M. JEŻEWSKI i J. ODERFELD (Warszawa)

O ROZKŁADACH PARAMETRÓW WYTRZYMAŁOŚCI

1. Przedmiot i wynik pracy

Bezpośrednią pobudką do niniejszej pracy stał się artykuł Moszyńskiego o współczynnikach bezpieczeństwa [1]. Autor poddał tam graficznej weryfikacji hipotezę, że empiryczne rozkłady parametrów wytrzymałości stali dadzą się dobrze aproksymować przez rozkład logarytmonormalny i uznał wynik tej weryfikacji za pozytywny.

Sprawa ta wydała nam się godna bliższego zbadania z dwóch powodów:

Po pierwsze, przypisanie parametrom wytrzymałości rozkładu logarytmonormalnego — jeśli jest uzasadnione — bardzo ułatwia obliczenia związane z wyznaczaniem współczynników bezpieczeństwa, jak na to wskazał Moszyński [1].

Po drugie, Muller [2] zaproponował do analogicznego celu dość złożony i mniej dogodny w dalszych zastosowaniach rozkład Krickiego-Menkla.

Dlatego postanowiliśmy, przyjmując dane doświadczalne Moszyńskiego, dobrać do nich rozkłady: logarytmonormalny, Krickiego-Menkla oraz dla porównania normalny, i znanym testem chi-kwadrat sprawdzić stopień zgodności.

Dane doświadczalne reprodukujemy w tablicach 1 i 2. Pierwsza z nich dotyczy stali węglowej 015, druga — stali węglowej 025. Wybraliśmy te właśnie stale z kilku rozważanych przez Moszyńskiego, bo jako najpospolitsze mają przewagę w produkcji krajowej. Tablica 1 odnosi się do tzw. *wytrzymałości doraźnej* R_r, tablica 2 do tzw. *granicy plastyczności* Q_r. Dane doświadczalne podzielono na klasy o szerokości 1 kG/mm². Oprócz częstości zaobserwowanych podano w tablicach częstości w teoretycznych rozkładach, które dobrano w znany sposób przez porównanie momentów teoretycznych z empirycznymi. Kolumna KM dotyczy rozkładu Krickiego-Menkla, kolumna N — rozkładu normalnego, kolumna LN — logarytmonormalnego.

Po obliczeniu w wiadomy sposób wartości χ_0^2, wyznaczono prawdopodobieństwa $P(\chi^2>\chi_0^2)$, będące miarą stopnia zgodności. Wyniki zapisano w dolnych wierszach każdej z tablic. Jak widzimy, we wszystkich czterech rozważonych przypadkach najlepszą zgodność dał rozkład logarytmonormalny. Jakkolwiek różnice w ogóle nie są znaczne, sądzimy, że przydatność do dalszego traktowania matematycznego (o czym wspomnieliśmy na początku) i mały nakład pracy potrzebnej do wyznaczenia

TABLICA 1

Wytrzymałość doraźna R_r (kG/mm²) stali

Średnia wartość R_r	Stal 015				Stal 025			
	Częstość zaobserwowana	Częstość teoretyczna w rozkładzie			Częstość zaobserwowana	Częstość teoretyczna w rozkładzie		
		KM	*N*	*LN*		*KM*	*N*	*LN*
34,5	1	1,41	1,60	1,30				
35,5	2	3,40	3,49	3,24				
36,5	12	7,00	6,79	6,96				
37,5	16	12,43	11,77	12,69				
38,5	11	19,26	18,39	19,82				
39,5	29	26,15	25,23	26,60				
40,5	31	31,31	30,84	31,62				
41,5	35	33,30	33,57	33,29				
42,5	26	31,64	32,64	31,17	1	1,23	1,33	1,07
43,5	31	26,97	28,29	26,37	1	3,83	3,82	3,64
44,5	20	20,75	21,65	20,15	5	9,17	8,93	9,00
45,5	9	14,46	14,84	14,08	27	17,04	16,42	17,23
46,5	14	9,17	9,07	9,08	31	24,81	24,33	25,13
47,5	5	5,31	4,93	5,35	24	28,64	28,61	28,82
48,5	5	2,82	2,39	2,95	23	26,45	26,89	26,26
49,5	1	1,38	1,03	1,53	21	19,71	20,23	19,35
50,5					7	11,97	12,04	11,69
51,5					5	5,96	5,80	5,87
52,5					4	2,46	2,24	2,43
53,5					3	0,85	0,67	0,85
Razem	248				152			
$P(\chi^2>\chi_0^2)$		0,197	0,199	0,255		0,01	0,01	0,03

rozkładu teoretycznego (kilkakrotnie mniejszy niż przy rozkładzie Krickiego-Menkla), są dodatkowymi argumentami za użyciem tego rozkładu dla celów wymienionych przez Moszyńskiego [1].

Oczywiście dalecy jesteśmy od przypisywania rozkładowi logarytmonormalnemu uprzywilejowanego stanowiska w każdym przypadku. Użycie takiego czy innego rozkładu zależy od danych doświadczalnych i od dalszych zastosowań. Na przykład rozkład Krickiego-Menkla może się dobrze nadawać do przedstawienia bardzo skośnych rozkładów empirycznych w okolicach odległych od mediany. Zwraca na to uwagę Muller [2].

Ubocznym wynikiem tej pracy są wzory przybliżone, pozwalające na bardzo łatwe ustalenie parametrów w rozkładzie Krickiego-Menkla.

TABLICA 2

Granica plastyczności Q_r (kG/mm²) stali

Średnia wartość Q_r	Stal 015				Stal 025			
	Częstość zaobserwowana	Częstość teoretyczna w rozkładzie			Częstość zaobserwowana	Częstość teoretyczna w rozkładzie		
		KM	*N*	*LN*		*KM*	*N*	*LN*
20,5	5	1,86	2,41	1,18	1	0,49	0,77	0,41
21,5	2	5,09	5,47	3,95	0	2,25	2,69	2,13
22,5	12	11,13	10,93	9,84	9	7,10	7,16	7,15
23,5	18	19,81	18,55	18,78	24	15,81	15,03	16,14
24,5	28	29,20	27,46	29,11	18	25,65	24,33	26,04
25,5	31	36,20	34,75	36,91	23	31,09	30,38	30,97
26,5	54	38,23	38,08	39,25	36	28,78	29,24	28,15
27,5	35	34,81	35,97	35,74	17	20,76	21,69	20,24
28,5	19	27,58	29,20	28,20	16	11,88	12,41	11,72
29,5	21	19,29	20,58	19,71	7	5,48	5,47	5,55
30,5	8	11,95	12,37	12,28	1	2,07	1,87	2,23
31,5	8	6,62	6,51	6,90				
32,5	3	3,30	2,89	4,25				
33,5	2	1,49	1,14	1,68				
34,5	2	0,61	0,37	0,73				
Razem	248				152			
$P(\chi^2 > \chi_0^2)$		0,136	0,135	0,192		0,03	0,05	0,05

2. Technika doboru parametrów rozkładów

2.1. Oznaczenia. Niechaj

$$x_i \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

oznacza wynik i-tego pomiaru.

Oznaczmy

$$m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{2}$$

$$m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{3}$$

$$\mu_2=\frac{1}{m_1^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^2, \tag{4}$$

$$\mu_3=\frac{1}{m_1^3}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^3. \tag{5}$$

2.2. Rozkład Krickiego-Menkla. Nazwą tą oznacza Muller [2] rozkład o gęstości

$$f(x)=\frac{1}{m}\left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\gamma/b}\frac{1}{b\Gamma(\gamma)}\left(\frac{x}{m}\right)^{\gamma/b-1}\exp\left\{-\left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\cdot\frac{x}{m}\right]^{1/b}\right\}, \tag{6}$$

podany w 1946 r. przez S. Krickiego i M. Menkla. Parametry m, b, γ obliczamy jako

$$m=m_1, \tag{7}$$

$$b=\frac{\mu_2^2}{3\mu_2^2-\mu_3}, \tag{8}$$

$$\gamma=\frac{b^2}{\mu_2}. \tag{9}$$

Wzory (8) i (9) są przybliżone, wyprowadzimy je w rozdziale 3.1.

2.3. Rozkład normalny. Rozkład ma gęstość

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{10}$$

Parametry $\bar{x}$ i σ obliczamy jako

$$\bar{x}=m_1, \tag{11}$$

$$\sigma=\sqrt{m_2-m_1^2}. \tag{12}$$

2. 4. Rozkład logarytmonormalny. Rozkład ma gęstość

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\log^2 \frac{x}{x_0}}{2\sigma^2} \right\}. \tag{13}$$

Parametry x_0 i σ obliczamy jako

$$x_0 = \frac{m_1^2}{\sqrt{m_2}}, \tag{14}$$

$$\sigma = \sqrt{2 \log \frac{\sqrt{m_2}}{m_1}} \tag{15}$$

Wzorów (14) i (15), jako podręcznikowych, nie uzasadniamy.

3. Uzasadnienie wzorów (8) i (9)

3. 1. Wyprowadzenie. W cytowanej pracy Mullera [2] wykazano, że b i γ są pierwiastkami układu równań

$$1 + \mu_2 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^2}, \tag{16}$$

$$\mu_3 = \frac{[\Gamma(\gamma)]^2\Gamma(\gamma+3b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^3} - 3\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^2} + 2. \tag{17}$$

Muller nie podaje rozwiązania wyraźnego tego układu, pisze natomiast na str. 101: „D. W. Korenistow rozwiązał układ dla niektórych wartości dyspersji i asymetrii krzywych i ułożył tablice". Oryginalna praca Korenistowa nie jest nam dostępna. Dlatego wydało się rzeczą celową opublikować nasze rozwiązanie wyraźne. Prawa strona równania (16) i drugi człon po prawej stronie równania (17) różnią się tylko znakiem i współczynnikiem. Zamiast (17) możemy więc napisać po drobnej przeróbce

$$1 + 3\mu_2 + \mu_3 = \frac{[\Gamma(\gamma)]^2\Gamma(\gamma+3b)}{[\Gamma(\gamma+b)]^3}. \tag{18}$$

Dzieląc (18) przez (16) znajdujemy

$$\frac{1+3\mu_2+\mu_3}{1+\mu_2} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+3b)}{\Gamma(\gamma+b)\Gamma(\gamma+2b)}. \tag{19}$$

Wprowadzimy do (19) wielkość C zdefiniowaną przez

$$C=\frac{2\mu_2+\mu_3}{1+\mu_2}. \tag{20}$$

Znajdujemy

$$1+C=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+3b)}{\Gamma(\gamma+b)\Gamma(\gamma+2b)}. \tag{21}$$

Zamiast (16) i (17) rozwiążemy (16) i (21). Logarytmując te wzory otrzymujemy

$$\log(1+\mu_2)=\log\Gamma(\gamma)+\log\Gamma(\gamma+2b)-2\log\Gamma(\gamma+b), \tag{22}$$

$$\log(1+C)=\log\Gamma(\gamma)+\log\Gamma(\gamma+3b)-\log\Gamma(\gamma+b)-\log\Gamma(\gamma+2b). \tag{23}$$

Stosując do (22) i (23) wzór Stirlinga otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\log(1+\mu_2)=\\&=\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\log\gamma+\left(\gamma-\frac{1}{2}+2b\right)\log(\gamma+2b)-2\left(\gamma-\frac{1}{2}+b\right)\log(\gamma+b),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\log(1+C)=&\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\log\gamma+\left(\gamma-\frac{1}{2}+3b\right)\log(\gamma+3b)-\\&-\left(\gamma-\frac{1}{2}+b\right)\log(\gamma+b)-\left(\gamma-\frac{1}{2}+2b\right)\log(\gamma+2b).\end{aligned} \tag{25}$$

Korzystając z tożsamości

$$\log(\gamma+h)=\log\gamma+\log\left(1+\frac{h}{\gamma}\right)$$

możemy przepisać (24) i (25) w postaci

$$\log(1+\mu_2)=\left(\gamma-\frac{1}{2}+2b\right)\log\left(1+\frac{2b}{\gamma}\right)-2\left(\gamma-\frac{1}{2}+b\right)\log\left(1+\frac{b}{\gamma}\right), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\log(1+C)=&\left(\gamma-\frac{1}{2}+3b\right)\log\left(1+\frac{3b}{\gamma}\right)-\left(\gamma-\frac{1}{2}+b\right)\log\left(1+\frac{b}{\gamma}\right)-\\&-\left(\gamma-\frac{1}{2}+2b\right)\log\left(1+\frac{2b}{\gamma}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

Rozwijając (26) i (27) w szeregi potęgowe znajdujemy

$$\mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2} = \frac{1}{\gamma} b^2 + \frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{b^2}{2} - b^3\right) + \ldots, \tag{28}$$

$$C - \frac{C^2}{2} = \frac{1}{\gamma} 2b^2 + \frac{1}{\gamma^2}(b^2 - 3b^3) + \ldots \tag{29}$$

Przyjmując

$$n = \mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2}, \tag{30}$$

$$c = C - \frac{C^2}{2}, \tag{31}$$

znajdujemy b z równania

$$\frac{3n-c}{\sqrt{2n-c}} = \sqrt{b} + \frac{\sqrt{2n-c}}{2b} \tag{32}$$

oraz γ z wzoru

$$\gamma = \frac{b^{3/2}}{\sqrt{2n-c}}. \tag{33}$$

Jeśli dyspersja i skośność nie są duże, to można pominąć drugi człon po prawej stronie równania (32). Przekształcając w elementarny sposób (32) i (33), otrzymujemy w przybliżeniu

$$b = \frac{\mu_2^2}{3\mu_2^2 - \mu_3}, \qquad \gamma = \frac{b^2}{\mu_2}.$$

Są to wzory (8) i (9).

3.2. O dokładności rozwiązania przybliżonego. Pewien pogląd na dokładność rozwiązania daje bezpośredni rachunek dotyczący doraźnej wytrzymałości stali 015 (tablica 1).

Według wzoru (4) $\mu_2 = 0{,}00513$, według wzoru (5) $\mu_3 = 0{,}0000509$. Według wzoru (8) $b = 1$.

Uwaga. W toku naszych obliczeń przekonaliśmy się, że zaokrąglenie do liczby całkowitej wartości na b otrzymanej z wzoru (8) i wstawienie zaokrąglonej wartości do wzoru (9) niewiele psuje dokładność.

Według wzoru (9) $\gamma = 195$.

Sprawdzenie wykonujemy według wzorów (16) i (18), lepiej nadających się do rachunku od wzorów (16) i (17).

Wstawiając wartości μ_2 i μ_3 po lewej stronie, a wartości b i γ po prawej stronie wzorów (16) i (18), otrzymujemy porównanie:

	wzór (16)	wzór (18)
dane...........	1,00513	1,01544
obliczone z b i γ	1,00510	1,01540

Zgodność jest dobra, w każdym razie dostateczna dla tych celów, dla których wzory (8) i (9) wyprowadziliśmy.

Prace cytowane

[1] W. Moszyński, *O wyznaczaniu współczynników bezpieczeństwa konstrukcji*, Zastosowania Matematyki 1 (1953), str. 83-104.

[2] *Вопросы безопасности и прочности строительных конструкций*. Сборник статей под редакцией А. Р. Ржаницина: Р. А. Муллер, *К вопросу определения коэфициентов однородности и перегрузки по статистическим данным*, стр. 88-118.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 7. 6. 1953 r.

М. ЕЖЕВСКИЙ и Я. ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОЧНОСТИ

РЕЗЮМЕ

В предлагаемой работе сравниваем теоретические распределения прочности стали с результатами приведенными В. Мошинским [1].

Из трех исследованых распределений: Крицкого-Менкеля, нормального и логарифмическо-нормального найлучшую согласованность дало логарифмическо-нормальное.

Попутно получено простые приближенные формулы, облегчающие подбор параметров в распределении Крицкого-Менкеля. Формулы применимы для распределений с небольшим коэффициентом ассимметрии.

M. JEŻEWSKI and J. ODERFELD (Warszawa)

ON THE DISTRIBUTIONS OF STRENGTH INDICES

SUMMARY

The subject of the paper is a comparison of theoretical distributions as regards their conformity with the data relating to the strength of steel which have been given by W. Moszyński [1].

Of the three distributions considered — Kricki-Menkel's, normal and logarithmiconormal — the best conformity was shown by the logarithmiconormal distribution. As a side result, simple approximate formulae have been evolved making it easy to choose the parameters for Kricki-Menkel's distribution. The formulae are valid for distributions which do not show great skewness.
