Sur l'allure asymptotique des intégrales du système d'équations différentielles au voisinage de point singulier

par S. Łojasiewicz (Kraków)

Introduction

Soit

$$\text{(a)} \qquad \dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

un système d'équations différentielles et soit $\Theta=(0,\ldots,0)$ un point singulier de ce système, c'est-à-dire $f_i(0,\ldots,0)=0$, $i=1,2,\ldots,n$. Si les f_i possèdent la différentielle de Stolz en Θ, on a

$$f_i(x_1,\ldots,x_n) = \sum_j a_{ij}x_j + \varepsilon_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

où $\varepsilon_i/r \to 0$ pour $r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\to 0$. Il s'agit de savoir quelles hypothèses sur les „perturbations" $\varepsilon_i(x_i,\ldots,x_n)$ sont suffisantes pour que l'allure asymptotique des intégrales du système (a) soit la même que celle des intégrales du système

$$\text{(b)} \qquad \dot{x}_i = \sum_j a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

O. Perron ([5] et [6]) a résolu ce problème dans le cas, où $n=2$ et sous l'hypothèse

$$\lim_{x_1,x_2\to 0} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j}(|x_1|+|x_2|)^{-\delta}=0 \quad \text{pour un} \quad \delta>0 \qquad (i,j=1,2).$$

M. T. Ważewski m'a proposé de considérer ce problème dans le cas où les racines caractéristiques de la matrice $[a_{ij}]$ sont réelles et égales, ou dans le cas du système

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -sx_1+x_2+\varepsilon_1(x_1,\ldots,x_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_{n-1} &= -sx_{n-1}+x_n+\varepsilon_{n-1}(x_1,\ldots,x_n),\\ \dot{x}_n &= -sx_n+\varepsilon_n(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

C'est à M. T. Ważewski que je dois l'idée d'appliquer dans mes considérations la notion de coïncidence asymptotique des intégrales, introduite par lui antérieurement (cf. [7] et [8]); cette notion joue un rôle essentiel (la prop. 21) dans les principaux résultats.

Dans la note présente je m'occupe du cas, où toutes les intégrales du système (b) tendent vers Θ pour $t\to\infty$. Je donne des hypothèses sur les seconds membres du système (a) dans lesquelles

1° il existe une transformation de la classe C^1 du système (a) en système (b), donc l'allure asymptotique des intégrales est la même pour les deux systèmes;

2° deux intégrales correspondant par cette transformation coïncident asymptotiquement (§ 4, th. I et II).

Pour rendre les considérations plus claires, j'énonce quelques propositions simples concernant les transformations d'un système en un autre (§ 1), ainsi que quelques lemmes sur la coïncidence asymptotique (§ 2), qui seront utilisés dans la suite; les propositions 13 et 14 sont dues à M. T. Ważewski. Au § 5 je donne des exemples concernant le théorème II. Je compare ensuite (n° 4) les types de l'allure asymptotique des intégrales de systèmes particuliers ($n=2$) sous des hypothèses moins fines dans lesquelles la coïncidence asymptotique peut ne pas avoir lieu et je décris enfin (n° 5) l'allure asymptotique des intégrales du système (c).

Je tiens beaucoup à exprimer ma profonde gratitude à M. T. Ważewski qui a posé le problème de ce travail et à qui je dois de précieux conseils au cours de sa réalisation.

Soit E_n l'espace euclidien à n dimensions. Les points de E_n (vecteurs) sont désignés par les majuscules latines $A,B,X,Y,\ldots$; leurs coordonnées par les minuscules correspondantes munies d'indices: $X=(x_1,\ldots,x_n)$, $Y=(y_1,\ldots,y_n),\ldots$ En particulier $\Theta=(0,\ldots,0)$. Le module $|X|$ satisfait aux inégalités

$$|x_k| \leqslant |X| \leqslant |x_1|+\ldots+|x_n| \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Nous désignons par $[X,Y]$, $K(X_0,r)$ et Π_k respectivement le segment fermé aux extrémités X et Y, la sphère $|X-X_0|<r$ et l'hyperplan $x_{k+1}=\ldots=x_n=0$; $\overline{\Omega}$ désigne la fermeture de $\Omega\subset E_n$.

Soit $Z\subset E_1$ et $G\subset E_n$; le *produit cartésien* de Z par G se note $Z\times G$. En particulier, $E_{n+1}=E_1\times E_n$. Par (t,X) nous désignons le point $(t,x_1,\ldots,x_n)$ de $E_1\times E_n$. Soit $D\subset E_{n+1}=E_1\times E_n$; la *projection* de D sur E_n est désignée par $\operatorname{pr}(D)$.

Soit $F(t,X)=\big(f_1(t,x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_n(t,x_1,\ldots,x_n)\big)$ une transformation de $G\subset E_{n+1}$ en E_n. Nous désignons par

$$\frac{\partial F}{\partial t},\quad \frac{\partial F}{\partial x_i},\quad \left|\frac{\partial F}{\partial X}\right|,\quad \left[\frac{\partial F}{\partial X}\right]$$

respectivement les vecteurs

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t},\ldots,\frac{\partial f_n}{\partial t}\right),\quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\ldots,\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right),$$

le jacobien $\det\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ et sa matrice $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$.

Si G est un domaine et si $f_1,\ldots,f_n$ sont k-fois continûment différentiables dans G nous disons que *F est de la classe C^k dans G*.

Une *homéomorphie* est dite *régulière* dans un domaine G si elle est de la classe C^1 et son jacobien ne s'annule en aucun point G. Par *hypersurface régulière* à k dimensions nous entendons l'image de l'ensemble $K(\Theta,1)\cdot\Pi_k$ par une homéomorphie régulière dans un domaine qui contient $\overline{K}(\Theta,1)\cdot\Pi_k$.

Les matrices sont désignées par les majuscules gothiques $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\ldots$; en particulier $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{O}$ désignent respectivement la matrice-unité et la matrice-nulle. Une matrice aux éléments u_{ij} se note $[u_{ij}]$. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}X$ et $\mathfrak{A}t$ désignent le produit d'une matrice $\mathfrak{A}$ respectivement par une matrice $\mathfrak{B}$, par un vecteur X, par un nombre t, tandis que Xt désigne le produit d'un vecteur X par un nombre t. La série

$$\mathfrak{I}+\mathfrak{A}+\frac{1}{2!}\mathfrak{A}^2+\frac{1}{3!}\mathfrak{A}^3+\ldots$$

est convergente pour chaque $\mathfrak{A}$; sa somme se note $e^{\mathfrak{A}}$[1]). Enfin par $d\mathfrak{A}(t)/dt$ nous désignons la dérivée d'une fonction $\mathfrak{A}(t)$ d'une variable réelle dont les valeurs sont des matrices. Pour les théorèmes élémentaires du calcul matriciel que nous allons utiliser, nous renvoyons au livre de S. Lefschetz ([4], ch. I. §§ 1 et 2).

Nous disons que *la relation $R(t,X)$ subsiste pour $X\to X_0$ et $t\to\infty$*, si cette relation est satisfaite pour $|X-X_0|<\varepsilon$ et $t>\Delta$ lorsque ε est suffisamment petit et Δ suffisamment grand. Nous utilisons la symbolique de Landau:

$$f(t,X)=O\big(\varphi(t,X)\big)\quad \text{pour}\quad X\to X_0 \quad\text{et}\quad t\to\infty$$

[1]) Cf. [4], § 1.

pour exprimer qu'il existe un nombre M tel que $|f(t,X)|/\varphi(t,X)<M$ pour $X\to X_0$ et $t\to\infty$, et

$$f(t,X)=o\big(\varphi(t,X)\big)\quad \text{pour}\quad X\to X_0\quad \text{et}\quad t\to\infty$$

pour exprimer que $\lim\limits_{\substack{X\to X_0\\ t\to\infty}} f(t,X)/\varphi(t,X)=0$ (φ étant une fonction positive).

Soit B un domaine à $n+1$ dimensions et soit

$$\text{(1)}\qquad \dot{X}=F(t,X)\quad \text{dans}\quad B$$

un système d'équations différentielles (écrit sous la forme vectorielle). Soit $a<b<c$; $X_1(t)$ dans (a,b), $X_2(t)$ dans (b,c) et $X_3(t)$ dans (a,c) étant des intégrales du système (1) telles que $X_1(t)=X_3(t)$ dans (a,b) et $X_2(t)=X_3(t)$ dans (b,c), nous disons que l'intégrale X_1 est *restriction à droite* de l'intégrale X_3, l'intégrale X_3 est *prolongement à droite* de l'intégrale X_3 tandis que X_2 est *restriction à gauche de* X_3 et X_3 — *prolongement à gauche* de X_2. *L'intégrale* s'appelle *saturée à droite* (ou *à gauche*) si elle n'a pas de prolongement à droite (ou à gauche). Si elle est saturée à droite et à gauche, elle s'appelle *intégrale saturée*. Le système (1) est dit *système du type* (U) (dans B) ou simplement *système* (U) (dans B) si F est continue dans B et si par chaque point de B passe une intégrale saturée, unique.

Soit Δ un domaine à n dimensions et soit

$$\text{(2)}\qquad \dot{X}=F(X)\quad \text{dans}\quad (-\infty,\infty)\times\Delta$$

un système (U) (F étant indépendante de la variable t). Si $X(t)$ dans (t_1,t_2) est l'intégrale du système (2), il en est de même de $X(t-c)$ dans (t_1+c,t_2+c);

$$X=X(t)\quad\text{où}\quad t_1<t<t_2\qquad\text{et}\qquad X=X(t-c)\quad\text{où}\quad t_1+c<t<t_2+c$$

sont deux représentations paramétriques de la même courbe appelée *caractéristique* du système (2); nous disons aussi qu'elle est la *projection de l'intégrale* $X(t)$ *dans* (t_1,t_2) (elle est la projection de chaque intégrale $X(t-c)$ dans (t_1+c,t_2+c)). D'une manière analogue nous définissons la restriction et le prolongement d'une caractéristique ainsi que la caractéristique saturée (à droite, à gauche). L'intégrale et sa projection ne peuvent être saturées (à droite, à gauche) qu'en même temps. Une caractéristique s'appelle *demi-caractéristique*, si elle est la projection d'une intégrale dans un intervalle de la forme (a,∞).

Une famille R de demi-caractéristiques *engendre* un ensemble $Z\subset E_n$ si

1° la totalité des caractéristiques de R recouvre l'ensemble Z;

2° pour chaque caractéristique $X=X(t)$ de R il existe une valeur t_0 du paramètre telle que $X(t)\,\epsilon\, Z$ lorsque $t>t_0$.

Faisons correspondre à toute valeur réelle t un ensemble $Z(t)\subset E_n$. En considérant t comme temps Z est un ensemble mobile. Nous disons que le point X_0 de la frontière de $Z(t_0)$ est à l'instant t_0 le *point d'entrée stricte* [2]) (ou *de sortie stricte*) pour une intégrale $X(t)$ si $X_0=X(t_0)$ et s'il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que

$$X(t)\in \text{l'extérieur de } Z(t) \text{ pour } t\in(t_0-\varepsilon,t_0)$$

et

$$X(t)\in \text{l'intérieur de } Z(t) \text{ pour } t\in(t_0,t_0+\varepsilon)$$

(ou

$$X(t)\in \text{l'intérieur de } Z(t) \text{ pour } t\in(t_0-\varepsilon,t_0)$$

et

$$X(t)\in \text{l'extérieur de } Z(t) \text{ pour } t\in(t_0,t_0+\varepsilon)\big).$$

Si à chaque instant $t>t_0$ les intégrales entrent dans l'ensemble Z sur toute sa frontière, c'est-à-dire si tous les points de la frontière de $Z(t)$ sont des points d'entrée stricte pour les intégrales qui passent par ces points à chaque instant $t>t_0$, ces intégrales restent à l'intérieur de Z, c'est-à-dire, lorsque $t_1>t_0$ et $X(t_1)\in$ frontière de $Z(t_1)$, on a $X(t)\in Z(t)$ pour $t>t_1$.

Par exemple, soit $Z(t)$ l'ensemble défini par l'inégalité $x_1\geqslant\varphi(t)$ et soit

$$f_1\big(\varphi(t),x_2,\ldots,x_n\big)<\varphi'(t)$$

pour chaque système de valeurs $x_2,\ldots,x_n$; alors les intégrales du système (2) entrent en l'intérieur de Z sur toute sa frontière [3]).

Nous allons utiliser (§ 5, n° 4) le théorème de M. T. Ważewski ([9], th. 2) dans le cas particulier $(n=2)$ suivant [4]).

Supposons qu'un rectangle mobile R soit à tout instant t l'intersection de deux bandes mobiles P_1: $\varphi_1(t)\leqslant y\leqslant\varphi_2(t)$ et P_2: $\psi_1(t)\leqslant x\leqslant\psi_2(t)$. Si, pour $t>t_0$, les intégrales entrent dans la bande P_1 sur les côtés horisontaux de R et elles sortent de la bande P_2 sur les côtés verticaux de R, il existe une intégrale qui reste pour $t>t_0$ à l'intérieur de R.

Enfin nous allons nous servir (§ 5, n° 4) du théorème suivant [5]): Si $y'(x)<f\big(x,y(x)\big)$ et si $y_0(x)$ est l'unique intégrale de l'équation $dy/dx=f(x,y)$ pour laquelle $y_0(x_0)=y(x_0)$, alors $y(x)>y_0(x)$ pour $x<x_0$ et $y(x)<y_0(x)$ pour $x>x_0$. Une théorème analogue subsiste pour l'inégalité $y'(x)>f\big(x,y(x)\big)$.

[2]) Cf. [9], § 7.
[3]) Cf. [9], § 14.
[4]) Cf. [9], th. 5.
[5]) Cf. p. ex. [2], p. 82, démonstration du théorème 1.

§ 1. Transformations de système en système

Définition de la transformation de système en système. Soient B et D des domaines de E_{n+1}, soient $F(t,X)$ et $G(\tau,X)$ continues respectivement dans B et D. Considérons les systèmes

$$\dot{X}=F(t,X) \quad \text{dans } B, \tag{3}$$

$$\dot{Y}=G(\tau,Y) \quad \text{dans } D \tag{4}$$

et la transformation T: $t=h(\tau)$, $X=\Phi(\tau,Y)$.

Nous disons que la transformation T conduit du système (3) *au système* (4) *ou qu'elle est la transformation du système* (3) *en système* (4) *si*

1° *T est une homéomorphie de D sur B* $\big(T(D)=B\big)$;

2° *il existe entre les intégrales du système* (3) *et du système* (4) *une correspondance biunivoque telle que, pour deux intégrales correspondantes $X(t)$ dans (a,b) et $Y(\tau)$ dans (α,β), on ait*

$$X\big(h(\tau)\big)=\Phi\big(\tau,Y(\tau)\big) \quad \textit{lorsque} \quad \alpha<\tau<\beta, \tag{5}$$

$$h\big((\alpha,\beta)\big)=(a,b). \tag{6}$$

Voici quelques propositions évidentes concernant les transformations de système en système.

Proposition 1. *Lorsque une intégrale $\mathcal{I}$ du système* (3) *correspond à une intégrale $\mathcal{J}$ du système* (4), *l'ensemble de points situés sur $\mathcal{J}$* [6]) *est l'image de l'ensemble de points situés sur $\mathcal{I}$.*

Proposition 2. *Si la fonction $h(\tau)$ est croissante, les intégrales saturées* (*ou saturées à droite, à gauche*) *correspondent aux intégrales saturées* (*ou saturées à droite, à gauche*). *De même pour la fonction $h(\tau)$ décroissante.*

Proposition 3. *La transformation T conduit toujours du système* (U) *au système* (U).

Proposition 4. *Si $B_1\subset B$, $D_1\subset D$ et $T(D_1)=B_1$* (*où B_1 et D_1 sont des domaines*), *la transformation T conduit du système* (3) *envisagé dans B_1 au système* (4) *envisagé dans D_1.*

Proposition 5. *La transformation inverse T^{-1} est de la forme: $\tau=g(t)$, $Y=\Psi(t,X)$ et elle conduit du système* (4) *au système* (3). *La correspondance entre les intégrales est la même pour T et T^{-1}.*

Proposition 6. *Si T_i est une transformation du système S_{i-1} en système S_i $(i=1,2,\ldots,r)$, la transformation composée $T=T_1\ldots T_r$ conduit de S_0 à S_r; lorsqu'une intégrale $\mathcal{I}_{i-1}$ de S_{i-1} correspond à une intégrale $\mathcal{I}_i$ de S_i par T_i $(i=1,2,\ldots,r)$, alors $\mathcal{I}_0$ correspond à $\mathcal{I}_r$ par T.*

[6]) C'est-à-dire l'ensemble de points de la forme $(t,X(t))$, où $X(t)$ est l'intégrale $\mathcal{I}$.

PROPOSITION 7. *Soit T: $t=h(\tau)$, $X=\Phi(\tau, Y)$ une homéomorphie régulière d'un domaine D sur un domaine B et soit $F(t,X)$ continue dans B. La transformation T conduit du système $\dot{X}=F(t,X)$ dans B au système*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}(\tau,Y)+\left[\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right]\dot{Y}=F\big(h(\tau),\Phi(\tau,Y)\big)h'(\tau) \quad \text{dans} \quad D.$$

Nous dirons *transformation* $X=\Phi(t,Y)$ au lieu de *transformation* $t=\tau$, $X=\Phi(\tau,Y)$.

PROPOSITION 8. *Supposons qu'une transformation T: $X=\Phi(Y)$ conduise du système*

(7) $$\dot{X}=F(X) \quad \text{dans} \quad (-\infty,+\infty)\times\Delta$$

au système

(8) $$\dot{Y}=G(Y) \quad \text{dans} \quad (-\infty,+\infty)\times\Omega,$$

F, G, Φ étant continues et indépendantes à t dans domaine Δ respectivement Ω. Il existe alors entre les caractéristiques du système (7) *et du système* (8) *une correspondance biunivoque telle que*

1° *les projections des intégrales correspondantes par T se correspondent et des caractéristiques correspondantes sont les projections des intégrales correspondantes par T,*

2° *la transformation Φ est une homéomorphie de Ω sur Δ qui transforme les caractéristiques du système* (8) *en les caractéristiques correspondantes du système* (7).

Supposons que la famille R_1 de demi-caractéristiques de (7) *corresponde à la famille R_2 de demi-caractéristiques de* (8); *soit $Z_1\subset\Delta$, $Z_2\subset\Omega$ et $Z_1=\Phi(Z_2)$. Si R_1 engendre Z_1, alors R_2 engendre Z_2.*

PROPOSITION 9. *Soit $\Phi(X)$ une homéomorphie régulière dans un domaine Δ à n dimensions. Supposons que $\Theta\in\Delta$, $\Phi(\Theta)=\Theta$ et $\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]=\mathfrak{I}$. Cela posé chaque hypersurface régulière contenant Θ et contenue dans Δ est tangente dans Θ à son image par Φ; l'image de toute courbe aboutissant à Θ et ayant la demi-tangente en Θ, a la même demi-tangente en Θ.*

§ 2. Coïncidence asymptotique des intégrales et des caractéristiques

Considérons le système du type (U)

(I) $$\dot{X}=F(t,X) \quad \text{dans} \quad B,$$

B étant un domaine à $n+1$ dimensions. Soient t_0 un nombre et Z un sous-ensemble de E_n tels que $\{t_0\}\times Z\subset B$[7]. L'ensemble de tous les points (t,X) pour lesquels $t\geqslant t_0$, qui sont situés sur les intégrales passant par les points de $\{t_0\}\times Z$, s'appelle *zone d'émission* (*à droite*[8]) de l'ensemble $\{t_0\}\times Z$, respective au système (I), et se note

$$\mathrm{Em}_{(\mathrm{I})}(t_0,Z).$$

Soit

(II) $$\dot{X}=G(t,X) \quad \text{dans} \quad D$$

un autre système (U), D étant un domaine à $n+1$ dimensions. Introduisons avec M. T. Ważewski[9]) la suivante

Définition de la coïncidence asymptotique des intégrales. *On dit qu'une integrale $\mathcal{I}_{\mathrm{I}}$ du système* (I) *coïncide asymptotiquement avec une intégrale $\mathcal{I}_{\mathrm{II}}$ du système* (II) *si*

1° *les intégrales $\mathcal{I}_{\mathrm{I}}$ et $\mathcal{I}_{\mathrm{II}}$ sont saturées à droite;*

2° *à tout point (t_1,X_1) situé sur $\mathcal{I}_{\mathrm{I}}$ et à chaque nombre $\varepsilon>0$*[10]) *correspondent un point (t_2,X_2) situé sur $\mathcal{I}_{\mathrm{II}}$ et un nombre $\delta>0$ tels que*

$$\mathrm{Em}_{(\mathrm{II})}\big(t_2,K(X_2,\delta)\big)\subset\mathrm{Em}_{(\mathrm{I})}\big(t_1,K(X_1,\varepsilon)\big);$$

3° *à tout point (t_2,X_2) situé sur $\mathcal{I}_{\mathrm{II}}$ et à chaque nombre $\eta>0$*[10]) *correspondent un point (t_1,X_1) situé sur $\mathcal{I}_{\mathrm{I}}$ et un nombre $\mu>0$ tels que*

$$\mathrm{Em}_{(\mathrm{I})}\big(t_1,K(X_1,\mu)\big)\subset\mathrm{Em}_{(\mathrm{II})}\big(t_2,K(X_2,\eta)\big).$$

Cette définition entraîne immédiatement les conséquences suivantes:

PROPOSITION 10. *Si l'on remplace une intégrale par son prolongement à gauche ou par sa restriction à gauche la coïncidence demeure.*

PROPOSITION 11. *Si une intégrale $X_{\mathrm{I}}(t)$ dans (a,b) du système* (I) *coïncide asymptotiquement avec une intégrale $X_{\mathrm{II}}(t)$ dans (c,d) du système* (II), *on a $b=d$.*

PROPOSITION 12. *Soit* (I*) *le système* (I) *envisagé dans un domaine B^* $\big(F(t,X)$ étant définie dans $B+B^*\big)$, soient $\mathcal{J}$ une intégrale commune de* (I) *et de* (I*), *$\mathcal{J}$ une intégrale de* (II). *Supposons qu'il existe $\varepsilon>0$ et un point (t_0,X_0) sur $\mathcal{I}$ tels que $\mathrm{Em}_{(\mathrm{I})}\big(t_0,K(X_0,\varepsilon)\big)=\mathrm{Em}_{(\mathrm{I}^*)}\big(t_0,K(X_0,\varepsilon)\big)$. La coïncidence asymptotique de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$, considérée comme une intégrale de* (I) *est équivalente à la coïncidence asymptotique de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{I}$, considérée comme une intégrale de* (I*).

---

[7]) $\{t_0\}$ désigne l'ensemble d'un seul nombre t_0.

[8]) On définie pareillement la zone d'émission à gauche; puisque nous nous servirons dans la suite exclusivement de la zone d'émission à droite et de la coïncidence asymptotique à droite, nous omettrons „à droite".

[9]) Cf. [7] et [8].

[10]) Evidemment, il suffit de l'établir pour chaque ε ou η suffisamment petit.

Corollaire. *Supposons que $B^*\subset B$ et chaque intégrale saturée à droite de* (I*) *soit définie dans un intervalle de la forme (a,∞). Pour qu'une intégrale $\mathcal{I}$ de* (I*) *coïncide asymptotiquement avec une intégrale $\mathcal{J}$ de* (II), *il faut et il suffit qu'il en soit de même lorsque $\mathcal{I}$ est considérée comme une intégrale de* (I).

Les deux propositions suivantes sont établies par M. T. Ważewski dans [7] et [8].

Proposition 13. *Chaque intégrale du système* (I) *coïncide asymptotiquement avec au plus une intégrale saturée du système* (II) (*et vice-versa*).

Proposition 14. *Supposons que la transformation T conduit du système* (I) *à un système* (I*) *et du système* (II) *à un système* (II*); *soient $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_1^*$ des intégrales correspondantes de* (I) *resp.* (I*) *et soient $\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_2^*$ des intégrales correspondantes de* (II) *resp.* (II*). *Si $\mathcal{I}_1$ coïncide asymptotiquement avec $\mathcal{I}_2$, alors $\mathcal{I}_1^*$ coïncide asymptotiquement avec $\mathcal{I}_2^*$.*

Soit Δ un domaine à n dimensions et soit

$$\text{(III)} \qquad \dot{X}=F(X) \quad \text{dans} \quad (-\infty,+\infty)\times\Delta$$

un système (U), où $F(X)$ est indépendante à t. Nous avons évidemment

Proposition 15. *Si $Z\subset\Delta$, l'ensemble $\mathrm{Em}_{(\mathrm{III})}(t_0+k,Z)$ est l'image de l'ensemble $\mathrm{Em}_{(\mathrm{III})}(t_0,Z)$ par la translation $\tau=t+k$.*

Soit $Z\subset\Delta$. Il résulte de la proposition 15 que l'ensemble $\mathrm{pr}\big(\mathrm{Em}_{(\mathrm{III})}(t,Z)\big)$ ne dépend pas de t. Nous désignons cet ensemble par $\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}(Z)$ [11]). Soit

$$\text{(IV)} \qquad \dot{X}=G(X) \quad \text{dans} \quad (-\infty,+\infty)\times\Omega$$

un autre système (U), $G(X)$ étant indépendante de t dans un domaine Ω à n dimensions.

Définition de la coïncidence asymptotique des caractéristiques. *On dit qu'une caractéristique $\mathcal{C}_1$ du système* (III) *coïncide asymptotiquement avec une caractéristique $\mathcal{C}_2$ du système* (IV) *lorsque*

1° *les caractéristiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont saturées à droite;*

2° *à tout point X_1 sur $\mathcal{C}_1$ et à chaque nombre $\varepsilon>0$ correspondent un point X_2 sur $\mathcal{C}_2$ et un nombre $\delta>0$ tels que*

$$\mathrm{em}_{(\mathrm{IV})}\big(K(X_2,\delta)\big)\subset\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}\big(K(X_1,\varepsilon)\big);$$

3° *à tout point X_2 sur $\mathcal{C}_2$ et à chaque nombre $\eta>0$ correspondent un point X_1 sur $\mathcal{C}_2$ et un nombre $\mu>0$ tels que*

$$\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}\big(K(X_1,\mu)\big)\subset\mathrm{em}_{(\mathrm{IV})}\big(K(x_2,\eta)\big).$$

---

[11]) $\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}(Z)$ est l'ensemble de tous les points qui sont situés sur les caractéristiques sortant des points de Z.

Cette définition entraîne la suivante

Proposition 16. *Si l'on remplace une caractéristique par son prolongement à gauche ou bien par sa restriction à gauche la coïncidence asymptotique demeure.*

Résulte de la proposition 15 la suivante

Proposition 17. *Si une intégrale $X(t)$ dans (a,b) du système* (III) *coïncide asymptotiquement avec une intégrale $Y(t)$ dans (c,d) du système* (IV), *l'intégrale $X(t+k)$ dans $(a-k,b-k)$ coïncide asymptotiquement avec l'intégrale $Y(t+k)$ dans $(c-k,d-k)$.*

En vertu de la définition de l'ensemble $\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}(Z)$ nous avons la suivante

Proposition 18. *Lorsque une intégrale $\mathcal{I}_1$ de* (III) *et une intégrale $\mathcal{I}_2$ de* (IV) *coïncident asymptotiquement, il en est de même de leurs projections.*

La proposition suivante peut être démontrée comme la proposition 14.

Proposition 19. *Supposons que la transformation $x=\Phi(Y)$ conduit du système* (III) *au système*

$$\text{(III*)} \qquad \dot{X}=F^*(X) \quad \textit{dans} \quad (-\infty,+\infty)\times\Delta^*,$$

et du système (IV) *au système*

$$\text{(IV*)} \qquad \dot{Y}=G^*(Y) \quad \textit{dans} \quad (-\infty,+\infty)\times\Omega^*.$$

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_1^*$ des caractéristiques correspondantes de (III) *resp.* (III*) *et soient $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_2^*$ des caractéristiques correspondantes de* (IV) *resp.* (IV*). *Si $\mathcal{C}_1$ coïncide asymptotiquement avec $\mathcal{C}_2$, alors $\mathcal{C}_1^*$ coïncide asymptotiquement avec $\mathcal{C}_2^*$.*

Proposition 20. *Chaque caractéristique du système* (III) *coïncide asymptotiquement avec au plus une caractéristique saturée du système* (IV) (*et vice-versa*).

Démonstration. Supposons par impossible, qu'une caractéristique $\mathcal{C}$ du systéme (III) coïncide asymptotiquement avec deux caractéristiques saturées différentes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ du système (IV). Soient X_1 un point sur $\mathcal{C}_1$ et ε un nombre positif tel que

$$(9) \qquad \mathcal{C}_2 K(X_1,\varepsilon)=0.$$

D'après la définition de la coïncidence asymptotique des caractéristiques il existe un point X_0 sur $\mathcal{C}$ et un nombre $\delta>0$ tels que

$$\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}\big(K(X_0,\delta)\big)\subset\mathrm{em}_{(\mathrm{IV})}\big(K(X_1,\varepsilon)\big).$$

De même, il existe un point X_2 sur $\mathcal{C}_2$ qui appartient à $\mathrm{em}_{(\mathrm{III})}\big(K(X_0,\delta)\big)$. Alors $X_2 \epsilon\, \mathrm{em}_{(\mathrm{IV})}\big(K(X_1,\varepsilon)\big)$ et la caractéristique $\mathcal{C}_2$ doit passer par un point $X_3 \epsilon K(X_1,\varepsilon)$. Mais cela contredit à (9).

PROPOSITION 21. *Soient Δ, Ω des domaines à n-dimensions et*

$$\text{(V)} \qquad \dot{X}=F(X) \quad \textit{dans} \quad B'=(-\infty,+\infty)\times\Delta,$$

$$\text{(VI)} \qquad \dot{Y}=G(Y) \quad \textit{dans} \quad D'=(-\infty,+\infty)\times\Omega$$

des systèmes (U), où F et G ne dépendent pas de t. Soient B, D des domaines à $n+1$ dimensions tels que

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{pr}(B)=\Delta, \qquad \mathrm{pr}(D)=\Omega$$

et tels que chaque intégrale saturée à droite du système (V) *envisagé dans B, ou du système* (VI) *envisagé dans D, soit aussi saturée à droite comme l'intégrale du système* (V) *dans B' ou du système* (VI) *dans D'. Supposons que la transformation T: $X=\Phi(t,Y)$ conduise du système* (V) *dans B au système* (IV) *dans D de façon que deux intégrales correspondantes, saturées à droite, coïncident asymptotiquement.*

Ceci étant admis nous affirmons que

1° *$\Phi(t,Y)$ est indépendante de t,*

2° *la transformation $X=\Phi(Y)=\Phi(t,Y)$ conduit du système* (V) *dans B' au système* (VI) *dans D' de façon que deux intégrales, ou caractéristiques, correspondantes, saturées à droite coïncident asymptotiquement.*

Démonstration. D'après les hypothèses la zone d'émission (à droite) de chaque ensemble contenu dans B, respective au système (V) dans B est identique à celle respective au système (V) dans B'. Il en est de même pour les systèmes (VI) dans D et (VI) dans D'. Il s'ensuit que si une intégrale $\mathcal{I}_1$ de (V) dans B coïncide asymptotiquement avec une intégrale $\mathcal{I}_2$ de (VI) dans D, alors aussi $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ coïncident asymptotiquement comme les intégrales des systémes (V) dans B' et (VI) dans D'.

Supposons que

$$\text{(11)} \qquad (t_1, Y_0)\,\epsilon\, D \qquad \text{et} \qquad (t_2, Y_0)\,\epsilon\, D.$$

Soient $\overset{1}{Y}(t)$, $\overset{2}{Y}(t)$ des intégrales saturées du système (VI) dans D tels que

$$\text{(12)} \qquad Y_0=\overset{1}{Y}(t_1)=\overset{2}{Y}(t_2).$$

En désignant par $\overset{1}{X}(t)$, $\overset{2}{X}(t)$ les intégrales correspondantes, nous avons

$$\text{(13)} \qquad \overset{1}{X}(t_1)=\Phi(t_1,Y_0) \qquad \text{et} \qquad \overset{2}{X}(t_2)=\Phi(t_2,Y_0).$$

D'après les hypothèses, $\overset{1}{Y}(t)$, $\overset{2}{Y}(t)$ coïncident asymptotiquement avec $\overset{1}{X}(t)$, $\overset{2}{X}(t)$ et elles coïncident asymptotiquement comme les intégrales des systèmes (V) dans B' et (VI) dans D' aussi. En vertu de (12), $\overset{1}{Y}(t) =\overset{2}{Y}(t+t_2-t_1)$, donc, d'après la proposition 17, $\overset{1}{Y}(t)$ coïncide asymptotiquement avec $\overset{2}{X}(t+t_2-t_1)$ $\big(\overset{1}{Y}(t)$ et $\overset{2}{X}(t+t_2-t_1)$ comme les intégrales des systèmes (VI) dans D' et (V) dans $B'\big)$. Il résulte des propositions 10 et 13 que $\overset{1}{X}(t)=\overset{2}{X}(t+t_2-t_1)$ lorsque $\overset{1}{X}(t)$ et $\overset{2}{X}(i+t_2-t_1)$ sont définies. En particulier, $\overset{1}{X}(t_1)=\overset{2}{X}(t_2)$, d'où, d'après (13),

$$\text{(14)} \qquad \Phi(t_1, Y_0)=\Phi(t_2, Y_0).$$

Les relations (11) entraînent donc la relation (14), autrement dit $\Phi(t,Y)$ est indépendante de t.

Selon la proposition 5 la transformation inverse T^{-1} est de la forme $Y=\Psi(t,X)$ et elle conduit du système (VI) dans D au système (V) dans B. Nous montrons de la même manière que $\Psi(t,X)$ ne dépend pas de t.

Nous pouvons donc admettre $\Phi(Y)=\Phi(t,Y)$ dans Ω et $\Psi(X) =\Psi(t,X)$ dans Δ. Si $Y\epsilon\Omega$, nous avons $(t,Y)\epsilon D$ pour certain t, donc $(t,Y)=T^{-1}T(t,Y)=\big(t,\Psi(\Phi(Y))\big)$ et par suite $\Psi\big(\Phi(Y)\big)=Y$. Ceci montre que Φ est une homéomorphie de Ω sur Δ, puisque Φ et Ψ sont continues et, d'après (10), $\Phi(\Omega)=\Delta$. Par conséquent, $X=\Phi(Y)$ est une homéomorphie de D' sur B'.

Nous montrerons maintenant que la transformation $X=\Phi(Y)$ conduit du système (V) dans B' au système (VI) dans D'. Il suffit de démontrer que les relations

$$\text{(15)} \qquad X(t)=\Phi\big(Y(t)\big) \qquad \text{et} \qquad Y(t)=\Psi\big(X(t)\big)$$

réalisent une correspondance biunivoque entre la totalité des intégrales de (V) dans B' et la totalité des intégrales de (VI) dans D'.

A cet effet supposons que $Y(t)$ dans (α,β) soit une intégrale de (VI) dans D'. Il faut prouver que $X(t)=\Phi\big(Y(t)\big)$ dans (α,β) est une intégrale de (V) dans B'. Soit t_1 un nombre quelconque de (α,β). D'après (10), nous avons

$$\text{(16)} \qquad \big(t_2, Y(t_1)\big)\,\epsilon\, D$$

pour un certain t_2. $\overline{Y}(t)=Y(t+t_1-t_2)$ est une intégrale de (VI) dans D' pour laquelle $\overline{Y}(t_2)=Y(t_1)$, d'où, d'après (16), nous avons $\big(t_2,\overline{Y}(t_2)\big)\epsilon D$. Il existe alors un $\varepsilon>0$ tel que $\overline{Y}(t)$ dans $(t_2-\varepsilon, t_2+\varepsilon)$ soit une intégrale de (VI) dans D. Par conséquent, $\overline{X}(t)=\Phi\big(\overline{Y}(t)\big)$ dans $(t_2-\varepsilon,t_2+\varepsilon)$ est une intégrale de (V) dans B, donc elle est aussi une intégrale de (V) dans B'. Mais $X(t)=\Phi(Y(t))=\Phi(\overline{Y}(t+t_2-t_1))=\overline{X}(t+t_2-t_1)$, d'où il résulte que $X(t)$ dans $(t_1-\varepsilon, t_1+\varepsilon)$ est une intégrale de (V) dans B'. t_1 étant un nombre quelconque de (α,β), il s'ensuit que $X(t)$ dans (α,β) est une intégrale de (V) dans B'.

Réciproquement, en supposant que $X(t)$ dans (α,β) soit une intégrale de (V) dans B', nous montrons d'une façon analogue que $Y(t)=\Psi(X(t))$ dans (α,β) est une intégrale de (VI) dans D'.

Il reste à montrer que les intégrales et caractéristiques correspondantes, saturées à droite, coïncident asymptotiquement.

Soient $X(t)$ dans (α,β) et $Y(t)$ dans (α,β) deux intégrales correspondantes des systèmes (V) dans B' et (VI) dans D'. Nous avons alors

(17) $$X(t)=\Phi(Y(t)) \quad \text{dans} \quad (\alpha,\beta).$$

D'après (10), il existe un k tel que l'intégrale du système (VI) dans D'

(18) $$\tilde{Y}(t)=Y(t+k) \quad \text{dans} \quad (\alpha-k,\beta-k)$$

(saturée à droite) passe par un point de D; autrement dit, $(\bar{\alpha}, \tilde{Y}(\bar{\alpha}))\epsilon D$ pour un certain $\bar{\alpha}$. En vertu des hypothèses il résulte que $\tilde{Y}(t)$ dans $(\bar{\alpha},\beta-k)$ est une intégrale du système (VI) dans D, saturée à droite; elle coïncide asymptotiquement avec l'intégrale correspondante du système (V) dans B, $\tilde{X}(t)=\Phi(\tilde{Y}(t))$ dans $(\bar{\alpha},\beta-k)$. D'après (17) et (18),

(19) $$\tilde{X}(t)=X(t+k) \quad \text{dans} \quad (\bar{\alpha},\beta-k).$$

Selon la remarque faite au début de la démonstration, $\tilde{X}(t)$ dans $(\bar{\alpha},\beta-k)$ et $\tilde{Y}(t)$ dans $(\bar{\alpha},\beta-k)$ coïncident asymptotiquement aussi comme les intégrales des systèmes (V) dans B' et (VI) dans D'. En vertu des propositions 10 et 17, il résulte de (18) et (19) que $X(t)$ dans (α,β) coïncide asymptotiquement avec $Y(t)$ dans (α,β). La coïncidence asymptotique des caractéristiques correspondantes est une conséquence des propositions 8 et 18.

Proposition 22. *Soit*

(VII) $$\dot{X}=F(t,X) \quad \textit{dans} \quad B=(a_0,\infty)\times\Omega$$

un système (U), Ω *étant un domaine à n dimensions. Supposons qu'à tout* $X\epsilon\Omega$ *ne corresponde qu'une intégrale* $\Gamma(t,X)$ *de* (VII), *saturée, pour laquelle*

(20) $$\lim_{t\to\infty}\Gamma(t,X)=X.$$

Supposons de plus que la convergence dans (20) *est presque uniforme dans*[12]).

Dans ces hypothèses

1° *à chaque domaine borné* Δ, $\overline{\Delta}\subset\Omega$, *correspond un a tel que* $T_0(t,X)=\{t,\Gamma(t,X)\}$[13]) *soit une homéomorphie dans* $[a,\infty)\times\overline{\Delta}$;

2° *pour chaque* $X\epsilon\Omega$, *l'intégrale* $\Gamma(t,X)$ *coïncide asymptotiquement avec l'intégrale constante* X *du système banal*

(VIII) $$\dot{X}=\Theta\ ^{14}).$$

Démonstration. Soit Δ un domaine borné tel que

(21) $$\overline{\Delta}\subset\Omega.$$

Il existe un domaine borné Δ' pour lequel

(22) $$\overline{\Delta}\subset\Delta' \quad \text{et} \quad \overline{\Delta}'\subset\Omega.$$

En posant $\varrho=\varrho(\overline{\Delta}$, frontière de $\Delta')$[15]), on a $\varrho>0$. La convergence dans (20) étant presque uniforme, il existe, d'après (21), un $a>a_0$ tel que $\Gamma(t,X)$ soit définie et $|\Gamma(t,X)-X|\leqslant\varrho$ pour $t\geqslant a$ et $X\epsilon\overline{\Delta}$. Par conséquent,

(23) $$\Gamma(t,X)\epsilon\overline{\Delta}' \quad \text{lorsque} \quad (t,X)\epsilon\overline{D},$$

où $D=(a,\infty)\times\Delta$. Nous prouverons d'abord que T_0 est une homéomorphie dans $\overline{D}$. T_0 étant, d'après les hypothèses, une transformation biunivoque, il suffit de démontrer que $\Gamma(t,X)$ est continue dans $\overline{D}$ (la continuité de la transformation inverse résultera de la forme particulière de T_0).

Supposons, par contre, que Γ soit discontinue en un point $(\bar{t},\overline{X})\epsilon\overline{D}$. D'après (23), Γ est bornée dans $\overline{D}$, donc il existe une suite $\{(t_n,X_n)\}$ telle que

(24) $$(t_n,X_n)\epsilon\overline{D} \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots, \quad (t_n,X_n)\to(\bar{t},\overline{X}),$$

(25) $$Y_n=\Gamma(t_n,X_n)\to\overline{Y},$$

(26) $$\overline{Y}\neq\Gamma(\bar{t},\overline{X}).$$

---

[12]) C'est-à-dire quels que soient $\varepsilon>0$ et un domaine borné Δ, $\overline{\Delta}\subset\Omega$, il existe un nombre t_0 tel que $\Gamma(t,X)$ soit définie, $|\Gamma(t,X)-X|<\varepsilon$ pour $t>t_0$ et $X\epsilon\overline{\Delta}$, ou ce qui revient au même, lorsque $t_\nu\to\infty$ et $X_\nu\to X\epsilon\Omega$, $\Gamma(t_\nu,X_\nu)$ est définie pour presque tous les termes de la suite $\{(t_\nu,X_\nu)\}$ et $\Gamma(t_\nu,X_\nu)\to X$.

[13]) C'est-à-dire la transformation $t=t$, $X=\Gamma(t,X)$.

[14]) La partie 2° de cette proposition est analogue au théorème de T. Ważewski ([8], th. 2), les hypothèses étant différentes.

[15]) Nous désignons par $\varrho(Z_1,Z_2)$ la distance entre deux ensembles Z_1 et Z_2.

Soit $\Gamma(t)$ dans (α,β) l'intégrale saturée, passant par $(\bar{t},\bar{Y})$; autrement dit $\alpha<\bar{t}<\beta$ et

$$\bar{Y}=\Gamma(\bar{t}). \tag{27}$$

Comme $\Gamma(t,X_n)$ est l'intégrale, passant par (t_n,X_n) et comme, d'après (24), (25), $(t_n,Y_n)\to(\bar{t},\bar{Y})$, nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma(t,X_n)=\Gamma(t) \quad \text{pour} \quad t\epsilon(\bar{t},\beta). \tag{28}$$

Puisque $\bar{t}\geqslant a$ et $X_n\epsilon\bar{\Delta}$, alors $(t,X_n)\epsilon\bar{D}$ pour $t>\bar{t}$, d'où, en vertu de (23) et (28), $\Gamma(t)\epsilon\bar{\Delta}'$ pour $t\epsilon(\bar{t},\beta)$. Nous concluons que

$$\beta=\infty, \tag{29}$$

car, d'après (22), $[\bar{t},\infty)\times\bar{\Delta}'\subset B$ et, par conséquent, l'intégrale $\Gamma(t)$ ne peut pas tendre vers la frontière de B pour $t\to\beta$.

Soit $\varepsilon>0$. Comme, par hypothèse, $\lim\limits_{t\to\infty}\Gamma(t,X)=X$ uniformément dans $\bar{\Delta}$, il existe un $t^*(\varepsilon)$ tel que

$$t^*(\varepsilon)>\bar{t} \tag{30}$$

et

$$|\Gamma(t,X_n)-X_n|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{lorsque} \quad t>t^*(\varepsilon), \quad n=1,2,\ldots \tag{31}$$

D'après (24), il existe un indice N tel que

$$|X_n-X|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{lorsque} \quad n>N. \tag{32}$$

En supposant que $t>t^*(\varepsilon)$, nous avons, selon (28), (29) et (30),

$$|\Gamma(t,X_{n_0})-\Gamma(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

pour un certain $n_r>N$, ce qui implique en vertu des relations (31) et (32) que $|\Gamma(t)-\bar{X}|<\varepsilon$. Nous avons donc $\lim\limits_{t\to\infty}\Gamma(t)=\bar{X}$, d'où, par hypothèse, $\Gamma(t)\equiv\Gamma(t,\bar{X})$ lorsque $t>\max(a,\alpha)$. En particulier, d'après (27), $\bar{Y}=\Gamma(\bar{t},\bar{X})$, contrairement à (26). La partie 1° de la proposition est donc établie.

Soit $X_0\epsilon\Omega$. Nous allons démontrer que l'intégrale $\Gamma(t,X_0)$ de (VII) coïncide asymptotiquement avec l'intégrale constante X_0 de (VIII).

Il résulte de 1° qu'il existent deux nombres $r>0$ et a tels que $\Gamma(t_0,X)$ soit une homéomorphie dans $\bar{K}(X_0,r)$ pour chaque $t_0>a$ fixé arbitrairement. Nous pouvons faire la restriction des intégrales X_0 et $\Gamma(t,X_0)$ à l'intervalle (a,∞) (cf. prop. 11).

Soit $t_0>a$ (donc (t_0,X_0) soit un point sur l'intégrale constante $X=X_0$ dans (a,∞)) et soit $0<\varepsilon<r$. La convergence (20) étant uniforme dans $\bar{K}(X_0,r)$, il existe un $\bar{t}$ tel que

$$\bar{t}>t_0, \tag{33}$$

$$|\Gamma(t,X)-X|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{lorsque} \quad t\geqslant\bar{t} \quad \text{et} \quad X\epsilon K\left(X_0,\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{34}$$

Comme $\Gamma(\bar{t},K(X_0,\varepsilon/2))$ est un domaine[16]) contenant le point $\bar{X}=\Gamma(t,X_0)$ ($(\bar{t},\bar{X})$ est donc situé sur l'intégrale $\Gamma(t,X_0)$ dans (a,∞)), il existe un $\delta>0$ tel que

$$K(\bar{X},\delta)\subset\Gamma\left(\bar{t},K\left(X_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right). \tag{35}$$

Nous établirons l'inclusion

$$\mathrm{Em}_{(\mathrm{VII})}(\bar{t},K(\bar{X},\delta))\subset\mathrm{Em}_{(\mathrm{VIII})}(t_0,K(X_0,\varepsilon)). \tag{36}$$

En effet, si $(t,X)\epsilon\,\mathrm{Em}_{(\mathrm{VII})}(\bar{t},K(\bar{X},\delta))$, alors, d'après (35),

$$(t,X)\epsilon\,\mathrm{Em}_{(\mathrm{VII})}\left(\bar{t},\Gamma\left(\bar{t},K\left(X_0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right),$$

d'où

$$t\geqslant\bar{t} \tag{37}$$

et $X=\Gamma(t,X_1)$ pour un certain X_1 tel que

$$X_1\epsilon K\left(X_0,\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{38}$$

Selon (34), (37), (38), nous avons $|X-X_1|=|\Gamma(t,X_1)-X_1|<\varepsilon/2$, alors, d'après (38),

$$|X-X_0|<\varepsilon. \tag{39}$$

En vertu de (33), (37), (39), nous avons donc $(t,X)\subset\mathrm{Em}_{(\mathrm{VIII})}(t_0,K(X_0,\varepsilon))$, ce qui montre que l'inclusion (36) subsiste.

Supposons maintenant que $(\bar{t},\bar{X})$ soit situé sur l'intégrale $\Gamma(t,X_0)$ dans (a,∞), autrement dit

$$\bar{t}>a \quad \text{et} \quad \bar{X}=\Gamma(\bar{t},X_0). \tag{40}$$

Puisque $\Gamma(\bar{t},K(X_0,r))$ est un domaine contenant le point $\bar{X}$, il existe un $\eta_0>0$ tel que $K(\bar{X},\eta_0)\subset\Gamma(\bar{t},K(X_0,r))$. Soit $0<\eta<\eta_0$. Il vient

$$K(\bar{X},\eta)\subset\Gamma(\bar{t},K(X_0,r)). \tag{41}$$

[16]) L'image d'un domaine par une homéomorphie est un domaine.

Notre proposition sera démontrée dès que nous aurons prouvé qu'il existe un $t_0>a$ et un $\mu>0$ tels que

$$(t_0,\infty)\times K(X_0,\mu)=\mathrm{Em}_{(\mathrm{VIII})}\big(t_0,K(X_0,\mu)\big)\subset\mathrm{Em}_{(\mathrm{VII})}\big(\bar t,K(\bar X,\eta)\big). \tag{42}$$

Si nous supposons le contraire, il existe une suite $\{(\tau_n,X_n)\}$ telle que

$$\tau_n>\bar t, \tag{43}$$

$$\tau_n\to\infty, \tag{44}$$

$$X_n\to X_0, \tag{45}$$

$$(\tau_n,X_n)\ \mathrm{non}\in\mathrm{Em}_{(\mathrm{VII})}\big(\bar t,K(\bar X,\eta)\big). \tag{46}$$

$\Gamma(\bar t,X)$ étant homéomorphie dans $\bar K(X_0,r)$, il existe, d'après (41) et (40), un domaine Δ_∞ tel que

$$\Gamma(\bar t,\Delta_\infty)=K(\bar X,\eta), \tag{47}$$

$$X_0\in\Delta_\infty, \tag{48}$$

$$\Delta_\infty\subset K(X_0,r). \tag{49}$$

Comme (cf. (40) et (43)) $\tau_n>a$, $\Gamma(\tau_n,X)$ est une homéomorphie dans $\bar K(X_0,r)$, donc, d'après (49),

$$\Delta_n=\Gamma(\tau_n,\Delta_\infty)\qquad (n=1,2,\ldots), \tag{50}$$

sont des domaines. En posant $F_n=$frontière de Δ_n et $F_\infty=$frontière de Δ_∞ nous avons

$$F_n=\Gamma(\tau_n,F_\infty). \tag{51}$$

Si $X_n\in\Delta_n$, il existerait, d'après (50) et (47), un $X'\in\Delta_\infty$ tel que $X_n=\Gamma(\tau_n,X')$ et $\Gamma(\bar t,X')\in K(\bar X,\eta)$, d'où, en vertu de (43), $(\tau_n,X_n)\in\mathrm{Em}_{(\mathrm{VIII})}\big(\bar t,K(\bar X,\eta)\big)$, contrairement à (46). Nous avons donc X_n non$\in\Delta_n$. D'autre part, d'après (48) et (50), $\Gamma(\tau_n,X_0)\in\Delta_n$, donc le segment $[X_n,\Gamma(\tau_n,X_0)]$ contient un point

$$\bar X_n\in F_n. \tag{52}$$

Mais (cf. (20), (44)) $\Gamma(\tau_n,X_0)\to X_0$ et (cf. (45)) $X_n\to X_0$, alors

$$\bar X_n\to X_0. \tag{53}$$

En vertu de (52) et (51), il existe un point

$$\tilde X_n\in F_\infty \tag{54}$$

tel que $\bar X_n=\Gamma(\tau_n,\tilde X_n)$. Nous avons $|\bar X_n-\tilde X_n|=|\Gamma(\tau_n,\tilde X_n)-\tilde X_n|\to 0$, car la convergence (20) est uniforme dans $\bar K(X_0,r)$ et, selon (54) et (49), $\tilde X_n\in\bar K(X,r)$. Nous concluons en vertu (53), que $\tilde X_n\to X_0$, d'où, d'après (54), $X_0\in F_\infty$. Mais cela contredit à (48).

Il existe donc un $t_0>a$ et un $\mu>0$ tels que l'inclusion (42) subsiste, c. q. f. d.

§ 3. Lemme sur l'unicité dans l'infini

LEMME 1. *Supposons que la fonction (réelle) $h(t)$ soit de la classe C^1 dans l'intervalle (a,∞) et que*

$$h'(t)<0\quad pour\quad t>0, \tag{55}$$

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=0. \tag{56}$$

Soit $\sigma(t,z)$ une fonction continue et non positive pour $t>a$ et $z\geqslant 0$ telle que $\sigma(t,0)=0$ lorsque $t>a$. Supposons que $\varphi(t)\equiv 0$ soit la seule fonction pour laquelle

$$\varphi'(t)=\sigma\big(t,\varphi(t)\big)\quad lorsque\quad t>a \tag{57}$$

et

$$\varphi(t)=o\big(h(t)\big)\quad pour\quad t\to\infty. \tag{58}$$

Soit

$$\dot X=F(t,X)\quad dans\quad B=(a,\infty)\times\Omega \tag{IX}$$

un système (U), Ω étant un domaine à n dimensions; supposons que $F(t,X)$ satisfasse aux conditions

$$|F(t,X)|=o\big(h'(t)\big)\quad pour\quad t\to\infty\quad et\quad X\to X_0\quad lorsque\quad X_0\in\Omega, \tag{59}$$

$$|F(t,\bar{\bar X})-F(t,\bar X)|\leqslant-\sigma(t,|\bar{\bar X}-\bar X|)\quad lorsque\quad t>a\quad et\quad \bar X,\bar{\bar X}\in\Omega. \tag{60}$$

Dans ces hypothèses

1° A chaque $X\in\Omega$ correspond une et une seule intégrale $\Gamma(t,X)$ de (IX), saturée, pour laquelle

$$\lim_{t\to\infty}\Gamma(t,X)=X; \tag{61}$$

cette convergence est presque uniforme dans Ω.

2° A chaque domaine borné Δ, $\bar\Delta\subset\Omega$, correspond un $a_0>a$ tel que $T_0(t,X)=\{t,\Gamma(t,X)\}$ soit une homéomorphie $(a_0,\infty)\times\Delta$.

3° Si, de plus, $F'_{x_i}(t,X)$ sont continues dans B et

$$F'_{x_i}(t,X)=o\big(h'(t)\big)\ pour\ t\to\infty,\ X\to X_0\ et\ i=1,2,\ldots,n,\ lorsque\ X_0\in\Omega, \tag{62}$$

alors T_0 est une homéomorphie régulière dans $(a_0,\infty)\times\Delta$ et

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial X}(t,X)\right]=\mathfrak{I}. \tag{63}$$

Démonstration. Soit $g(\tau)$ la fonction inverse de $h(t)$; g est donc de la classe C^1 dans l'intervalle $(0,a)=h((a,\infty))$ et

$$g'(\tau)<0 \quad \text{lorsque} \quad 0<\tau<a, \tag{64}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} g(\tau)=\infty. \tag{65}$$

Posons

$$\omega(\tau,z)=\sigma(g(\tau),z)\,g'(\tau) \quad \text{pour} \quad 0<\tau<a, \quad z\geqslant 0 \tag{66}$$

et

$$H(\tau,X)=\begin{cases} F(g(|\tau|),X)\,g'(|\tau|) & \text{pour} \quad 0<|\tau|<a, \quad X\epsilon\Omega, \\ \Theta & \text{pour} \quad \tau=0, \quad X\epsilon\Omega. \end{cases} \tag{67}$$

$H(\tau,X)$ est continue dans $(-a,a)\times\Omega$, car, d'après (65) et (59), lorsque $X_0\epsilon\Omega$, nous avons

$$\lim_{(\tau,X)\to(\tau,X_0)} H(\tau,X)=\lim_{\substack{\tau\to 0\\ x\to X_0}} \frac{F(g(|\tau|),X)}{h(g(|\tau|))}=\lim_{\substack{t\to\infty\\ x\to X_0}} \frac{F(t,X)}{h(t)}=\Theta.$$

Considérons le système

$$\dot{X}=H(\tau,X) \quad \text{dans} \quad (-a,a)\times\Omega. \tag{X}$$

Nous montrerons que les hypothèses d'un théorème d'unicité du à E. Kamke[17]) sont remplies pour les systèmes (X) et

$$\dot{z}=\omega(\tau,z). \tag{68}$$

En effet, d'abord, d'après (66) et (64), $\omega(\tau,z)$ est continue, non négative pour $0<\tau<a$, $z\geqslant 0$ et nous avons $\omega(\tau,0)=0$ pour $0<\tau<a$.

Si $\chi(\tau)$ est continue dans $[0,a)$,

$$\chi'(\tau)=\omega(\tau,\chi(\tau)) \quad \text{pour} \quad 0<\tau<a \tag{69}$$

et $\chi(0)=\chi'(0)=0$, nous avons, en posant $\varphi(t)=\chi(h(t))$ pour $t>a$,

$$\varphi(t)=\frac{\chi'(h(t))}{g'(h(t))},$$

alors, d'après (69) et (66), $\varphi(t)$ satisfait aux conditions (57) et (58) (car $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\varphi(t)}{h(t)}=\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\varphi(g(\tau))}{h(g(\tau))}=\lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\chi(\tau)}{\tau}=0$). En vertu de l'hypothèse, nous avons donc $\varphi\equiv 0$ dans (a,∞), d'où $\chi(\tau)\equiv 0$ dans $(0,a)$.

[17]) Cf. E. Kamke [2], p. 139.

Nous avons, en outre, selon (67), (64), (60), (66),

$$|H(\tau,\overline{X})-H(\tau,\overline{\overline{X}})|=|F(g(|\tau|),\overline{X})-F(g(|\tau|),\overline{\overline{X}})|(-g'(|\tau|))$$
$$\leqslant\sigma(g(|\tau|),|\overline{\overline{X}}-\overline{X}|)g'(|\tau|)=\omega(|\tau|,|\overline{\overline{X}}-\overline{X}|)$$

lorsque $0<|\tau|<a$ et $\overline{X},\overline{\overline{X}}\epsilon\Omega$.

Nous en concluons, en vertu du théorème de Kamke, que par tout point $(0,X)$, où $X\epsilon\Omega$, passe une et une seule intégrale saturée du système (X), $\Psi(\tau,X)$ dans (a_X,β_X). Donc $a_X<0<\beta_X$ et

$$\Psi(0,X)=X. \tag{70}$$

La transformation $t=g(\tau)$ conduit (prop. 7) du système (IX) au système (X) envisagè dans $(0,a)\times\Omega$. $\Psi(\tau,X)$ dans $(0,\beta_X)$ étant une intégrale saturée du système (X) dans $(0,a)\times\Omega$,

$$\Gamma(t,X)=\Psi(h(t),X) \quad \text{dans} \quad (\gamma_X,\infty) \tag{71}$$

(où $(\gamma_X,\infty)=g((0,\beta_X))$) est celle du système (IX). Elle est, en outre, l'unique intégrale, saturée, satisfaisant à (61), car $\Psi(\tau,X)$ dans $(0,\beta_X)$ est l'unique intégrale de (X) dans $(0,a)\times\Omega$, saturée, pour laquelle $\lim\limits_{\tau\to\infty}\Psi(\tau,X)=X$.

Nous allons prouver que la convergence dans (61) est presque uniforme.

Soit Δ un domaine borné, $\overline{\Delta}\subset\Omega$. Il existe un domaine Δ_1 tel que $\overline{\Delta}\subset\Delta_1$, $\overline{\Delta}_1\subset\Omega$. En posant

$$\varrho=\varrho\ (\overline{\Delta},\ \text{frontière de}\ \Delta_1) \tag{72}$$

nous avons $\varrho>0$. $H(\tau,X)$ étant continue dans $(-a,a)\times\Omega$, il existe un nombre M tel que

$$|H(\tau,X)|<M \quad \text{pour} \quad |\tau|<\frac{a}{2} \quad \text{et} \quad X\epsilon\overline{\Delta}_1. \tag{73}$$

Soit $X\epsilon\overline{\Delta}$. Désignons par δ le plus grand nombre tel que $0<\delta<a/2$, $\Psi(\tau,X)$ soit définie dans $(0,\delta)$ et $|\Psi(t,X)-X|<\varrho$ pour $0\leqslant\tau<\delta$ (selon (70) le nombre en question existe). Il résulte de (72) que $\Psi(\tau,X)\epsilon\Delta_1$ pour $0\leqslant\tau<\delta$, d'où, d'après (73), $|\dot{\Psi}(\tau,X)|=|H(\tau,\Psi(\tau,X))|<M$ pour $0\leqslant\tau<\delta$ et, par suite, en vertu de (70) (en appliquant le théorème des accroissements finis)

$$|\Psi(\tau,X)-X|<M\tau \quad \text{lorsque} \quad 0\leqslant\tau<\delta. \tag{74}$$

Si $\delta<\min(a/2,\varrho/M)$, alors $\delta=\varrho_1/M$ pour un certain $\varrho_1\epsilon(0,\varrho)$ et, d'après (74), $|\Psi(\tau,X)-X|<\varrho_1<\varrho$ lorsque $0\leqslant\tau<\delta$. Il existerait donc (cf. (72))

un $\delta_1 > \delta$ tel que $\delta_1 < \alpha/2, \Psi(\tau, X)$ soit définie dans $(0, \delta_1)$ et $|\Psi(\tau, X) - X| < \varrho$ pour $0 \leqslant \tau < \delta_1$, contrairement à la définition de δ. Nous avons donc $\delta \geqslant \min(\alpha/2, \varrho/M)$ et, par suite, le relation (74) subsiste lorsque $0 \leqslant \tau < \min(\alpha/2, \varrho/M)$.

Il en résulte que $\lim_{t\to\infty} \Psi(\tau, X) = X$ uniformément dans $\bar{\Delta}$, que $\Gamma(t, X)$ est définie pour $X \epsilon \bar{\Delta}$, $t > g(\min(\alpha/2, \varrho/M))$ et, par conséquent, que $\lim_{t\to\infty} \Gamma(t, X) = X$ uniformément dans $\bar{\Delta}$. La convergence (61) est donc presque uniforme, ce qui termine la démonstration de 1°.

La partie 2° de la thèse est une conséquence de 1° et de la proposition 22.

Admettons enfin les hypothèses accessoires de 3°. Nous avons

$$H'_{x_i}(\tau, X) = \begin{cases} F'_{x_i}(g(|\tau|), X)\, g'(|\tau|) & \text{lorsque } 0 < |\tau| < \alpha, \quad X \epsilon \Omega, \\ \Theta & \text{lorsque } \tau = 0, \quad X \epsilon \Omega, \end{cases}$$

d'où suit la continuité de H'_{x_i}. Il s'ensuit que $\Psi(\tau, X)$ est de la classe C^1 et que

$$\left| \frac{\partial \Psi(\tau, X)}{\partial X} \right| \neq 0$$

dans le domaine d'existence de Ψ[18]). D'après (70) et (71),

$$\left[\frac{\partial \Psi(0, X)}{\partial X}\right] = \mathfrak{I} \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial \Gamma(t, X)}{\partial X}\right] = \left[\frac{\partial \Psi(h(t), X)}{\partial X}\right],$$

d'où résulte la thèse de 3°.

§ 4. Comparaison du système général avec le système linéaire correspondant

Notations et hypothèses préliminaires. Considérons le système

$$\dot{x}_i = f^i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'origine Θ est un point singulier et si f^i ont la différentielle de Stolz à Θ, ce système peut être écrit sous la forme

$$\text{(L)} \qquad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(où $a_{ij} = f^i_{x_j}(0, \ldots, 0)$ et $\varepsilon_i(x_1, \ldots, x_n) = o\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right)$ pour $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \to 0$).

Nous allons examiner dans la suite le système (L) en le comparant avec le système linéaire correspondant

$$(\mathrm{L}_0) \qquad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

[18]) Cf. E. Kamke [2], p. 155.

Représentons ces systèmes par la notation vectorielle

$$\text{(L)} \qquad \dot{X} = \mathfrak{A} X + E(X),$$

$$(\mathrm{L}_0) \qquad \dot{X} = \mathfrak{A} X,$$

où $\mathfrak{A} = [a_{ij}]$ et $E(X) = (\varepsilon_1(X), \ldots, \varepsilon_n(X))$. Nous savons que

$$(75) \qquad X = e^{\mathfrak{A}t} X_0$$

est l'intégrale de (L_0) passant par $(0, X_0)$[19]). Les éléments de la matrice $e^{\mathfrak{A}t} = [u_{ij}(t)]$ sont de la forme

$$(76) \qquad u_{ij}(t) = \sum_{\nu=1}^{r} \left(p_{ij}^{(\nu)}(t) \cos \tau_\nu t + q_{ij}^{(\nu)}(t) \sin \tau_\nu t\right) e^{-\sigma_\nu t},$$

$\lambda_1 = -\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \lambda_r = -\sigma_r + i\tau_r$ étant la suite complète de racines caractéristiques de la matrice $\mathfrak{A}$ (différentes entre elles) et $p_{ij}^{(\nu)}$, $q_{ij}^{(\nu)}$ étant des polynômes de degré $\leqslant \alpha_\nu - 1$, où α_ν est le plus grand degré des diviseurs élémentaires correspondant à la racine caractéristique λ_ν. Nous avons alors

$$(77) \qquad u_{ij}(t) = O(e^{-\sigma_* t} t^{\alpha_* - 1}) \quad \text{et} \quad u_{ij}(-t) = O(e^{\sigma^* t} t^{\alpha^* - 1}) \quad \text{pour} \quad t \to \infty,$$

où $\sigma_* = \min_{\nu=1,\ldots,r} \sigma_\nu$, $\sigma^* = -\max_{\nu=1,\ldots,r} \sigma_\nu$, $\alpha_* = \max_{\sigma_\nu = \sigma_*} \alpha_\nu$, $\alpha^* = \max_{\sigma_\nu = \sigma^*} \alpha_\nu$.

Nous supposerons dans la suite que

$$(78) \qquad \sigma_* > 0,$$

ou, ce qui revient au même, *que toutes les intégrales de* (L_0) *tendent vers l'origine* Θ *pour* $t \to \infty$.

Considérons la transformation T:

$$(79) \qquad X = e^{\mathfrak{A}t} Y;$$

la transformation réciproque est de la forme

$$(80) \qquad Y = e^{-\mathfrak{A}t} X.$$

Nous vérifions facilement que la transformation T conduit du système (L_0) au système

$$(\mathrm{L}_0^*) \qquad \dot{Y} = \Theta$$

et du système (L) au système

$$(\mathrm{L}^*) \qquad \dot{Y} = G(t, Y),$$

où

$$(81) \qquad G(t, Y) = e^{-\mathfrak{A}t} E(e^{\mathfrak{A}t} Y).$$

[19]) Cf. [4], chap. III, § 4.

Si $E(X)$ est définie dans le voisinage de Θ, $G(t,Y)$ est définie dans un domaine de la forme $t>a$, $|Y|<r$.

LEMME 2. *Admettons que $E(X)$ soit de la classe C^1 dans le voisinage de Θ et que*

(82) $$E(\Theta)=\Theta.$$

Supposons de plus que les éléments de la matrice

(83) $$[g_{ij}(t,Y)]=\left[\frac{\partial G}{\partial Y}\right]=e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial E}{\partial X}\right]_{X=e^{\mathfrak{A}t}Y}e^{\mathfrak{A}t}$$

satisfassent aux conditions

(84) $$g_{ij}(t,Y)=0\left(\frac{1}{t}\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\right)\quad pour\quad t\to\infty,\ Y\to\Theta\qquad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

où $\varrho(z)$ est une fonction continue, positive, pour laquelle

(85) $$\int_0^z\frac{\varrho(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta<\infty\quad lorsque\quad z>0.$$

Cela posé, il existe un $r_0>0$ et un $a_0<\infty$ tels que

1° vers chaque point $Y\epsilon K(\Theta,r_0)$ tend une et une seule intégrale $\Gamma(t,Y)$ du système (L*) *(envisagé dans un domaine convenable de la forme $t>a$, $|Y|<r$);*

2° $\Gamma(t,Y)$ est définie dans le domaine

(86) $$D_0^*=(a_0,\infty)\times K(\Theta,r_0)$$

et la transformation

(87) $$T_0(t,Y)=\{t,\Gamma(t,Y)\}$$

est une homéomorphie régulière dans D_0^*; en outre

(88) $$\Gamma(t,\Theta)\equiv\Theta\quad pour\quad t>a_0$$

et

(89) $$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial Y}(t,Y)\right]=\mathfrak{I}\quad pour\quad |Y|<r_0;$$

3° en posant

(90) $$D^*=T_0(D_0^*),$$

$G(t,Y)$ est définie dans D^* et la transformation T_0 conduit du système (L*) *dans D^* au système* (L_0^*) *dans D_0^* de manière que deux intégrales correspondantes, saturées à droite, coïncident asymptotiquement.*

Démonstration. Nous avons, en vertu de (85), $\int_t^\infty\frac{1}{\tau}\varrho\left(\frac{1}{\tau}\right)d\tau<\infty$ pour $t>0$. Posons

(91) $$\mu(t)=\int_t^\infty\frac{1}{\tau}\varrho\left(\frac{1}{\tau}\right)d\tau.$$

Alors

(92) $$\lim_{t\to\infty}\mu(t)=0.$$

Il existe un $a>0$, un $r>0$ et un $M>0$ tels que

(93) $$0<\mu(t)<1\quad\text{lorsque}\quad t>a,$$

(94) $G(t,Y)$ est définie, de la classe C^1 dans le domaine B^*, où

(95) $$B^*=(a,\infty)\times K(\Theta,r)$$

et (conformément à (83) et (84))

(96) $$|G'_{y_i}(t,Y)|\leqslant M\frac{1}{t}\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\quad\text{dans}\quad B^*\qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Soient $\bar{Y},\bar{\bar{Y}}\epsilon K(\Theta,r)$ et $t>a$. Le segment $[\bar{Y},\bar{\bar{Y}}]$ étant contenu dans $K(\Theta,r)$, nous avons d'après (94) (en appliquant le théorème des accroissements finis) $G(t,\bar{\bar{Y}})-G(t,\bar{Y})=\sum_{i=1}^n G'_{y_i}(t,\tilde{Y}_i)(\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i)$, où $\tilde{Y}_i\epsilon[\bar{Y},\bar{\bar{Y}}]$ $(i=1,2,\ldots,n)$. En vertu de (96), nous concluons que

(97) $$|G(t,\bar{\bar{Y}})-G(t,\bar{Y})|\leqslant nM\frac{1}{t}\varrho\left(\frac{1}{t}\right)|\bar{\bar{Y}}-\bar{Y}|\quad\text{lorsque}\quad (t,\bar{Y}),\ (t,\bar{\bar{Y}})\epsilon B^*$$

(cf. (95)). Nous montrerons que les hypothèses du lemme 1 sont remplies pour le système (L*) dans B^*.

Posons en effet

(98) $$h(t)=\mu(t)-\mu(t)\ln\mu(t)\quad\text{pour}\quad t>a$$

et

(99) $$\sigma(t,z)=-nM\frac{z}{t}\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\quad\text{pour}\quad t>a,\quad z\geqslant 0.$$

La fonction $h(t)$ est de la classe C^1 et (cf. (92))

(100) $$\lim_{t\to\infty}h(t)=0,$$

(101) $$h'(t)=-\mu'(t)\ln\mu(t)\quad\text{pour}\quad t>a,$$

donc (cf. (91) et (93)) $h'(t)<0$ pour $t>a$. D'après (99), $\sigma(t,z)$ est continue, non positive pour $t>a, z\geqslant 0$ et $\sigma(t,0)\equiv 0$ pour $t>a$. Nous vérifions facilement que $\varphi(t)\equiv 0$ est une intégrale, unique, de l'équation

$$\frac{dz}{dt}=\sigma(t,z)=-nM\frac{z}{t}\,\varrho\left(\frac{1}{t}\right)$$

qui tend vers 0 lorsque $t\to\infty$ [20]). Il en résulte, d'après (100), que si $\varphi(t)$ satisfait aux conditions (57) et (58), nous avons $\varphi(t)\equiv 0$.

Le système (L*) dans B^* est du type (U) (cf. (94)). Selon (91) et (97), $|G(t,Y)|\leqslant -nM\mu'(t)|Y|$ dans B, d'où, d'après (101), (92) (95), $|G(t,Y)|=o(h'(t))$ pour $t\to\infty$ et $Y\to Y_0\epsilon K(\Theta,r)$; pareillement, en vertu de (91), (96), (101), (92), (95), $|G'_{y_i}(t,Y)|=o(h(t))$ pour $t\to\infty$ et $Y\to Y_0\epsilon K(\Theta,r)$. Enfin, d'après (97) et (99), $|G(t,\overline{Y})-G(t,\overline{\overline{Y}})|<-\sigma(t,|\overline{Y}-\overline{\overline{Y}}|)$ pour $(t,\overline{Y}),(t,\overline{\overline{Y}})\epsilon B^*$.

Les hypothèses du lemme 1, ainsi que celles de la partie 3° de la thèse (du lemme 1) sont donc remplies.

En vertu du lemme 1, nous obtenons les parties 1° et 2° de la thèse, la relation (88) étant une conséquence de l'égalité $G(t,\Theta)\equiv\Theta$ (cf. (81) et (82)). En outre la convergence $\Gamma(t,Y)\to Y$ est presque uniforme dans $K(\Theta,r)$, d'où il résulte, en vertu de la proposition 22, que $\Gamma(t,C)$ coïncide asymptotiquement avec l'intégrale constante C du système (L_0^*) dans D_0^* lorsque $C\epsilon K(\Theta,r)\Gamma(t,Y)$ dans (a_0,∞), où $Y\epsilon K(\Theta,r_0)$, étant des intégrales de (L*) dans B^* nous avons $D^*=T(D_0^*)\subset B^*$, alors, d'après le corollaire de la proposition 12, $\Gamma(t,C)$, considéré comme une intégrale de (L*) dans D^*, coïncide asymptotiquement avec l'intégrale constante C du système (L_0^*) dans D_0^*, car toute intégrale de (L*) dans D^*, saturée à droite, est définie dans l'intervalle de la forme (α,∞).

Reste à observer que

$$\text{constante } C \text{ dans } (\alpha,\beta)\rightleftarrows\Gamma(t,C) \text{ dans } (\alpha,\beta)$$

est une correspondance biunivoque entre la totalité des intégrales de (L_0^*) dans D_0^* et celle de (L*) dans D^* pour laquelle les relations (5) et (6) sont satisfaites.

La partie 3° de la thèse est donc établie et le lemme est démontré.

THÉORÈME I. *Admettons que $E(X)$ soit de la classe C^1 dans le voisinage de Θ et que*

$$(102)\qquad E(\Theta)=\Theta,\qquad \left[\frac{\partial E}{\partial X}(\Theta)\right]=\mathfrak{O}.$$

[20]) Chaque intégrale de cette équation est de la forme $z(t)=Ce^{nM\mu(t)}$ (cf. (85) et (91)), d'où, d'après (92), $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=C$.

Supposons de plus que les éléments de la matrice

$$(103)\qquad [g_{ij}(t,Y)]=e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial E}{\partial X}\right]_{X=e^{\mathfrak{A}t}Y}e^{\mathfrak{A}t}$$

satisfassent aux conditions

$$(104)\qquad g_{ij}(t,Y)=O\left(\frac{1}{t}\,\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\right)\quad \textit{pour}\quad t\to\infty,\quad Y\to\Theta\qquad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

où $\varrho(z)$ est une fonction continue, positive, pour laquelle

$$(105)\qquad \int_0^z\frac{\varrho(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta<\infty\quad \textit{lorsque}\quad z>0.$$

Ceci étant admis il existe une transformation $\mathcal{T}(t,X)=\{t,\Phi(X)\}$ et des domaines à n dimensions Δ et Δ_0 tels que

1°

$$(106)\qquad \Theta\epsilon\Delta,\qquad \Theta\epsilon\Delta_0;$$

chaque caractéristique du système (L) *dans $(-\infty,\infty)\times\Delta$, ou du système* (L_0) *dans $(-\infty,\infty)\times\Delta_0$, saturée à droite, est une démi-caractéristique;*

2° $\Phi(X)$ ne dépend pas de t; elle est une homéomorphie régulière de Δ_0 sur Δ telle que

$$(107)\qquad \Phi(\Theta)=\Theta,$$

$$(108)\qquad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]=\mathfrak{I};$$

3° la transformation $\mathcal{T}$ conduit du système

$$(\mathrm{L})\qquad \dot{X}=\mathfrak{A}X+E(X)\quad \textit{dans}\quad (-\infty,\infty)\times\Delta$$

au système

$$(\mathrm{L}_0)\qquad \dot{X}=\mathfrak{A}X\quad \textit{dans}\quad (-\infty,\infty)\times\Delta_0$$

de manière que

4° deux intégrales et deux caractéristiques correspondantes, saturées à droite, coïncident asymptotiquement.

Démonstration. Les hypothèses du lemme 2 sont remplies. Posons

$$(109)\qquad D=T(D^*),\qquad D_0=T(D_0^*),$$

$$(110)\qquad \Delta=\mathrm{pr}(D),\qquad \Delta_0=\mathrm{pr}(D_0)$$

icm©

(T étant la transformation (79)). Comme T conduit des systémes (L), (L_0) aux systèmes (L^*), (L_0^*), donc, en vertu du lemme 2 (3°), d'après les propositions 4, 5, 6,

(111) $$\mathcal{T}=TT_0T^{-1}$$

est une transformation de (L) dans D en (L_0) dans D_0; elle est, de plus, une homéomorphie régulière (dans D_0), car il en est de même avec T et T_0; enfin, selon la proposition 14, deux intégrales qui correspondent par $\mathcal{T}$ (saturées à droite) coïncident asymptotiquement.

(112) Chaque intégrale du système (L) dans D, ou (L_0) dans D_0, saturée à droite, est définie dans un intérvalle de la forme (a,∞),

car il en est de même pour le système (L_1^*) dans D^*. Il s'ensuit que toute intégrale de (L) dans D, ou de (L_0) dans D_0, saturée à droite l'est aussi comme une intégrale de (L) dans $(-\infty,\infty)\times\Delta$, ou de ($L_0$) dans $(-\infty,\infty)\times\Delta_0$. Les hypothèses de la proposition 21 sont donc remplies et nous concluons que

(113) $$\mathcal{T}(t,X)=\{t,\Phi(X)\},$$

où $\Phi(X)$ ne dépend pas de t, et que deux intégrales et deux caractéristiques correspondantes, saturées à droite, coïncident asymptotiquement.

Nous montrerons que chaque caractéristique de (L) dans $(-\infty,\infty)\times\Delta$ ou de (L_0) dans $(-\infty,\infty)\times\Delta_0$, saturée à droite, est une démi-caractéristique. En effet, soit $X_0(t)$ dans (a,β) une intégrale de (L_0) dans $(-\infty,\infty)\times\Delta_0$, saturée à droite. D'après (110), l'intégrale $\overline{X}(t)=X_0(t+k)$ dans $(a-k,\beta-k)$ passe par un point (t_1,X_1) de D_0 pour un certain k. Il existe alors un $\beta_1\leqslant\beta-k$ tel que $\overline{X}(t)$ dans (t_1,β_1) soit une intégrale de (L_0) dans D_0, saturée à droite. Mais, selon (112), $\beta_1=\infty$, d'où $\beta=\infty$. La démonstration pour le système (L) dans $(-\infty,\infty)\times\Delta$ est analogue.

En vertu des relations (86)-(88), (90), nous avons $(t,\Theta)\epsilon D_0^*$, $(t,\Theta)\epsilon D^*$ (lorsque $t>a_0$), donc, d'après (79), (99), $(t,\Theta)\epsilon D$ et

(114) $$(t,\Theta)\epsilon D_0 \quad \text{pour} \quad t>a_0,$$

d'où les rélations (106).

Il reste à établir les relations (107) et (108). Nous avons d'abord (cf. (111), (113), (79), (80), (87))

$$\Phi(X)=e^{\mathfrak{A}t}\Gamma(t,e^{-\mathfrak{A}t}X) \quad \text{lorsque} \quad (t,X)\epsilon D,$$

d'où résulte la relation (107) et

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]=e^{\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial X}(t,\Theta)\right]e^{-\mathfrak{A}t} \quad \text{pour} \quad t>a_0.$$

Il vient

$$\left[\frac{\partial\Gamma}{\partial X}(t,\Theta)\right]=e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]e^{\mathfrak{A}t} \quad \text{pour} \quad t>a_0,$$

donc, d'après (89),

(115) $$e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]e^{\mathfrak{A}t}\to\mathfrak{J} \quad \text{lorsque} \quad t\to\infty.$$

En raison de (102)

(116) $$\frac{E(X)}{|X|}\to\Theta \quad \text{lorsque} \quad X\to\Theta.$$

La transformation $Y=\Phi(X)$ conduit (en vertu de ce qui vient d'être montré) du système (L): $\dot{Y}=\mathfrak{A}Y+E(Y)$ au système (L_0): $\dot{X}=\mathfrak{A}X$, ou (cf. prop. 7) au système

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(X)\right]\dot{X}=\mathfrak{A}\Phi(X)+E(\Phi(X)),$$

donc

(117) $$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(X)\right]\mathfrak{A}X=\mathfrak{A}\Phi(X)+E(\Phi(X))$$

dans le voisinage de Θ. D'après (107),

$$\Phi(X)=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]X+\Delta(X), \quad \text{où} \quad \frac{\Delta(X)}{|X|}\to\Theta \quad \text{pour} \quad X\to\Theta.$$

Soit U un vecteur pour lequel $|U|=1$ et supposons que $X\to\Theta$ de manière que $X/|X|\to U$. Alors

$$\frac{\Phi(X)}{|X|}\to\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]U$$

st, selon (116),

$$\frac{E(\Phi(X))}{|X|}=\frac{E(\Phi(X))}{|\Phi(X)|}\cdot\frac{|\Phi(X)|}{|X|}\to\Theta.$$

En divisant la relation (117) par $|X|$, nous avons à la limite

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]\mathfrak{A}U=\mathfrak{A}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial X}(\Theta)\right]U.$$

U étant un vecteur quelconque pour lequel $|U|=1$, nous avons

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right]\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right],$$

d'où (en vertu de la commutativité des matrices $\mathfrak{A}$, $e^{\mathfrak{A}t}$, $e^{-\mathfrak{A}t}$)

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right]e^{\mathfrak{A}t}\right)=-\mathfrak{A}e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right]e^{\mathfrak{A}t}+e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right]\mathfrak{A}e^{\mathfrak{A}t}=\mathfrak{O}.$$

Nous concluons que la matrice

$$e^{-\mathfrak{A}t}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right]e^{\mathfrak{A}t}$$

est constante, donc, d'après (115), elle est matrice-unité. Il en résulte que

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial X}(\Theta)\right]=\mathfrak{J},$$

ce qui termine la démonstration.

Le théorème I entraîne le suivant

THÉORÈME II. *Supposons que* $E(X)=(\varepsilon_1(X),\ldots,\varepsilon_n(X))$ *soit de la classe* C^1 *dans le voisinage de* Θ, *que* $E(\Theta)=\Theta$ *et*

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_k}(X)=O\left(|X|^{\frac{\sigma^*}{\sigma_*}-1}\left|\frac{1}{\ln|X|}\right|^{\alpha^*+\frac{\sigma^*}{\sigma_*}(\alpha_*-1)}\varrho\left(\left|\frac{1}{\ln|X|}\right|\right)\right) \tag{118}$$

pour $X\to\Theta$, $i,k=1,2,\ldots,n$, *où* $\varrho(z)$ *est une fonction continue croissante, positive, pour laquelle*

$$\int_0^z \frac{\varrho(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta<\infty \quad \textit{lorsque} \quad z>0. \tag{119}$$

Cela posé la thèse du théorème I *subsiste.*

Démonstration. Supposons que $t\to\infty$ et $Y\to\Theta$. Il vient, d'après (75)-(77), $X=e^{\mathfrak{A}t}Y\to\Theta$ et $|X|=O(e^{-\sigma_* t}t^{\alpha_*-1})$, d'où $1/\ln|X|=O(1/t)$. La fonction $\varrho(z)$ étant croissante, il existe un $k>0$ tel que $\varrho(|1/\ln|X||)\leqslant\varrho(k/t)$ pour $t\to\infty$ et $Y\to\Theta$, donc, selon (118),

$$\left.\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j}\right|_{X=e^{\mathfrak{A}t}Y}=O\left(e^{(\sigma^*+\sigma_*)t}t^{(\alpha_*-1)(\sigma^*/\sigma_*-1)}t^{-\alpha^*-\sigma^*(\alpha_*-1)/\sigma^*}\varrho\left(\frac{k}{t}\right)\right),$$

ou

$$\left.\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j}\right|_{X=e^{\mathfrak{A}t}Y}=O\left(e^{(-\sigma^*+\sigma_*)t}t^{-\alpha_*-\alpha^*+1}\varrho\left(\frac{k}{t}\right)\right).$$

En vertu de (103) et (77), nous concluons que

$$g_{ij}(t,Y)=O\left(e^{\sigma^* t}t^{\alpha^*-1}e^{(-\sigma^*+\sigma_*)t}t^{-\alpha_*-\alpha^*+1}\varrho\left(\frac{k}{t}\right)e^{-\sigma_* t}t^{\alpha_*-1}\right),$$

d'où en posant $\bar\varrho(z)=\varrho(kz)$, $g_{ij}(t,Y)=O\left(\frac{1}{t}\,\bar\varrho\left(\frac{1}{t}\right)\right)$. D'après (119) et (118)

$$\int_0^z \frac{\bar\varrho(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta=\int_0^{kz}\frac{\varrho(\eta)}{\eta}\,d\eta<\infty \qquad \text{et} \qquad E(\Theta)=\Theta.$$

Les hypothèses du théorème I sont donc remplies, ce qui termine la démonstration.

COROLLAIRE I. *Si* $\sigma^*<2\sigma_*$ *et les seconds membres du système* (I) *sont de la classe* C^2 (Θ *étant un point singulier*), *la thèse du théorème* I *subsiset*[21]).

COROLLAIRE II. *Soient*

$$\mathfrak{A}=\mathrm{diag}(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_p)\,^{22}), \qquad E(X)=(E_1(X_1),\ldots,E_p(X_p)),$$

où $X=(X_1,\ldots,X_p)$, *c'est-à-dire admettons que le système soit de la forme*

$$\dot X_1=\mathfrak{A}_1X_1+E_1(X_1),\quad \ldots,\quad \dot X_p=\mathfrak{A}_pX_p+E(X_p). \tag{L}$$

Si les hypothèses du théorème I *sont remplies pour chaque système* $\dot X_i=\mathfrak{A}_iX_i+E_i(X_i)$, $i=1,2,\ldots,p$, *la thèse du théorème* I (*pour le système* (L)) *subsiste.*

La démonstration est analogue à celle du théorème II (on remarque que $e^{\mathfrak{A}t}=\mathrm{diag}(e^{\mathfrak{A}_1t},\ldots,e^{\mathfrak{A}_pt})$ et que $\left[\frac{\partial E}{\partial X}\right]=\mathrm{diag}\left(\left[\frac{\partial E_1}{\partial X_1}\right],\ldots,\left[\frac{\partial E_p}{\partial X_p}\right]\right)$.

§ 5. Exemples et application

1. Soient donnés $\sigma^*\geqslant\sigma_*>0$ et α^*,α_* entiers positifs ($\alpha^*=\alpha_*$ au cas, où $\sigma^*=\sigma_*$). Donnons un exemple de système (L) pour lequel E soit de la classe C^1 dans le voisinage de Θ,

$$E(\Theta)=\Theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_k}(X)=O\left(|X|^{\frac{\sigma^*}{\sigma^*}-1}\left|\frac{1}{\ln|X|}\right|^{\alpha_*+\frac{\sigma^*}{\sigma_*}(\alpha_*-1)}\right) \tag{120}$$

[21]) Car, dans ce cas, $E(X)$ est de la classe C^2, donc $|\partial\varepsilon_i/\partial x_k|=O(|X|)$ pour $X\to\Theta$, d'où il résulte (118) (en posant p. ex. $\varrho(\zeta)=\zeta$).

[22]) $\mathrm{diag}(\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_p)=\begin{bmatrix}\mathfrak{A}_1 & 0 & & \\ 0 & \mathfrak{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{A}_p\end{bmatrix}.$

pour $X\to\Theta$, et la partie 4° du théorème II ne subsiste pas. Voici le système en question:

$$(121)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + x_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \dot{x}_{n-1} &= -\sigma x_{n-1} + x_n,\\ \dot{x}_n &= -\sigma x_n,\\ \dot{y}_1 &= -\tau y_1 + y_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \dot{y}_{m-1} &= -\tau y_{m-1} + y_m,\\ \dot{y}_m &= -\tau y_m + \varepsilon(x_1), \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon(x_1) = x_1|x_1|^{\frac{\tau}{\sigma}-1}\left|\frac{1}{\ln|x_1|}\right|^{m+\frac{\tau}{\sigma}(n-1)}$$

(nous avons posé pour abréger $\sigma=\sigma_*$, $\tau=\sigma^*$, $n=\alpha_*$, $m=\alpha^*$). Nous vérifions sans peine que les conditions (120) sont satisfaites. La solution générale du systéme linéaire (L_0) correspondant est donnée par

$$(122)\qquad \begin{aligned} x_1(t,C) &= \left(c_1+c_2t+\ldots+c_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-\sigma t},\quad \ldots,\quad x_n(t,C)=c_ne^{-\sigma t},\\ y_1(t,D) &= \left(d_1+d_2t+\ldots+d_m\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right)e^{-\tau t},\quad \ldots,\quad y_m(t,D)=d_me^{-\tau t}, \end{aligned}$$

Le système de $n+m$ fonctions

$$x_1(t)=t^{n-1}e^{-\sigma t},\quad x_2(t)=(n-1)t^{n-2}e^{-\sigma t},\quad \ldots,\quad x_n(t)=(n-1)!\,e^{-\sigma t},$$

$$(123)\qquad y_m(t)=e^{-\tau t}\int_{+\infty}^{t}\varphi(u)e^{\tau u}du,\qquad y_{m-1}(t)=e^{-\tau t}\int_{+\infty}^{t}y_m(u)e^{\tau u}du,\ \ldots$$

$$\ldots,\ y_1(t)=e^{-\tau t}\int_{+\infty}^{t}y_2(u)e^{\tau u}du,$$

où $\varphi(t)=\varepsilon(t^{n-1}e^{-\sigma t})$, est une intégrale particulière de (121). Il existe $B>A>0$ et $t_0>1$ tels que $Ae^{-\tau t}/t^m<\varphi(t)<Be^{-\tau t}/t_m$ pour $t>t_0$, d'où, si $t>t_0$,

$$(124)\qquad \frac{A}{(m-1)\ldots(\nu-1)}\cdot\frac{e^{-\tau t}}{t^{\nu-1}}<|y_\nu(t)|<\frac{B}{(m-1)\ldots(\nu-1)}\cdot\frac{e^{-\tau t}}{t^{\nu-1}},\qquad \nu=2,\ldots,m$$

et

$$(125)\qquad \frac{A}{(m-1)!}\,e^{-\tau t}\ln t<|y_1(t)|<\frac{B}{(m-1)!}\,e^{-\tau t}\ln t.$$

Nous montrerons que l'intégrale $\big(x_1(t),\ldots,y_m(t)\big)$ ne coïncide pas asymptotiquement avec aucune intégrale de la famille (122). Supposons, par cotnre, que cette intégrale coïncide asymptotiquement avec une intégrale $\big(x_1(t,C^0),\ldots,y_m(t,D^0)\big)$. Conformément à la définition de coïncidence asymptotique, à chaque $\delta>0$ correspond un t_1 tel que

$$\big(t,x_1(t),\ldots,y_m(t)\big)\,\epsilon\,\mathrm{Em}_{(122)}\Big(0,K\big((C^0,D^0),\delta\big)\Big)$$

lorsque $t>t_1$. Il en résulte que pour $t>t_1$ le point $\big(x_1(t),\ldots,y_m(t)\big)$ est de la forme $\Big(x_1\big(t,C(t)\big),\ldots,y_m\big(t,D(t)\big)\Big)$, où $C(t)=\big(c_1(t),\ldots,c_n(t)\big)$, $D(t)=\big(d_1(t),\ldots,d_m(t)\big)$ sont définies univoquement d'après (122) et $|c_i(t)-c_i^0|<\delta$, $i=1,2,\ldots,n$, $|d_j(t)-d_j^0|<\delta$, $j=1,2,\ldots,m$. Nous avons donc

$$(126)\qquad x_1(t)=x_1\big(t,C(t)\big),\quad \ldots,\quad y_m(t)=y_m\big(t,D(t)\big),$$

et $C(t)\to C^0$, $D(t)\to D^0$ lorsque $t\to\infty$. Nous en concluons, selon (124) et (122), que $d_2^0=\ldots=d_m^0=0$ et que $d_m(t)=O(1/t^{m-1}),\ldots,d_2(t)=O(1/t)$, $d_1(t)=O(1)$ pour $t\to\infty$, d'où il résulte, d'après (126), (122), que $y_1(t)=O(e^{-\tau t})$, contrairement à (125).

2. Pour le cas, où $\mathfrak{A}$ a un et un seul diviseur élémentaire, donnons encore l'exemple suivant ($\sigma_*=\sigma^*=\sigma>0$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1+x_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \dot{x}_{n-1} &= -\sigma x_{n-1}+x_n,\\ \dot{x}_n &= -\sigma x_n+\frac{(-1)^nx_1}{(\ln|x_1|)^{2n-1}}; \end{aligned}$$

il existe une intégrale de ce système qui tend vers Θ pour $t\to\infty$ et ne coïncide pas asymptotiquement avec aucune intégrale du système (L_0) correspondant. En effet, la transformation T conduisant des systèmes (L), (L_0) aux systèmes (L^*), (L_0^*), il suffit de démontrer, d'après la proposition 14, qu'il existe une intégrale $Y(t)$ de (L^*) telle que $|Y(t)|=O(e^{\sigma t/2})$ (cf. (77), (79)) et que $|Y(t)|\to\infty$ pour $t\to\infty$. Le système (L^*) prend ici la forme

$$(\mathrm{L}^*)\qquad \dot{y}_i=\frac{(-t)^{n-i}}{(n-i)!}(-1)^n\frac{y_1+ty_2+\ldots+\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}y_n}{\left(-\sigma t+\ln\left|y_1+ty_2+\ldots+\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}y_n\right|\right)^{2n-1}}.$$

Considérons le pavé mobile:

$$\frac{1}{2}b_1\ln t\leqslant y_1\leqslant 3b_1\ln t,$$

$$1+\frac{3b_2}{t}\leqslant y_2\leqslant 2,$$

$$1\leqslant y_3\leqslant 2-\frac{3b_3}{2t^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1+\frac{3b_n}{(n-1)t^{n-1}}\leqslant y_n\leqslant 2 \quad \text{pour } n \text{ pair},$$

$$1\leqslant y_n\leqslant 2-\frac{3b_n}{(n-1)t^{n-1}} \quad \text{pour } n \text{ impair},$$

où

$$b_\nu=\frac{1}{\sigma^{2n-1}(n-1)!(n-\nu)!} \qquad (\nu=1,2,\dots,n).$$

On vérifie que, pour chaque t suffisamment grand, les intégrales de (L*) entrent dans ce pavé sur toute sa frontière, donc il existe une intégrale $Y(t)$ qui reste dans ce pavé et, par suite, satisfait aux conditions: $|Y(t)|=O(e^{\sigma t/2})$, $|Y(t)|\to\infty$ pour $t\to\infty$.

3. Si $\sigma^*\geqslant 2\sigma_*$, la partie 4° du théorème II peut ne pas être vraie, quoique les seconds membres de (L) soient analytiques. Pour l'établir, il suffit de poser $\varepsilon(x_1)=x_1^2$ dans le système (121); nous pouvons montrer sans peine que la coïncidence asymptotique n'a pas lieu. D'ailleurs nous pouvons considérer tout simplement le système

(127) $$\dot{x}=-x,\qquad \dot{y}=-2y+x^2,$$

ou bien

(128) $$\dot{x}=-x,\qquad \dot{y}=-\sigma y+x^2,$$

où $\sigma>2$.

La solution générale de (127) est donnée par $x=Ae^{-t}$, $y=(A^2t+B)e^{-2t}$ et la solution du système (L_0) correspondant — par $\xi=Ae^{-t}$, $\eta=Be^{-2t}$. $y=x^2(C-\ln|x|)$, ou $\eta=C\xi^2$, sont les équations des caractéristiques de ces systèmes (à l'exception du demi-axe y). Nous voyons que les caractéristiques de (L_0) (à l'exception des demi-axes x et y) ont avec l'axe x un contact d'ordre plus grand que celles du système (127), ce qui exclut la coïncidence asymptotique.

Il en est de même pour le système (128); la solution générale de ce système est donnée par

$$x=Ae^{-},\qquad y=\frac{A^2}{\sigma-2}e^{-2t}+Be^{-\sigma t}$$

et celle du système (L_0) correspondant — par

$$\xi=Ae^{-t},\qquad \eta=Be^{-\sigma t}.$$

La transformation $\xi=x,\eta=y+x^2\ln|x|$ réalise les points 2° et 3° du théorème II respective au système (127), mais elle n'est pas analytique dans le voisinage de $(0,0)$. Cependant

$$x=\xi,\qquad y=\eta+\frac{\xi^2}{\sigma-2}$$

est une transformation analytique du système (128) en système (L_0) correspondant.

En générale ([1], p. 10), la transformation analytique du système (L) en système (L_0) existe (sous l'hypothèse que $\sigma_*>0$ et que $E(X)$ soit analytique) lorsque le degré de tout diviseur élémentaire de $\mathfrak{A}$ est égal à 1 (c'est-à-dire lorsque le système (L_0) peut être conduit au système $\dot{y}_i=\lambda_i y_i$, $i=1,2,\dots,n$, par une transformation linéaire complexe) et si la relation

$$\lambda_k=\sum_{i\neq k}p_i\lambda_i$$

ne subsiste pour aucun k et pour aucune suite d'entiers non-négatifs $p_1,\dots,p_{k-1},p_{k+1},\dots,p_n$.

4. Considérons un système

(129) $$\dot{x}=-sx+y+\varphi(x,y),\qquad \dot{y}=-sy+\psi(x,y),$$

où $s>0$, et supposons que $\varphi(0,0)=\psi(0,0)=0$, φ,ψ soient de la classe C^1 dans le voisinage de $(0,0)$ et

(130) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\psi}{\partial x},\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=O\left(\frac{1}{|\ln r|^k}\right) \quad \text{pour} \quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0.$$

(131) $$\dot{x}=-sx+y,\qquad \dot{y}=-sy$$

est le système (L_0) correspondant.

Si $k>3$, alors la condition (118) est satisfaite, d'où, en accord avec le théorème II, *il existe une homéomorphie régulière de* (129) *à* (131) (*tous les deux systèmes ont alors le même type d'allure asymptotique des intégrales*) et la *coïncidence asymptotique subsiste.* L'exemple 2 montre que, *pour* $k=3$, *la coïncidence asymptotique peut ne pas avoir lieu.* Cependant nous allons montrer que, *si* $k>2$, *les systèmes* (129) *et* (131) *ont le même type d'allure asymptotique des intégrales*, c'est-à-dire que

toutes les caractéristiques (*saturées*) *du système* (131), *envisagé dans un voisinage convenable de* $(0,0)$, *tendent vers* $(0,0)$ *pour* $t\to\infty$ *en ayant pour demi-tangente le demi-axe* x *positif* (*la famille* R_+) *ou négatif* (*la famille* R_-); *il existe deux caractéristique* $\mathcal{I}_+\epsilon R_+$ *et* $\mathcal{I}_-\epsilon R_-$ *qui coupent le voisinage en question en deux domaines engendrés par la famille* R_+, *ou* R_-.

Dans le cas, où $k=2$, *les types de l'allure asymptotique des intégrales des systèmes* (129) *et* (131) *peuvent être différents.*

Les conditions (130) impliquement

$$(132)\qquad \varphi=O\left(\frac{r}{|\ln r|^k}\right),\qquad \psi=O\left(\frac{r}{|\ln r|^k}\right)\quad \text{pour}\quad r\to 0.$$

Nous pouvons supposer, sans restriction de la généralité, que

$$(133)\qquad s>1$$

(en effectuant au besoin la substitution de la forme $x=\alpha\xi,\ y=\alpha\eta,\ t=\gamma\tau$). Après l'introduction des coordonnées polaires le système (129) s'écrit sous la forme

$$(134)\qquad \begin{aligned}\dot r&=r\left(-s+\sin\vartheta\cos\vartheta+\frac{\varphi}{r}\cos\vartheta+\frac{\psi}{r}\sin\vartheta\right),\\ \dot\vartheta&=-\sin^2\vartheta+\frac{\psi}{r}\cos\vartheta-\frac{\varphi}{r}\sin\vartheta.\end{aligned}$$

Supposons d'abord *que* $\varphi,\psi=o(r)$ (ce qui a lieu, *lorsque* $k>0$). En vertu de (133), il existe alors un $r_0>0$ tel que

$$(135)\qquad \dot r<-\frac{s-1}{2}r\quad \text{pour}\quad r<r_0,$$

d'où il résulte que, pour toute intégrale $\big(r(t),\vartheta(t)\big)$ dans (α,β) du système (134) dans la bande $0<r<r_0$, saturée, $r(t)$ est décroissante, et $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)=0$. D'après l'unicité des intégrales, nous concluons que $\beta=\infty$, donc chaque intégrale saturée du système (129) dans le cercle $r<r_0$ est définie dans l'intervalle de la forme (α,∞) et elle tend vers $(0,0)$ lorsque $t\to\infty$. Considérons un rectangle Z_ε^n défini par les inégalités

$$0<r<\varepsilon,\qquad n\pi+\varepsilon<\vartheta<n\pi-\varepsilon,$$

où $\varepsilon>0$ et n est un entier. Pour ε suffisamment petit, nous avons $-\dot r<2(s+1)r$,

$$-\dot\vartheta>2\varepsilon^2$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{d\vartheta}<\frac{s+1}{\varepsilon^2}r$$

dans Z_ε^n pour chaque n. Il s'ensuit que si une caractéristique $\big(r(t),\vartheta(t)\big)$ reste dans Z_ε^n, elle est à distance positive de l'axe ϑ et $\vartheta(t)$ est décroissante. Nous en concluons que

$$(136)\qquad \lim_{t\to\infty}\vartheta(t)=-\infty,\qquad \text{ou}\qquad \lim_{t\to\infty}\vartheta(t)=n\pi$$

pour chaque caractéristique du système (134) dans la bande $0<r<r_0$.

Supposons maintenant *que* $k>2$. Considérons le rectangle mobile Π qui est l'intersection de deux bandes mobiles

$$P_1:\ e^{-(2+s)t}\leqslant r\leqslant e^{-\frac{s-1}{2}t}\qquad \text{et}\qquad P_2:\ -\frac{1}{\sqrt{t}}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{1}{t^l},\qquad \text{où}\quad 2<l<k.$$

Nous vérifions facilement qu'à chaque instant t suffisamment tard les intégrales entrent dans la bande P_1 sur les côtes horizontaux[23]) et sortent de la bande P_2 sur les côtés verticaux de Π. Donc, conformément au théorème de M. T. Ważewski (cf. l'introduction), il existe une intégrale qui reste dans Π et, par conséquent, qui tend vers $(0,0)$. Nous montrons d'une façon analogue (d'après la périodicité des seconds membres de (134)) que pour chaque n il existe une intégrale qui tend vers $n\pi$ lorsque $t\to\infty$; donc toute intégrale de (129) dans le cercle $r<r_0$ tend vers $(0,0)$ en ayant pour demi-tangente le demi-axe x positif ou negatif. Soit $0<r_1<r_0$. Il existe une décomposition de la droite $r=r_1$ en intervalles $\Delta_n,\ n=0,\mp1,\mp2,\ldots$ (qui peuvent se reduire à des points) telle que les intégrales, qui sortent de Δ_n, tendent vers $(0,n\pi)$ pour $t\to\infty$. Soit α_n l'extrémité gauche de Δ_n. Nous affirmons que $\alpha_n\epsilon\Delta_n$. Dans le cas contraire, $\alpha_n\epsilon\Delta_{n-1}$, et, par suite, l'intégrale $\overline{\mathcal{I}}$, $\big(\bar r(t),\bar\vartheta(t)\big)$, qui passe par (r_1,α_n), tendrait vers $\big(0,(n-1)\pi\big)$ pour $t\to\infty$. Il advient qu'il existerait dans Z^{n-1} un point situé à droite de $\overline{\mathcal{I}}$, c'est-à dire un point (r^*,ϑ^*) tel que $r^*=\bar r(t^*)$ et $\vartheta^*>\bar\vartheta(t^*)$ pour un certain t^*. L'intégrale $\mathcal{I}^*$: $\big(r^*(t),\vartheta^*(t)\big)$ passant par (r^*,ϑ) partirait donc d'un point (r_1,γ), où

$$(137)\qquad \gamma>\alpha_n.$$

Mais, $r^*(t),\vartheta^*(t)$ étant décroissantes (pourvu que $\big(r^*(t),\vartheta^*(t)\big)$ Z_ε^{n-1}), $\mathcal{I}^*$ tendrait vers $\big(0,(n-1)\pi\big)$, d'où $\gamma\epsilon\Delta_{n-1}$ et, par conséquent, $\gamma\leqslant\alpha_n$,

---

[23]) Nous regardons l'axe r comme vertical.

contrairement à (137). Nous en déduisons que chaque intervalle Δ_n est de la forme $[\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, ce qui montre que l'allure asymptotique des intégrales de (129) est du type décrit ci-dessus.

Considérons enfin *le cas où* $k=2$, et posons $\varphi\equiv 0, \psi=-x/(\ln r)^2$. Nous allons montrer que l'origine $(0,0)$ est le foyer du système (129). D'après (136), il suffit de prouver que $\lim\limits_{t\to\infty}\vartheta(t)=n\pi$ ne peut avoir lieu pour aucun n et pour aucune intégrale de (134). Nous admetrons que $n=0$ (dans les autres cas les démonstrations sont analogues). Si $\vartheta_1>0$ et $r_1>0$ sont suffisamment petits,

$$-\dot{r}<2sr, \qquad -\dot{\vartheta}>\frac{1}{2}\left(\vartheta^2+\frac{1}{(\ln r)^2}\right)$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{d\vartheta}<\frac{4sr}{\vartheta^2+\dfrac{1}{(\ln r)^2}}, \quad \text{dans le rectangle } |\vartheta|<\vartheta_1 \text{ et } 0<r<r_1.$$

Il suffit donc d'établir qu'aucune intégrale d'équation

$$\frac{dr}{d\vartheta}=\frac{4sr}{\vartheta^2+\dfrac{1}{(\ln r)^2}} \quad \text{dans le demi-plan } r>0$$

ne tend pas vers $(0,0)$ du côté droit $\left(\lim\limits_{\vartheta\to 0+} r(\vartheta)=0\right)$. Supposons, par impossible, qu'il existe une telle intégrale et substituons $\tau=\ln r$, $u=\tau\vartheta$ [24]). Nous obtenons l'équation

$$4s\tau\frac{du}{d\tau}=u^2+u+1;$$

cette équation aurait une intégrale $u(\tau)$, définie dans l'intervalle de la forme (α,∞), pour laquelle $\lim\limits_{\tau\to\infty}\left(u(\tau)/\tau\right)=0$. Mais c'est impossible, car chaque intégrale saturée de cette équation est définie dans l'intervalle borné.

5. En utilisant le théorème II nous pouvons décrire l'allure asymptotique des intégrales du système

$$(138)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -sx_1+x_2+\varepsilon_1(X), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= -sx_{n-1}+x_n+\varepsilon_{n-1}(X), \\ \dot{x}_n &= -sx_n+\varepsilon_n(X) \end{aligned}$$

[24]) Cf. E. Kamke [3], p. 319, 1.143.

(où $s>0$). La solution générale du système linéaire correspondant (L_0) est donnée par

$$(139)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \left(c_1+c_2t+\dots+c_n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-st}, \\ x_2 &= \left(c_2+\dots+c_n\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)e^{-st}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_ne^{-st}. \end{aligned}$$

Nous voyons que toute caractéristique de (L_0) (saturée à droite) tend vers Θ pour $t\to\infty$, en ayant pour demi-tangente un des demi-axes x_1. Soit $k=1,2,\dots,n$; désignons par R^k la famille des caractéristiques (139) pour lesquelles $c_{k+1}=\dots=c_n=0$ et par R_-^k, R_+^k les sous-familles de R^k, où respectivement $c_k<0$, $c_k>0$. R^n est alors l'ensemble de toutes les caractéristiques de (L_0) et

$$R^1=R_-^1+R_+^1, \qquad R^k=R_-^k+R^{k-1}+R_+^k \quad (k=2,3,\dots,n),$$

où R_-^1, ou R_+^1, ne contient que le demi-axe x_1 négatif, ou positif. En désignant par Π_0^k l'hyperplan $x_{k+1}=\dots=x_n=0$, excepté le point Θ, et par Π_-^k, ou Π_+^k, l'ensemble des $X\epsilon\Pi_0^k$ pour lesquels $x_k<0$, ou $x_k>0$, nous voyons que la famille R^k, ou R_-^k, ou R_+^k, engendre Π_0^k, ou Π_-^k, ou Π_+^k; toute caractéristique de R_-^k, ou R_+^k tend vers Θ (pour $t\to\infty$) en ayant pour demi-tangente le demi-axe x_1 négatif, ou positif.

Appliquons maintenant le théorème II. Nous obtenons, en vertu de la proposition 9, le suivant

THÉORÈME III. *Supposons que* $E(X)=(\varepsilon_1(X),\dots,\varepsilon_n(X))$ *soit de la classe* C^1 *dans le voisinage de* Θ, *que* $E(\Theta)=\Theta$ *et*

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial x_k}(X)=O\left(\left|\frac{1}{\ln|X|}\right|^{2n-1}\varrho\left(\left|\frac{1}{\ln|X|}\right|\right)\right) \quad \textit{pour} \quad X\to\Theta, \quad i,k=1,2,\dots,n,$$

où $\varrho(z)$ *est une fonction continue, croissante, positive, pour laquelle*

$$\int_0^z\frac{\varrho(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta<\infty \quad \textit{lorsque} \quad z>0.$$

Cela posé, il existe un $\varepsilon_0>0$ *tel que chaque demi-caractéristique de* (138), *passant par un point de* $K(\Theta,\varepsilon_0)$, *tende vers* Θ *pour* $t\to\infty$ *en ayant pour* *demi-tangente un des demi-axes* x_1. *Il existe des hypersurfaces régulières à* k *dimensions:* $S^k, S^k_-, S^k_+, k=1,2,\ldots,n$ (S^n, S^n_+, S^n_- *étant des domaines de* E_n) *telles que*

1° $\Theta \epsilon S^1 \subset S^2 \subset \ldots \subset S^n$;

2° S^{k-1} *coupe* S^k *en* S^k_- *et* S^k_+; $S^k = S^k_- + S^{k-1} + S^k_+$, $k=2,3,\ldots,n$, *et* $S^1 = S^1_- + \{\Theta\} + S^1_+$;

3° *l'hypersurface* S^k *est tangente à l'hyperplan* $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ *dans* Θ, $k=1,2,\ldots,n-1$;

4° *il existe une classification de la famille* $\mathfrak{R}^n$ *de toutes les demi-caractéristiques tendant vers* Θ *en sous-familles* $\mathfrak{R}^k_+, \mathfrak{R}^k, \mathfrak{R}^k_-$, *telle que*

a) $\mathfrak{R}^1 = \mathfrak{R}^1_- + \mathfrak{R}^1_+$, $\mathfrak{R}^k = \mathfrak{R}^k_- + \mathfrak{R}^{k-1} + \mathfrak{R}^k_+$, $k=2,3,\ldots,n$,

b) *la famille* $\mathfrak{R}^k$, ou $\mathfrak{R}^k_-$, ou $\mathfrak{R}^k_+$ *engendre* $S^k - \{\Theta\}$, *ou* S^k_-, *ou* S^k_+; *toute demi-caractéristique de* $\mathfrak{R}^k_-$, *ou* $\mathfrak{R}^k_+$, *tend vers* Θ *en ayant pour demi-tangente le demi-axe négatif, ou positif (la famille* $\mathfrak{R}^1_-$, *ou* $\mathfrak{R}^1_+$, *ne contient qu'une seule demi-caractéristique et* S^1_-, *ou* S^1_+, *est une restriction à gauche de cette demi-caractéristique).*

Travaux cités

[1] H. Dulac, *Points singuliers des équations différentielles*, Mem. Sc. Math., 41 (1934).

[2] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

[3] — *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I*, Leipzig 1943.

[4] S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton 1948.

[5] O. Perron, *Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, Math. Zeitschr. 15 (1922), p. 121-146.

[6] — *Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes*, Zweiter Teil, ibid. 16 (1923), p. 273-295.

[7] T. Ważewski, *Sur la coïncidence asymptotique des intégrales de deux systèmes d'équations différentielles*, Bull. Acad. Sc. et Lettr., Sér. A, 1949, p. 147-150.

[8] — *Sur certaines conditions de coïncidence asymptotique des intégrales des deux systèmes d'équations différentielles*, Comptes-rendus des séances de la Classe III: Sciences mathem. et phys. de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie 42 (1949), p. 198-203.

[9] — *Sur un principe topologique d'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 279-313.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Über die Gleichung $x^m+1=y^n$

von R. Obláth (Budapest)

Die Frage ob es zwei aufeinander folgende Zahlen (ausser $-1,0$; $0,1$; $8,9$) gibt, welche beide volle Potenzen sind, wurde zwar schon im Mittelalter gestellt[1]), ist aber auch heute noch nicht vollständig gelöst. Es handelt sich also um die diophantische Gleichung

(I) $$x^m+1=y^n.$$

[1]) Levi ben Gerson (1288-1344) — einer der bedeutendsten Mathematiker des Mittelalters — hat bewiesen, dass

$$3^{m+1}\pm 1$$

für $m>1$ keine Potenz der Zahl 2 ist (vgl. S. L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. II. *The Diophantine Analysis*, New York 1934, p. 731).

Die Geschichte und Literatur des Problemes habe ich in früheren Publikationen — besonders in der ungarischen — ausführlich dargestellt. (*Über die Zahl* x^2-1, Mathematica B. (holländische) VIII (1939-1940), p. 161-172; *Az* x^2-1 *számokról*, Mat. és Fiz. Lapok 47 (1940), p. 58-77; *Sobre ecuaciones imposibles de la forma* $x^m+1=y^n$, Revista Mat. Hisp.-Americana I (1941), p. 122-140). Nach dem Erscheinen dieser Arbeiten wurde ein wichtiger Fund gemacht. Die bis dahin als verschollen geltende *Solutio duorum problematum etc.* von Frénicle aus dem Jahre 1657 wurde aufgefunden und von J. E. Hofmann ausführlich bekannt gemacht (J. E. Hofmann, *Neues über Fermats zahlentheoretische Herausforderungen von* 1657, Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss. 9 (1943), p. 1-52).

Theorema 10 der *Solutio* behandelt die Gleichung (II) (siehe J. E. Hofmann, l. c., p. 24). Der Satz behauptet die Unmöglichkeit der unbestimmten Gleichung

$$p^n+1=x^2$$

(p ungerade Primzahl, $n\geqslant 2$). Ich erzähle Frénicle's geistreichen Beweis in modernen Bezeichnungen. Der Satz ist für gerade n selbstverständlich. Wäre nun $p^n+1=x^2$ für ein ungerades n erfüllbar, so liesse sich $p^n=(x+1)(x-1)$ in zwei Teiler mit der Differenz 2 zerlegen. Die Teiler von p^n sind $1,p,\ldots,p^{n-1}$. Die kleinstmögliche Differenz zweier Teiler ist $p(p-1)$ und tritt für $n=3$ auf. Sie ist aber stets grösser als 2, da $p\geqslant 3$ ist. Der Satz gilt auch für $p=2$, wenn $n\geqslant 4$ ist; $n=3$ ist eine Ausnahme, $2^3+1=3^2$.