) \quad H^i_{X_k}(t, 0, \ldots, 0) &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} H^j_{X_k}(t, 0, \ldots, 0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h^i_{x_j}(t, 0, \ldots, 0) H^j_{X_k}(t, 0, \ldots, 0) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h^i_{x_j}\big(t, H^1(t, 0, \ldots, 0), \ldots, H^n(t, 0, \ldots, 0)\big) H^j_{X_k}(t, 0, \ldots, 0) = \delta_{ik}.\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que les fonctions $H^i(\tau, X_1, \ldots, X_n)$ sont de la forme

$$(4) \qquad H^i(\tau, X_1, \ldots, X_n) \equiv X_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il en résultera notre théorème puisque $\mathrm{T} = \mathrm{WL}^{-1}$, où L^{-1} est linéaire.

La transformation $\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$ possède évidemment toutes les propriétés supposées dans notre théorème relativement à la transformation T^{-1}. En particulier la transformation W^{-1} appliquée à un système quelconque de la forme

$$(\mathrm{R}_1) \qquad x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + b_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

conduit à un système d'équations différentielles linéaires

$$(\mathrm{R}_2) \qquad X_i' = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) X_j + B_i(t), \quad t = \tau \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

c'est-à-dire: Chaque intégrale $X_i = X_i(t)$ de (R_2) passe par l'intermédiaire de W^{-1} en une intégrale $x_i = x_i(t)$ de (R_1). On a par suite l'identité

$$(5) \qquad X_i'(t) \equiv h_t^i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) + \sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) x_k'(t)$$

valable le long d'une intégrale quelconque.

En remplaçant respectivement $x_i'(t)$ par $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + b_i(t)$ et $X_i'(t)$ par $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) X_j + B_i(t)$ nous obtenons l'identité

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) X_j + B_i(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i\big(t, H^1(t, X_1, \ldots, X_n), \ldots, H^n(t, X_1, \ldots, X_n)\big) \times$$
$$\times \Big[\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(t) H^j(t, X_1, \ldots, X_n) + b_k(t)\Big] +$$
$$+ h_t^i\big(t, H^1(t, X_1, \ldots, X_n), \ldots, H^n(t, X_1, \ldots, X_n)\big)$$

valable le long de chaque intégrale de (R_2). Par chaque point de l'espace $(t, X_1, \ldots, X_n)$ passe une intégrale de ce système et par suite les relations (6) sont valables dans l'espace tout entier. À chaque matrice $\|a_{ij}(t)\|$ et à chaque suite de fonctions continues $\{b_1(t), \ldots, b_n(t)\}$ correspond donc une matrice $\|A_{ij}(t)\|$ et une suite $\{B_1(t), \ldots, B_n(t)\}$ vérifiant partout l'identité (6). Posons dans l'identité (6) tous les $b_i(t) = 0$ et $X_i = 0$. En vertu de (2) on obtient alors

$$B_i(t) = \sum_{j,k=1}^{n} h_{x_k}^i(t, 0, \ldots, 0) a_{kj}(t) H^j(t, 0, \ldots, 0) = 0$$

d'où l'on conclut qu'à la suite $\{b_i(t) \equiv 0\}$ et à chaque matrice $\|a_{ij}(t)\|$ correspond une matrice $\|A_{ij}(t)\|$ et la suite $\{B_i(t) = 0\}$, verifiant partout l'identité

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t) X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i(t, H^1, \ldots, H^n) a_{kj}(t) H^j(t, X_1, \ldots, X_n) +$$
$$+ h_t^i(t, H^1, \ldots, H^n).$$

À une matrice $\|\bar{a}_{ij}(t)\|$ correspond d'une façon analogue une matrice $\|\bar{A}_{ij}(t)\|$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{A}_{ij}(t) X_j = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{x_k}^i(t, H^1, \ldots, H^n) \bar{a}_{kj}(t) H^j(t, X) + h_t^i(t, H^1, \ldots, H^n).$$

Il en résulte que

$$\sum_{j=1}^{n} [A_{ij}(t) - \bar{A}_{ij}(t)] X_j$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i(t, H^1, \ldots, H^n) H^j(t, X_1, \ldots, X_n) [a_{kj}(t) - \bar{a}_{kj}(t)]$$

et par suite

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{n} G_{ij}(t) X_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i(t, H^1, \ldots, H^n) H^j g_{kj}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $g_{kj}(t) = a_{kj}(t) - \bar{a}_{kj}(t)$, $G_{ij}(t) = A_{ij}(t) - \bar{A}_{ij}(t)$. À chaque matrice $\|g_{ij}(t)\|$ correspond donc une matrice $\|G_{ij}(t)\|$ satisfaisant aux identités (8). Nous allons démontrer que $G_{ij}(t) \equiv g_{ij}(t)$. Pour obtenir $G_{is}(t)$ posons dans la relation (8) $X_j = 0$ pour $j \neq s$ et $X_s \neq 0$. Nous obtenons

$$(9) \qquad G_{is}(t) X_s = \sum_{j=1}^{n} P_j^i(t, X_s) H^j(t, 0, \ldots, 0, X_s, 0, \ldots, 0) \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$P_j^i(t, X_s)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i\big(t, H^1(t, 0, \ldots, 0, X_s, 0, \ldots, 0), \ldots, H^n(t, 0, \ldots, 0, X_s, 0, \ldots, 0)\big) g_{kj}(t).$$

En vertu de (9) et (2) on a

$$G_{is}(t) X_s = \sum_{j=1}^{n} P_j^i(t, X_s) [H^j(t, 0, \ldots, 0, X_s, 0, \ldots, 0) - H^j(t, 0, \ldots, 0)]$$
$$= \sum_{j=1}^{n} P_j^i(t, X_s) H_{X_s}^j(t, 0, \ldots, 0, \vartheta_{X_s} X_s, 0, \ldots, 0) X_s$$

où $0 < \vartheta_{X_s} < 1$.

Dans le cas où $X_s \neq 0$ nous avons alors

$$G_{is}(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j^i(t, X_s) H_{X_s}^j(t, 0, \ldots, 0, \vartheta_{X_s} X_s, 0, \ldots, 0) \qquad (i, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Les fonctions $h_{x_k}^i, H_{X_s}^j, H^j$ étant continues on obtient en passant à la limite $X_s \to 0$ les relations

$$G_{is}(t) = \sum_{j=1}^{n} P_j^i(t, 0) H_{X_s}^j(t, 0, \ldots, 0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{x_k}^i(t, 0, \ldots, 0) g_{kj}(t) H_{X_s}^j(t, 0, \ldots, 0).$$

En vertu de (1) et (3) on a donc

$$G_{is}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ik} g_{kj}(t) \delta_{js} = g_{is}(t). \tag{10}$$

En raison de (10) et (8) nous avons

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(t) X_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h^i_{x_k}(t, H^1, \ldots, H^n) H^j g_{kj}(t), \tag{11}$$

c'est-à-dire: Pour chaque matrice $\|g_{ij}(t)\|$ les fonctions H^i et h^i vérifient l'identité (11). Posons $g_{kj}=0$ pour $j \neq k$ et $g_{kk}=s_k$ ($s_k=$const) pour $k=1,2,\ldots,n$. On a alors en vertu de (11)

$$s_i X_i = \sum_{k=1}^{n} h^i_{x_k}(t, H^1, \ldots, H^n) H^k s_k \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

d'où (s_k étant quelconque) il suit

$$X_i = h^i_{x_i}(t, H^1, \ldots, H^n) H^i(t, X_1, \ldots, X_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et

$$h^i_{x_k}(t, H^1, \ldots, H^n) H^k(t, X_1, \ldots, X_n) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq k$$

ou, en remplaçant X_i par $h^i(t, x_1, \ldots, x_n)$

$$h^i(t, x_1, \ldots, x_n) = h^i_{x_i}(t, x_1, \ldots, x_n) x_i \tag{12}$$

et

$$h^i_{x_k}(t, x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq k.$$

De la dernière relation il résulte que $h_i(t, x_1, \ldots, x_n) = w^i(t, x_i)$ d'où en vertu de (12)

$$w^i_{x_i}(t, x_i) = w_i(t, x_i)/x_i.$$

En considérant t comme paramètre on voit que la fonction $w^i(t, x_i)$ vérifie l'équation linéaire $dy/dx_i = y/x_i$ d'où $w^i(t, x_i) = u^i(t) x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$. En vertu de (1) on a $u^i(t) = h^i_{x_i}(t, 0, \ldots, 0) = 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$, donc

$$h_i(t, x_1, \ldots, x_n) = x_i \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

d'où résulte facilement l'identité

Travaux cités

[1] Z. Mikołajska, *Sur les transformations des systèmes d'équations différentielles linéaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), p. 272-278.

Distributions libres et restreintes des points extrémaux dans les ensembles plans

par F. Leja (Kraków)

1. Rappelons d'abord quelques notions connues. Soit E un ensemble fermé et borné de points du plan et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ un système de $n \geqslant 2$ points quelconques de E. Désignons ce système plus brièvement par $\zeta^{(n)}$, formons les produits

$$V(\zeta^{(n)}) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} |\zeta_j - \zeta_k|, \quad \Delta_j(\zeta^{(n)}) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |\zeta_j - \zeta_k|, \qquad j=1,2,\ldots,n,$$

et soit $V_n(E)$ la borne supérieure du produit $V(\zeta^{(n)})$, lorsque $\zeta^{(n)}$ varie arbitrairement dans E. D'autre part, soit

$$\eta^{(n)} = \{\eta_1^{(n)}, \eta_2^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}\}, \qquad n=2,3,\ldots, \tag{1}$$

un système de points de E pour lequel

$$V(\eta^{(n)}) = V_n(E) = \max_{\zeta^{(n)} \in E} V(\zeta^{(n)}).$$

Les points (1) seront dits *points extrémaux* du rang n de E correspondant à la *distribution libre*. On sait, que la moyenne géométrique du produit $V(\eta^{(n)})$, c'est-à-dire

$$[V(\eta^{(n)})]^{2/n(n-1)}, \qquad n=2,3,\ldots,$$

converge vers une limite finie

$$\lim_{n\to\infty} [V(\eta^{(n)})]^{2/n(n-1)} = d(E) \tag{2}$$

dite *diamètre transfini* (ou *capacité libre*) de l'ensemble E. Il est clair que R étant le diamètre proprement dit de E on a $0 \leqslant d(E) < R$.

Les points extrémaux jouissent de plusieurs propriétés remarquables dont je citerai les suivantes: Formons les polynômes

$$P(z, \eta^{(n)}) = (z - \eta_1^{(n)})(z - \eta_2^{(n)}) \ldots (z - \eta_n^{(n)}), \qquad n=2,3,\ldots$$

et désignons par D_∞ le domaine non borné contenu dans l'ensemble complémentaire à E, par F la frontière de D_∞ et par Δ l'ensemble ouvert