because for $y \in E$ it leads to the inequality

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} \sum_{k=-l}^{l} c_k f\left(\frac{k\pi}{R} - \frac{\pi}{2R} + t\right) y(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=-l}^{l} |c_k| \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^{T} f\left(\frac{k\pi}{R} - \frac{\pi}{2R} + t\right) y(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \Big(\sum_{k=l}^{l} |c_k|\Big) \|f\| \leqslant \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|\Big) \|f\|,$$

which proves the Lemma.

THEOREM 2. *If*

(1) $$s_n(t) = \sum_{k=-l}^{l} a_k e^{i\lambda_k t} \qquad (\ldots \lambda_{k+1} > \lambda_k > \ldots > \lambda_0 > \ldots > \lambda_{-k} > \lambda_{-k-1} > \ldots)$$

then, $|\lambda_l| = |\lambda_{-l}|$, $\|s_n'(t)\| \leqslant \lambda_l \|s_n(t)\|$.

We can represent the trigonometric sum (1) in the following form:

$$s_n(t) = \int_{-\lambda_l}^{\lambda_l} e^{i\xi t} ds(\xi) = f(t),$$

where

$$s(\xi) = \sum_{k<\xi} a_k, \qquad \int_{-\lambda_l}^{\lambda_l} |ds(\xi)| \leqslant \sum_{x=-l}^{l} |a_k| < \infty.$$

We also have

$$g(t) = f'(t) = i \int_{-\lambda_l}^{\lambda_l} \xi e^{i\xi t} ds(\xi).$$

Therefore we see that the theorem follows, as in [1], from the above lemmata and a remark that the functions f and g are elements of the class $\mathfrak{M}$ since they are trigonometric polynomials.

References

[1] R. Bellman, *A generalization of Zygmund-Bernstein theorem*, Duke Math. Jour. 10 (1943), p. 649-651.

[2] Z. W. Birnbaum, W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Mathematica 3 (1931), p. 1-68.

[3] P. Civin, *Inequalities for trigonometric integrals*, Duke Math. Jour. 8 (1941), p. 658-665.

[4] A. Zygmund, *A remark on conjugate series*, Proceedings of the London Math. Soc. (2), vol. 34 (1932), p. 392-400.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Démonstration du théorème de Osgood-Carathéodory par la méthode des points extrémaux

par W. KLEINER (Kraków)

1. Introduction. Soit D un domaine plan simplement connexe contenant le point à l'infini et dont la frontière C ne se réduit pas à un seul point. Soit

(1) $$\eta^{(n)} = \{\eta_0^{(n)}, \eta_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)}\}$$

un système de points extrémaux de C du rang n, c'est-à-dire un système de $n+1$ points de C, tel que le produit

$$V(\eta^{(n)}) = \prod_{0\leqslant i<k\leqslant n} |\eta_i^{(n)} - \eta_k^{(n)}|$$

soit le plus grand. On peut supposer que

$$\prod_{k=1}^{n} |\eta_0^{(n)} - \eta_k^{(n)}| \leqslant \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} |\eta_i^{(n)} - \eta_k^{(n)}|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Posons

(2) $$f_n(z) = e^{i\Theta_n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{z - \eta_k^{(n)}}{\eta_0^{(n)} - \eta_k^{(n)}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

où les nombres réels Θ_n et les radicaux sont choisis de manière que $f_n(a) > 0$ pour un point fixe $a \in D$.

F. Leja a démontré[1]) que la suite (2) converge dans D vers une limite $f(z)$, et que $w = f(z)$ donne la représentation conforme du domaine D sur le „cercle" $K\{|w| > 1\}$, de manière que $f(\infty) = \infty$.

En partant de la formule (2), nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME DE OSGOOD-CARATHÉODORY. *Lorsque C est une courbe de Jordan, la fonction $f(z)$ est prolongeable continûment au domaine fermé $\bar{D} = D + C$, et elle établit une correspondance biunivoque et bicontinue entre $\bar{D}$ et $\bar{K}$.*

[1]) Voir F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. de Math. 12 (1933), p. 57-71; *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle*, Ann. Soc. Pol. de Math. 14 (1935), p. 116-134.

Conventions. La frontière C du domaine D est une courbe de Jordan. L'arc simple L dont on a enlevé les extrémités sera noté L^0. Au lieu de $z_1 \epsilon L$, $z_2 \epsilon L$, on écrira $z_1, z_2 \epsilon L$; au lieu de $\eta_i^{(n)} - \eta_i$.

2. Lemmes. On sait que $d_n = \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{V(\eta^{(n)})} \to d(C)$; $d(C)$ est dit le *diamètre transfini* (ou *l'écart* par rapport à la fonction génératrice $|z-\zeta|$) de la courbe C; on a $d(C) > 0$.

Soit C_r la partie de C contenue dans le cercle $\{|z-\zeta_0| < r\}$, $\zeta_0 \epsilon C$; en ne changeant que l'ordre des points $\eta^{(n)}$ supposons que

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu \epsilon C_r, \qquad \eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_n \epsilon C - C_r. \tag{3}$$

Alors, quelque petit que soit $r > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu}{n} > 0 \text{ [2]}. \tag{4}$$

D'autre part, nous allons démontrer que *la quantité*

$$\Theta_r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\nu}{n} \tag{5}$$

tend vers 0 *lorsque* $r \to 0$.

En effet,

$$d_n = \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{V(\eta_1, \ldots, \eta_\nu) \cdot \Pi' |\eta_i - \eta_k|},$$

où le produit Π' renferme tous les facteurs de $V(\eta^{(n)})$ qui n'entrent pas dans $V(\eta_1, \ldots, \eta_\nu)$; ces facteurs étant bornés par un nombre $R > 1$, on a

$$d_n \leqslant (2r)^{\frac{\nu(\nu+1)}{n(n+1)}} R,$$

donc

$$d(C) \leqslant (2r)^{\Theta_r^2} R,$$

et par suite

$$\Theta_r^2 \leqslant -\frac{\log R/d}{\log 2r} \quad \text{pour} \quad r < \frac{1}{2};$$

ce qui prouve que $\Theta_r \to 0$ lorsque $r \to 0$.

3. Démonstration du théorème. Il résulte du théorème de Riemann que $|f(z)| \to 1$ pour $z \to \zeta \epsilon C$, $z \epsilon D$. Il reste à examiner le comportement de l'argument de $f(z)$ dans les mêmes conditions.

[2] Voir F. Leja, *Sur les suites de polynômes et la fonction de Green généralisée I*, Ann. Soc. Pol. de Math. 18 (1945), p. 4-11.

a. Nous démontrerons d'abord *l'existence de la limite de* $\arg f(z)$ *lorsque* $z \to \zeta \epsilon C$ *le long d'un arc circulaire* L, *où* $L^0 \subset D$.

Soit L un tel arc. Pour des branches quelconques des $\arg f_n(z)$, $\arg(z-\eta_i)$ sur L^0, on a d'après (2)

$$\arg f_n(z_2) - \arg f_n(z_1) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\arg(z_2 - \eta_i) - \arg(z_1 - \eta_i)] \quad \text{pour} \quad z_1, z_2 \epsilon L^0.$$

Désignons par C_r la partie de C renfermée dans le cercle $|z-\zeta| < r$, et supposons (3). On a

$$|\arg f_n(z_2) - \arg f_n(z_1)| \tag{7}$$
$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\nu} |\arg(z_2 - \eta_i) - \arg(z_1 - \eta_i)| + \frac{1}{n} \sum_{i=\nu+1}^{n} |\arg(z_2 - \eta_i) - \arg(z_1 - \eta_i)|.$$

Désignons les sommes $\sum_1^\nu$ et $\sum_{\nu+1}^n$ dans (7) par s, S respectivement. Alors

$$\frac{1}{n} s \leqslant \frac{1}{n} \nu \cdot 2\pi, \tag{8}$$

ce qui résulte de la possibilité de joindre η_i à ∞ par un rayon extérieur à L^0. Mais, pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, on a

$$2\pi \frac{\nu}{n} < 2\pi\Theta_r + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

pour n suffisamment grands et un r assez petit; fixons cet r. $\arg(z-\eta)$ étant uniformément continu sur l'ensemble fermé $L \times (C - C_r)$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|\arg(z_2 - \eta_i) - \arg(z_1 - \eta_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\text{pour} \quad z_1, z_2 \epsilon L^0, \quad |z_1 - z_2| < \delta, \quad i = \nu+1, \ldots, n;$$

donc

$$\frac{1}{n} S < \frac{1}{n}(n-\nu)\frac{\varepsilon}{2}, \quad z_1, z_2 \epsilon L^0, \quad |z_1 - z_2| < \delta, \tag{10}$$

et par suite $|\arg f_n(z_2) - \arg f_n(z_1)| < \varepsilon$ pour $z_1, z_2 \epsilon L^0$, $|z_1 - z_2| < \delta$ et n suffisamment grand. À la limite on a

$$|\arg f(z_2) - \arg f(z_1)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad z_1, z_2 \epsilon L^0, \quad |z_1 - z_2| < \delta.$$

La condition de Cauchy est donc satisfaite et la limite $\lim\limits_{z \to \zeta, z \epsilon L^0} f(z)$ existe.

b. Pour démontrer *l'existence de la limite* $\lim_{z\to\zeta, z\in D} f(z)$, où ζ est un point fixe quelconque de C, joignons le point ζ au point ∞ par un „arc simple" J, où $J^0\subset D$, et soit g_n la partie de D, limitée par un arc $a_n\zeta b_n$ de C (contenant ζ) et par l'arc $q_n=a_nz_nb_n$ de la circonférence $|z-\zeta|=1/n$, z_n étant le premier point de rencontre de J avec la circonférence $|z-\zeta|=1/n$ (Fig. 1). Il est clair que $g_{n+1}\subset g_n$ et que $g_n\to\zeta$, c'est-à-dire $\sup_{z\in g_n}|z-\zeta|\to 0$ lorsque $n\to\infty$.

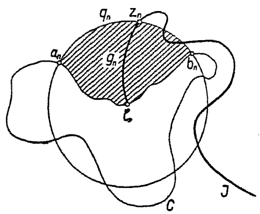

Fig. 1

D'après ce qui précède, $f(q_n)$ est un arc simple. Le domaine $f(g_n)$ est limité par cet arc et par un arc l_n de la circonférence $Q\{|w|=1\}$. Les domaines fermés $\overline{f(g_n)}$ décroissent lorsque n croît, et leur produit $\Pi f(g_n)$ est égal au produit $\Pi l_n=l$, où l est un arc ou un seul point de Q. Si l est un arc, la fonction inverse $z=f^{-1}(w)$ tend vers la constante ζ, lorsque w tend vers un point quelconque de l, d'où $f^{-1}(w)\equiv\zeta$; mais ceci est faux, donc l est un point, et par suite la limite $\lim_{z\to\zeta,z\in D} f(z)=l$ existe.

Posons $f(\zeta)=l$. $f(z)$ est ainsi prolongée au domaine fermé $\bar{D}$ et y reste continue.

c. Pour démontrer que $f(z)$ *est univalente sur* C nous allons d'abord prouver que *dans chaque entourage $|z-\zeta|<R$ d'un point quelconque $\zeta\in C$ il existe deux points ζ_1 et ζ_2 de C tels que $f(\zeta_1)\neq f(\zeta_2)$*.

Soit $q^0\subset D$ un arc ouvert de la circonférence $|z-\zeta|=r<R$ dont les extrémités $\zeta_1,\zeta_2\in C$ (Fig. 2a). Il nous faut démontrer que $f(\zeta_1)\neq f(\zeta_2)$. Mais la démonstration se trouverait facilitée, si q^0 était un „intervalle" de l'axe réel, contenant le point à l'infini.

Cette situation pouvant être obtenue de la précédante par une homographie, supposons, que ζ_1 et ζ_2 soient les points d'intersection de C avec l'axe réel, le premier et le dernier respectivement suivant la direction de l'axe (Fig 2b).

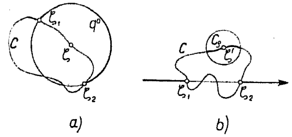

Fig. 2

Soient $z_1<\zeta_1, z_2>\zeta_2$ deux points de l'axe réel. Joignons-les par un arc $L=L_{z_1z_2}\subset D\{Iz\leqslant 0\}$. On a sur L la relation (6) pour des branches uniformes et continues sur L des $\arg f_n(z)$, $\arg(z-\eta_i)$. Je dis que, pour $\eta\in C$,

(13)
$$0<\arg(z_2-\eta)-\arg(z_1-\eta)<2\pi.$$

En effet, pour $\eta=\zeta_1$, (13) est vraie. Pour qu'elle devienne fausse, la différence (13) doit être égale à 0 ou 2π pour un $\eta'\in C$ (à cause de la continuité). Mais cet η' devrait alors être réel et situé en déhors de l'intervalle (z_1,z_2), alors $\eta'\in D$, ce qui contredit que $\eta'\in C$.

Choisissons maintenant un $\zeta'\in C$ pour lequel $|I\zeta'|=2\varrho>0$, et soit $C_\varrho=\{|z-\zeta'|<\varrho\}C$. Pour $\eta\in\bar{C}_\varrho$ et $z_1\in[\zeta_1-1,\zeta_1]$, $z_2\in[\zeta_2,\zeta_2+1]$ (dans un ensemble fermé alors) la différence (13) est continue et y atteint un maximum M et un minimum m. Ces extrêmes satisfont à (13); il existe alors un $\alpha>0$ tel que $\alpha\leqslant m\leqslant M\leqslant 2\pi-\alpha$. Or, pour $\eta\in C_\varrho$,

(14)
$$\alpha\leqslant\arg(z_2-\eta)-\arg(z_1-\eta)\leqslant 2\pi-\alpha.$$

Soit, comme au début, $\eta_1,\dots,\eta_\nu\in C_\varrho$; on a

(15)
$$\frac{\alpha\nu}{n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\arg(z_2-\eta_i)-\arg(z_1-\eta_i)\leqslant 2\pi-\frac{\alpha\nu}{n}.$$

On sait que $\nu/n\geqslant\Theta>0$ pour n suffisamment grands (cf. lemmes); alors à la limite

$$\alpha\Theta\leqslant\arg f(z_2)-\arg f(z_1)\leqslant 2\pi-\alpha\Theta,\qquad \alpha\Theta>0.$$

Si l'on fait tendre $z_i\to\zeta_i$, on voit que $f(\zeta_1)\neq f(\zeta_2)$.

d. Supposons maintenant, qu'il y ait sur C deux points $\zeta_1\neq\zeta_2$ pour lesquels $f(\zeta_1)=f(\zeta_2)$. Joignons ζ_1 au ζ_2 par un arc L, $L^0\subset D$, partageant D en deux domaines D_1, D_2.

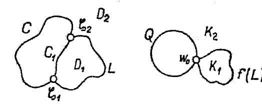

Fig. 3

Donc, $f(L)$ partage K en $K_1=f(D_1)$, $K_2=f(D_2)$, dont l'un — par exemple K_1 — forme l'intérieur de la courbe fermée $f(L)$; $\bar{K}_1$ a un seul point w_0 commun avec Q, et on a $f(\zeta)=w_0$ pour chaque $\zeta\in C_1=C\cdot\bar{D}_1$; cependant, sur C_1 doivent exister deux points aux images distinctes.

e. *Chaque point $w'\in Q$ est l'image d'un point de C.* En effet, supposons que $w'\in Q$, et soit w_n une suite quelconque des points de K tendant vers w'. Si la suite $f^{-1}(w_n)$ avait deux points d'accumulation $\zeta_1\neq\zeta_2$, on aurait $f(\zeta_1)=f(\zeta_2)=w'$, ce qui est impossible d'après le § 3 d. Alors $f^{-1}(w_n)\to\zeta$ et $w'=f(\zeta)$.

La démonstration est ainsi achevée.

4. Remarques complémentaires. Pour les considérations du § 3 a, il est essentiel que l'oscillation de $\arg(z-\eta)$ pour $z\in L^0\subset D$ (L étant un arc simple quelconque dont une extrémité $\zeta\in C$) soit bornée par un nombre indépendant de $\eta\in C$. Cette condition est satisfaite pour chaque ζ, si la courbe C est assez régulière (par exemple convexe ou de la classe C_1);

dans ce cas le § 3b est superflu. Pareillement pour des courbes C convexes (même plus générales) on peut omettre le § 3d.

Il est probable que la méthode précédente peut être appliquée à l'étude des propriétés frontières de la fonction $f(z)$ dans le cas général où la frontière du domaine simplement connexe D est quelconque.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Un lemme sur les polynômes de Lagrange

par F. Leja et Z. Opial (Kraków)

Soit donnée une suite triangulaire de nombres complexes

$$\begin{array}{llll} \zeta_0^{(1)}, & \zeta_1^{(1)}, & & \\ \zeta_0^{(2)}, & \zeta_1^{(2)}, & \zeta_2^{(2)}, & \\ \zeta_0^{(3)}, & \zeta_1^{(3)}, & \zeta_2^{(3)}, & \zeta_3^{(3)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{1}$$

où $\zeta_j^{(n)} \neq \zeta_k^{(n)}$ lorsque $j \neq k$. Formons les polynômes

$$L_n^{(j)}(z) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{z-\zeta_k^{(n)}}{\zeta_j^{(n)}-\zeta_k^{(n)}}, \qquad j=0,1,\dots,n,$$

et soient z_0 un point d'accumulation de la suite (1), r un nombre positif quelconque et $M_n(z_0,r)$ le plus grand de ceux des modules

$$|L_n^{(j)}(z_0)|, \qquad j=0,1,\dots,n,$$

pour lesquels le point $\zeta_j^{(n)}$ est contenu dans le cercle $|z-z_0|<r$. Lorsque aucun des points $\zeta_0^{(n)}, \zeta_1^{(n)}, \dots, \zeta_n^{(n)}$ n'est contenu dans le cercle $|z-z_0|<r$, posons, par définition, $M_n(z_0,r)=0$.

Il est clair que, quel que soit $r>0$, on a $M_n(z_0,r)>0$ pour une infinité de valeurs de n. Nous allons démontrer que:

Quel que soit $r>0$, la limite supérieure

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{M_n(z_0,r)} = M(z_0,r)$$

satisfait à l'inégalité $M(z_0,r)\geqslant 1$.

Démonstration. Supposons que, pour une valeur $r_0>0$ de r, on ait $M(z_0,r_0)<\Theta<1$. Comme $M(z_0,r)$ ne croît pas lorsque r décroît, on a

$$M(z_0,r)<\Theta<1 \quad \text{pour} \quad r\leqslant r_0, \tag{2}$$

et, par suite, il existe un nombre N tel que

$$M_n(z_0,r)<\Theta^n \quad \text{pour} \quad n>N, \quad r\leqslant r_0,$$

d'où il résulte que

$$|L_n^{(j)}(z_0)|<\Theta^n \quad \text{pour} \quad n>N \quad \text{si} \quad |\zeta_j^{(n)}-z_0|<r\leqslant r_0. \tag{3}$$