

Grzegorz MIECZKOWSKI

CRITERION FOR CRACK INITIATION FROM NOTCH LOCATED AT THE INTERFACE OF BI-MATERIAL STRUCTURE

KRYTERIUM PĘKANIA STRUKTURY BI-MATERIAŁOWEJ Z OSTRYM KARBEM USYTUOWANYM NA INTERFEJSIE*

The fracture process of bi-material structure with the notch was analysed in this work. For fracture prediction, a criterion based on the Theory of Critical Distances was used. Under analysis were elements made of aluminium alloy and polymer combination (with a various structural notch-tip angle), which then were subjected to the three-point bending test. Values of critical loads resulting from the used hypothesis were compared with values obtained from the experiment. Validation of the selected criterion required defining a qualitative and quantitative description of singular stress fields present around the structural notch-tip area. Therefore, such solutions were obtained and methodology of their determining was discussed.

Keywords: crack initiation, interface fracture, bi-materials, singular stress fields, stress intensity factors.

W pracy przedstawiono wyniki badań dotyczących pęknięcia struktury bi-materiałowej z karbem usytuowanym na interfejsie. Do prognozowania inicjacji procesu pęknięcia zastosowano kryterium oparte na punktowej teorii krytycznych dystansów. Analizowano elementy wykonane ze stopu aluminium i polimerów (PC, PMMA), które poddane były trójpunktowemu zginaniu. Wartości obciążeń krytycznych wynikających z wykorzystanej hipotezy porównano z wartościami uzyskanymi z eksperymentu. Walidacja wybranego kryterium wymagała określania jakościowego i ilościowego opisu osobliwych pól naprężeń, występujących w okolicy wierzchołkowej karbu strukturalnego. W związku z tym, uzyskano takie rozwiązania i omówiono metodykę ich otrzymywania.

Słowa kluczowe: inicjacja procesu pęknięcia, bi-materiały, osobliwe pola naprężeń, współczynniki intensywności naprężeń.

1. Introduction

Predicting durability of mechanical structures is a complex process that requires many factors to be taken into account. One of them is a structural complexity of structures. The structure is a physical object consisting of many elements, frequently made of materials with different mechanical and physical properties. Additionally, structures are usually subject to complex external loads, frequently of variable nature to various environmental factors. This results in various damage mechanisms – wear (corrosive, cavitational, frictional), fracture – often eliminating a device from further operation.

A point of initiation of cracks, in most cases, are voids and other material defects, and structural notches, the presence of which in the structure most often results from the necessity to join individual components to each other, providing the structure with the required feature characteristics, or requested material structure.

Notches can be classified into many different categories, depending on their shapes, location within a structure, material recurrence or material manufacturing technology. They all have one common characteristic – they cause a local increase of stress in the structure under load, and thus influence its durability and strength.

On the basis of observation and experiments, scientists have been trying for so long to define some critical conditions, at which material is damaged. Reference can be made to e.g. ideas by Galileo, Tresca, Beltrami, Coulomb, Mohr, Mises or Huber. They adopted some hypotheses, defining material strength, that until now are the basis for engineering calculations. Assuming homogeneity and continuity of a medium, of which a structural element has been made, they formulated limit values for a function, the exceeding of which resulted in

material damage. These hypotheses did not take into account the significant influence of stress and strain field gradients on the strength. Theoretical development in solid state mechanics, and in theory of elasticity, in particular, has allowed for obtaining many analytical solutions describing local stress fields in the surrounding of both soft concentrators (e.g. in Kirsch's solution [8]), and sharp concentrators, generating singular stress fields (Sneddon's [31], and Williams' solutions [38]). Knowledge of new mathematical solutions has enabled formulation of consequent strength criteria including the influence of the presence of stress concentrators in homogeneous structural materials (e.g. Griffith [6], Sih [29], McClintock [16] and others).

Over the recent years, there has been a noticeable development of composite materials with pre-designed mechanical properties. As a rule, these are anisotropic materials or composites of a complex periodic structure.

Typical stress concentrator, present in layered composites, is a crack [30] or sharp notch located in the plane of bonding particular layers which form a composite [3, 5, 26]. Such concentrators are frequently present also in structural elements made by bonding two different materials with adhesive (such element can be considered a specific composite material). It is therefore necessary to define strength and resistance to cracking of composites (including mechanical properties of a bonding layer), where structural notches generate large stress gradients. A solution for this problem is an adequately formulated strength criterion. This criterion should include accurately determined equation with defined material constants, on basis of which it is possible to predict the moment of cracking process initiation. Predicting durability of elements with structural notches has not been the field of study taken by many scientists. In paper [12]

(*) Tekst artykułu w polskiej wersji językowej dostępny w elektronicznym wydaniu kwartalnika na stronie www.ein.org.pl

strength of two-phase elements with the structural notch was analysed experimentally. Material components were adhesive bonded. The authors performed three-point bending tests and determined values of crack initiation forces. A possibility of applying Leguillon's criterion for this type of elements (adhesive bonded uniform component with notch) was verified positively in paper [36].

As regards criteria for bi-material structures there are no available results published in the literature. The criterion that is frequently applied to homogeneous materials is the McClintock criterion. Thus, the main objective of this paper is to experimentally verify the possibility of applying this criterion (with appropriate modifications) for bi-material structures, where sharp structural notches generate singular stress fields. An idea for the criterion is described below.

Notations and Nomenclatures

- a - Notch height
- b - Gradient of combined stress
- E - Young's modulus
- f_{ik}^I, f_{ik}^{II} - Influence coefficient for stress
- F - Load force at which stress intensity factors were calculated
- F_k - Predicted critical force
- g - Specimen thickness
- h - Specimen height
- H_o, H_1, H_2 - Influence coefficient for the characteristic equation
- i - Material index (=1,2)
- j - Generalised stress intensity factors/ Combined stresses index (=I,II)
- K_E - Equivalent stress intensity factor
- K_{Ec} - Critical value of the equivalent stress intensity factor
- K_I, K_{II} - Generalised stress intensity factors
- K_{Ic} - Fracture toughness
- L - Spacing between supports set in the three-point bending test
- Lc - Total specimen length
- n - Nodes index
- r, φ - Polar coordinates
- u_r, u_φ - Displacements in polar coordinates
- u_y - Vertical displacement applied as load condition in FEM simulations
- α - Angle between the edge of material 1 and interface
- β - Notch-tip angle
- γ - Angle between the edge of material 2 and interface
- Γ - Shear modulus' ratio
- δ - Imaginary part of eigenvalue λ
- λ - Eigenvalue
- λ_r - Real part of eigenvalue λ
- μ - Shear modulus
- ν - Poisson's ratio
- $\sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{r\varphi}$ - Stresses in polar coordinates
- φ_0 - Cracking propagation angle
- ψ - Mode mixity ratio

2. Fracture Criterion

With criterion proposed in paper [16] it is assumed that cracking will follow, if normal strain ε_φ in some small distance from the crack tip ρ_c reaches a critical value which can be noted as follows:

$$\varepsilon_\varphi(\rho_c) = \varepsilon_c \quad (1)$$

However, such stress form of this criterion, where the strain was replaced by an adequate component of normal stresses, had broader application.

In the approach as proposed in paper [23] it was assumed that propagation of cracking will follow only if circumferential stresses σ_φ at some finite distance $r=\rho_c$ reach critical value σ_c (2). Use of the condition formulated in such way, for elements with notches present in homogeneous materials, has been positively verified in many papers, e.g. [27]:

$$\max_\varphi \sigma_\varphi(\rho_c) = \sigma_c \quad (2)$$

Cracking propagation angle φ_0 is determined by maximizing σ_φ in relation to angle φ . For the elements with the notch located on adhesive bonding of uniform or bi-material structure, the cracking initially propagates along the interface. Thus, it can be predicted that $\varphi_0 = 0$ (Fig. 1) and the condition (2) will be written as:

$$\sigma_\varphi(\rho_c, 0) = \sigma_c \quad (3)$$

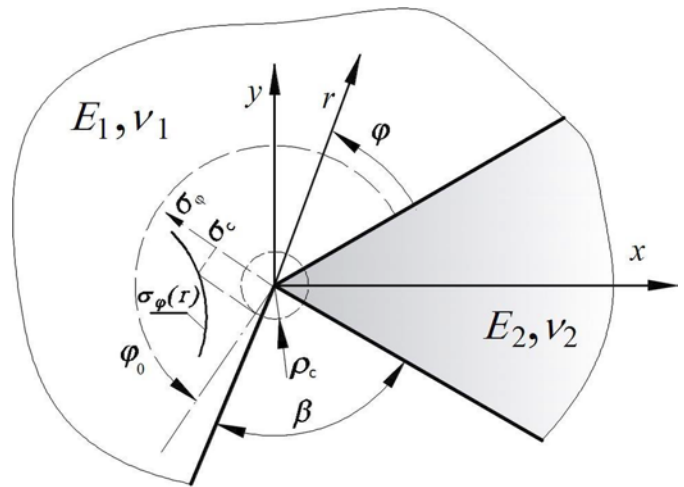


Fig. 1. Graphic interpretation McClintock criterion.

The parameter ρ_c , is considered as material constant and can be determined from experiment. For example, in condition (3), by taking advantage of dependence on circumferential stresses at crack tip and Griffith – Irwin criterion, the following is obtained:

$$\frac{K_{Ic}}{\sqrt{2\pi\rho_c}} = \sigma_c \quad (4)$$

and thus this allows for calculating the characteristic constant:

$$\rho_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2, \quad (5)$$

where K_{Ic} - fracture toughness, σ_c - tensile strength.

One advantage of the proposed method which is based on the so-called Theory of Critical Distances (TDC), is that in most cases in order to predict the fracture process it is not required to know the asymptotics description of stress fields - numerical solutions are used in the predicting process.

In the case when the fracture process occurs in a plane in which complex state of stresses is present, the use of numerical solutions may result in an erroneous prediction [13]. Most frequently in such situation, on the basis of analytical description of local stress fields, a global fracture criterion (using local parameter ρ_c) is formulated and it is based on an equivalent stress intensity factor [1, 13, 27] or minimum strain-energy density [9].

In this paper, on the basis of McClintock criterion, two concepts of prediction of fracture process initiation are proposed. First of them is based on an equivalent stress intensity factor, and the other on a dependence of condition (2) of critical stresses on proportions of shear and normal stresses occurring in the cracking plane. Detailed description of the concept is presented in section 6.

As it can be seen, when using the McClintock criterion for elements simultaneously loaded with shear and normal loads, it is required to know the distribution of stress fields occurring in the immediate vicinity to a singular point. Therefore, in the next section herein, forms of functions describing such stress fields and methodology of their determining will be discussed.

3. Analytical relations describing stress fields present in structural notch-tip area

A solution of the case of bi-material with the structural notch located on the interface (Fig. 2) was obtained using the approach applied by the authors of paper [21] for sharp corner in a uniform material.

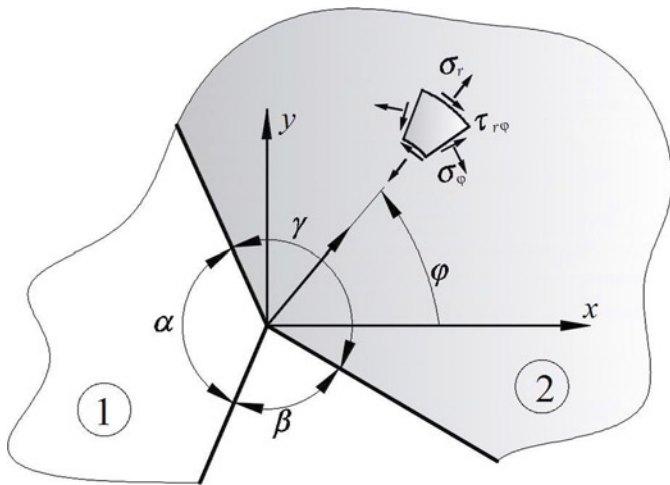


Fig. 2. Bi-material with structural notch located on interface

In the used method, the detailed description of which can be found in paper [19], by applying Airy's stress function it is possible to obtain general asymptotic solutions describing individual components of stress fields and displacements. For the analyzed bi-material structure the general asymptotic solutions are given by [18]:

$$u_{ri} = r^\lambda (A_i \cos((1 + \lambda)\varphi) + B_i \sin((1 + \lambda)\varphi) + C_i \cos((1 - \lambda)\varphi) + D_i \sin((1 - \lambda)\varphi))$$

$$u_{\phi i} = r^\lambda \left(-A_i \sin((1 + \lambda)\varphi) + B_i \cos((1 + \lambda)\varphi) - C_i \frac{\kappa + \lambda}{\kappa - \lambda} \sin((1 - \lambda)\varphi) + D_i \frac{\kappa + \lambda}{\kappa - \lambda} \cos((1 - \lambda)\varphi) \right)$$

$$\sigma_{\phi i} = r^{\lambda-1} \mu \left(-A_i 2\lambda \cos((1 + \lambda)\varphi) + B_i 2\lambda \sin((1 + \lambda)\varphi) + C_i (3 - \lambda) \frac{2\lambda}{\kappa - \lambda} \cos((1 - \lambda)\varphi) + D_i (3 - \lambda) \frac{2\lambda}{\kappa - \lambda} \sin((1 - \lambda)\varphi) \right)$$

$$\sigma_{\phi i} = r^{\lambda-1} \mu \left(-A_i 2\lambda \cos((1 + \lambda)\varphi) - B_i 2\lambda \sin((1 + \lambda)\varphi) + C_i (1 + \lambda) \frac{2\lambda}{\kappa - \lambda} \cos((1 - \lambda)\varphi) + D_i (1 + \lambda) \frac{2\lambda}{\kappa - \lambda} \sin((1 - \lambda)\varphi) \right)$$

$$\tau_{r\phi i} = r^{\lambda-1} \mu \left(-A_i 2\lambda \sin((1 + \lambda)\varphi) + B_i 2\lambda \cos((1 + \lambda)\varphi) + C_i (1 - \lambda) \frac{2\lambda}{\kappa - \lambda} \sin((1 - \lambda)\varphi) - D_i (1 - \lambda) \frac{2\lambda}{\kappa - \lambda} \cos((1 - \lambda)\varphi) \right)$$

(6)

where: $\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)}$ - shear modulus $\kappa_i = (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i)$ - a plane stress, $\kappa_i = (3 - 4\nu_i)$ - a plane strain, ν_i - Poisson's ratio, $i=1,2$.

Particular solution is obtained by determining exponent λ and constants A_i, B_i, C_i, D_i . Constants are determined on basis of the following boundary conditions [18]:

1. of the left side surface of V-notch, for $\varphi = \alpha$;
 $\sigma_{\phi 1} = \tau_{r\phi 1} = 0$

2. of the right side surface of V-notch, for $\varphi = -\gamma$;
 $\sigma_{\phi 2} = \tau_{r\phi 2} = 0$

3. along the interface, for $\varphi = 0$;
 $u_{r1} = u_{r2}; u_{\phi 1} = u_{\phi 2}; \sigma_{\phi 1} = \sigma_{\phi 2}; \tau_{r\phi 1} = \tau_{r\phi 2}$,

Moreover on basis of condition of zeroing matrix determinant of matrix boundary conditions the characteristic equation (7) can be determined, the individual roots of which determine the value of exponent λ in obtained asymptotic solutions (6). The characteristic equation takes the form [18]:

$$H_0 + \Gamma H_1 + \Gamma^2 H_2 = 0 \tag{7}$$

where:

$$H_0 = (1 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 \cos[2\alpha]) (1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos[2\gamma] - \cos[2\gamma\lambda]) -$$

$$\kappa_1 \left\{ \cos[2(-\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2\alpha\lambda] (-2 + 4\lambda^2 \sin[\gamma]^2) + \right.$$

$$\left. 2(\lambda^2 \sin[\gamma]^2 - \sin[\gamma\lambda]^2) \kappa_1 \right\}$$

$$H_1 = 5\lambda^2 + \cos[2\alpha\lambda] + \cos[2\gamma\lambda] - 2\cos[(-\alpha + \gamma)\lambda]^2 -$$

$$\lambda^2 (3\cos[2\alpha] - \cos[2(\alpha - \gamma)] + 3\cos[2\gamma] + 4\cos[2\gamma\lambda] \sin[\alpha]^2 + 4(\cos[2\alpha\lambda] + 4\lambda^2 \sin[\alpha]^2) \sin[\gamma]^2) +$$

$$\kappa_2 (\cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] - \cos[2\alpha\lambda] + 2\sin[\gamma\lambda]^2 - \lambda^2 (1 + (\cos[2\alpha] + 4\cos[2\gamma\lambda] \sin[\alpha]^2 - 2\sin[\alpha] \sin[\alpha - 2\gamma]))) +$$

$$\kappa_1 \left\{ \cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] + 4\lambda^2 \cos[\alpha] \sin[\alpha - \gamma] \sin[\gamma] + \cos[2\alpha\lambda] (-1 + 4\lambda^2 \sin[\gamma]^2) + 2\sin[\gamma\lambda]^2 + \right.$$

$$\left. (\cos[2\alpha\lambda] + \cos[2\gamma\lambda] - 2\cos[(-\alpha + \gamma)\lambda]^2 + 4\lambda^2 \cos[\alpha - \gamma] \sin[\alpha] \sin[\gamma]) \kappa_2 \right\},$$

$$H_2 = (1 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 \cos[2\gamma]) (1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos[2\alpha] - \cos[2\alpha\lambda]) -$$

$$\kappa_2 \left\{ \cos[2(-\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2\gamma\lambda] (-2 + 4\lambda^2 \sin[\alpha]^2) + \right.$$

$$\left. 2(\lambda^2 \sin[\alpha]^2 - \sin[\alpha\lambda]^2) \kappa_2 \right\},$$

$$\Gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

On the basis of the characteristic equation (7) it can be inferred that eigenvalue λ depends on material constants and notch-tip angle. The roots of equation (7) cannot be determined analytically. They were calculated numerically. To this end, a special program was created in the Mathematica software.

Fig. 3 graphically illustrates solution of equation (7), where thick line was used to mark real eigenvalues λ ($\lambda = \lambda_r, \text{Im}[\lambda]=0$), while thin line - to mark real parts of complex eigenvalues λ ($\lambda_r = \text{Re}[\lambda]$),

$\text{Im}[\lambda]=\delta$), and dotted line – to mark imaginary parts of complex eigenvalues λ ($\delta = \text{Im}[\lambda]$).

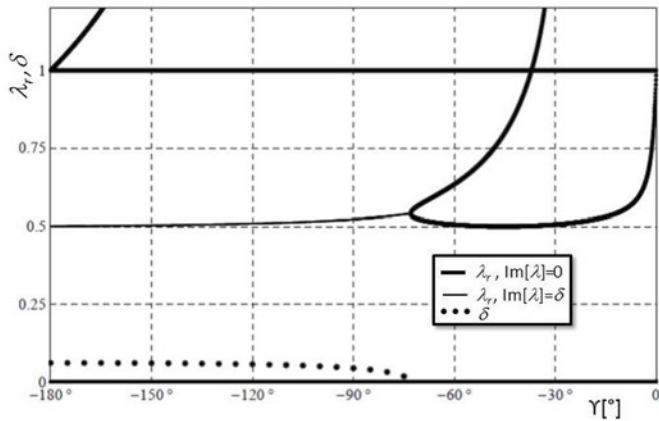


Fig. 3. Solution of the characteristic equation (7) for $\Gamma = 0.033$, $\alpha=180^\circ$, $\nu_1=0.37$, $\nu_2=0.35$, (plane strain)

The solution obtained implies that depending on material constants and notch geometry, there can be one or more singularities with a real or complex exponent λ . What is more, it is worth noting that for the notch problem located in the multi-material, the characteristic equations cannot be obtained independently for mode I and mode II [3, 5]

Since stresses can be described with complex exponent λ , generalised stress intensity factors were defined alike the authors of paper [32] (for the interfacial crack):

$$(\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi})_{\varphi=0} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}} \left(\frac{r}{2a}\right)^{i\delta} \cosh[\pi\delta], \quad (8)$$

where dimension a can be considered as e.g. notch height.

Using an equation (6), boundary conditions and the adopted generalised stress intensity factors definition (8), an analytical description of the stress fields occurring in the notch tip area can be obtained [18]:

$$\sigma_{ik} = \frac{\cosh[\pi\delta]\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_r}} \left(\sin \left[\arctan \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] + \delta \log \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \text{Re} [f_{ik}^I] + \cos \left[\frac{K_{II}}{K_I} + \delta \log \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \text{Re} [f_{ik}^{II}] \right), \quad (9)$$

where:

$$f_{\theta\theta}^I = M^{-1} \left(\begin{aligned} &(\lambda-1)\cos[(1+\lambda)\varphi](\lambda\sin[2\epsilon]-\sin[2\epsilon\lambda]) - (1+\lambda)(\lambda-\lambda\cos[2\epsilon]+\cos[2\epsilon\lambda]-1)\sin[(1+\lambda)\varphi] \\ &+ (\lambda-3)(\lambda\sin[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi] + (1+\lambda)\sin[\varphi-\lambda\varphi] - \sin[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]) \end{aligned} \right),$$

$$f_{rr}^{II} = -M^{-1} \left(\begin{aligned} &(1-\lambda)(\lambda\cos[2\epsilon]+\cos[2\epsilon\lambda]-1-\lambda)\cos[(1+\lambda)\varphi] + \\ &(\lambda-3)(-\lambda\cos[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi] + (\lambda-1)\cos[\varphi-\lambda\varphi] + \cos[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]) - \\ &+ (\lambda-1)(\lambda\sin[2\epsilon]+\sin[2\epsilon\lambda])\sin[(1+\lambda)\varphi] \end{aligned} \right),$$

$$f_{\varphi\varphi}^I = M^{-1}(1+\lambda) \left(\begin{aligned} &(1-\lambda)\sin[(1+\lambda)\varphi] + \lambda\sin[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi] + \\ &(1+\lambda)\sin[\varphi-\lambda\varphi] - \sin[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi] - \lambda\sin[2\epsilon-(1+\lambda)\varphi] + \sin[2\epsilon\lambda-(1+\lambda)\varphi] \end{aligned} \right),$$

$$f_{\varphi\varphi}^{II} = -M^{-1} \left(\begin{aligned} &(\lambda-1)(-1-\lambda+\lambda\cos[2\epsilon]+\cos[2\epsilon\lambda])\cos[(1+\lambda)\varphi] + (\lambda-1)(\lambda\sin[2\epsilon]+\sin[2\epsilon\lambda])\sin[(1+\lambda)\varphi] \\ &+ (1+\lambda)(\lambda\cos[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi] - \lambda\cos[\varphi-\lambda\varphi] + 2\sin[\epsilon\lambda]\sin[\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]) \end{aligned} \right),$$

$$f_{r\varphi}^I = M^{-1} \left(\begin{aligned} &(1+\lambda)(1-\lambda+\lambda\cos[2\epsilon]-\cos[2\epsilon\lambda])\cos[(1+\lambda)\varphi] + \\ &(\lambda-1)(\lambda\cos[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi] - (1+\lambda)\cos[\varphi-\lambda\varphi] + \cos[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi]) + \\ &+ (1+\lambda)(\lambda\sin[2\epsilon]-\sin[2\epsilon\lambda])\sin[(1+\lambda)\varphi] \end{aligned} \right),$$

$$f_{r\varphi}^{II} = M^{-1}(\lambda-1) \left(\begin{aligned} &((1+\lambda)\sin[(1+\lambda)\varphi] - \lambda\sin[2\epsilon+(\lambda-1)\varphi]) \\ &- (\lambda-1)\sin[\varphi-\lambda\varphi] - \sin[2\epsilon\lambda+\varphi-\lambda\varphi] + \lambda\sin[2\epsilon-(1+\lambda)\varphi] + \sin[2\epsilon\lambda-(1+\lambda)\varphi] \end{aligned} \right),$$

$M = 2(\lambda^2 - \lambda^2 \cos[2\epsilon] + \cos[2\epsilon\lambda] - 1)$, $\epsilon = \alpha$ -for the material 1 and $\epsilon = -\gamma$ for the material 2.

Below a particular form of stress fields for angle $\varphi=0$, i.e. along the interface line is presented [18]:

$$\sigma_{\varphi 1,2\varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} r^{\lambda_r-1} \cos \left[\arctan \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] + \delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \cosh[\pi\delta],$$

$$\tau_{r\varphi 1,2\varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} r^{\lambda_r-1} \sin \left[\arctan \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] + \delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \cosh[\pi\delta]. \quad (10)$$

When the exponent is a real value ($\delta = 0$) dependence (10) will be simplified to the following form:

$$\sigma_{\varphi 1,2\varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_I r^{\lambda_r-1}, \tau_{r\varphi 1,2\varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_{II} r^{\lambda_r-1}. \quad (11)$$

For a quantitative description of stresses, it is necessary to determine values of K_j . They were determined based on comparing the obtained analytical solutions with stresses obtained from FEM solution. Due to the fact that the main purpose of the presented paper was experimental verification of possibilities of using the McClintock criterion, FEM models of specimens were prepared, the strength of which was tested by means of experiments in [11, 12].

4. Testing specimens and FEM model

Specimens were modelled in numerical simulations, the geometry and material properties of which were identical as in specimens used in experimental testing (prepared by authors of papers [11, 12]).

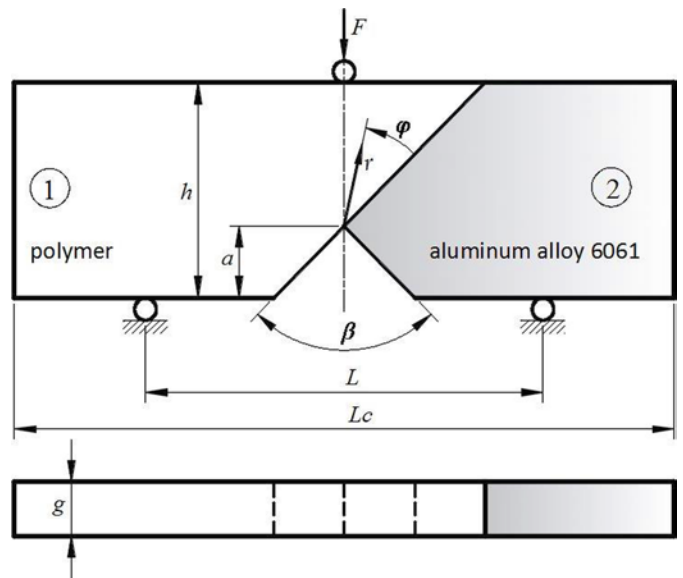


Fig. 4. Geometry and load of specimens with structural notch

Two types of specimens were analysed:

- component 1 made of PC (Polycarbonate) while component 2 of aluminum alloy 6061;

- component 1 made of PMMA (Poly(methyl methacrylate)) while component 2 of aluminum alloy 6061.

Components were bonded using Weld-on® 10 adhesive. The adhesive has been selected so that its stiffness properties were close to those of polymers. Therefore, it was possible to confirm the assumption that it is the bi-material that is modelled, not a three-layer composite. In this case, the adhesive interface could be treated as a layer without any thickness, but with different strength and fracture toughness than the polymers or the aluminum alloys separately. During the bonding process, achieving the minimum adhesive thickness was one of the goals. To obtain the minimum thickness of the adhesive, the specimens were joint under high pressure using a special holder. They were allowed to cure for a period of 24 hours to achieve the required bonding strengths. The thickness of the adhesive layer was not measured. Such information was not needed for the prediction of fracture toughness, assuming that the analyzed structure is the bi-material.

It is worth noting that using the selected adhesive in case where two different metal alloys are being combined, e.g. steel and aluminum alloy, ignoring the adhesive layer thickness and treating such a structure as a bi-material would be unacceptable. In that case, the approach based on the Traction-Separation criterion [25] can be used to predict the critical load. Namely, the adhesive layer should be modeled using special finite elements (cohesive elements). To define such elements it is necessary to know such parameters as maximum normal traction at the interface, normal separation across the interface where the maximum normal traction is attained and the limit value of separation. These parameters can be determined, knowing the thickness of the adhesive layer, based on experimental tests.

The carried out analyses were aimed at determining the applicability of the proposed fracture criterion for bi-material structures in a situation where a complex state of stress occurs on the interface, and the structural notch generates singular stress fields. Whereby the stress fields, depending on the geometrical and material features of the structure, can be described using real or complex λ exponents. Specimens with different notch-tip β angle were used in the study. β angles were selected in a way to obtain instances when stresses are described both in real and complex λ exponent. What's more, the variation of the notch-tip angles allowed for obtaining different proportions of tangential and normal stresses occurring in the plane of the connection. In all specimens, equal notch height a (measured from the lower surface of the sample), overall dimensions and the position of the support and loading points in the three-point bending test were assumed. This was to ensure the same boundary conditions (fixing and loading) for all examined specimens. Overall dimensions were chosen arbitrarily considering the capabilities of both the research stand and the device used for specimen preparation.

Specimen dimensions were as follows: total length $L_c=254$ mm, a spacing between supports $L=90$ mm, notch height $a=19.1$ mm, sample height $h=50.8$ mm, thickness $g=5.4$ mm, respectively. As regards the notch-tip angle β , three cases were considered: $\beta=30^\circ$, $\beta=90^\circ$ and $\beta=120^\circ$. The specimens used in the tests are presented in Table 1. Material specification for individual components is given in Table 2.

Table 2. Mechanical properties of individual components of specimens [12]

	Young's modulus E [GPa]	Poisson's ratio ν
aluminum alloy 6061	70	0.35
PC	2.38	0.37
PMMA	3.79	0.37

Table 1. Tested bi-material structure

No	Tested bi-material structure	Notch-tip angle β [°]
1	PC/ aluminum alloy 6061	30
2	PC/ aluminum alloy 6061	90
3	PC/ aluminum alloy 6061	120
4	PMMA/ aluminum alloy 6061	30
5	PMMA/ aluminum alloy 6061	90
6	PMMA/ aluminum alloy 6061	120

Tested specimens (Fig. 4, Tab. 1) were modelled with *FEM*, using ANSYS application. Fig. 5 shows, for a given specimen, division to finite elements and boundary conditions.

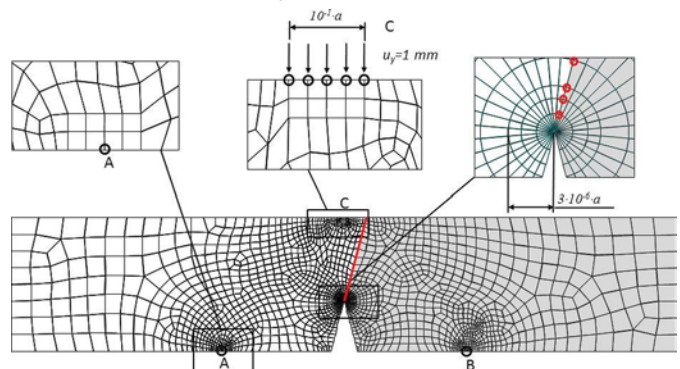


Fig. 5. Division to finite elements and conditions of mounting and loading of the specimen with notch with tip angle $\beta = 300$, the red colour was used to mark nodes from which the stresses were read for stress intensity factors calculation

Plane specimens were described with quadrangle, eight-node finite elements with increased refinement (according to the arithmetic series) in the tip area, with triangular special elements [35] surrounding singular point (Fig. 5). The total length of the lateral edges of the last three elements depended on the notch height a and were assumed to be $3 \cdot 10^{-6} a$ for all specimens. Due to the high density of the finite element mesh in the notch tip area, the prepared models contained approximately 10000 finite elements. As already mentioned before, the specimens can be treated as a bi-material structure. Therefore, the adhesive layer was not included in the prepared numerical models. As for the connection conditions of individual components, the nodes laying on the interface were shared between both materials. There was not allowed for slip between components on the interface.

Due to the fact that it is difficult to determine real frictional conditions of the contact between supports and material of the specimen, which are present during the three-point bending test, certain simplifications should be adopted. Thus, two methods of mounting were tested:

- I sliding supports (disabled possibility of moving vertically in nodes located in support points A and B);
- II non-sliding supports (disabled possibility of moving vertically and horizontally in nodes located in support points A and B).

As regards the load conditions, the specimens were loaded with a constant vertical displacement $u_y = 1$ mm, applied at selected nodes (point C). Loading force F was determined on the basis of stresses in the nodes to which the displacement u_y was applied.

Numerical calculations were carried out for plane stress and plane strain cases.

As already mentioned before, in the FEM models, the adhesive, as a separate material layer, was not included. Despite this, it was possible to include the interface's strength properties in the used fracture criterion. On the basis of numerical simulations, stress intensity factors were determined. They were used to calculate the value of the predicted failure function (described further in the paper), which were then compared with the critical values. The interface's strength properties in the tested specimens was taken into account in that the critical values of the failure function and the ρ_c parameter were determined based on the bonding tensile strength and bonding fracture toughness (Tab. 3). Both of parameters were determined experimentally for the bi-materials made of PMMA and aluminum alloy as well as PC and aluminum alloy.

5. Description of method applied to determine generalised stress intensity factors

To determine values of generalised stress intensity factors K_j extrapolation method was applied. This method, unlike e.g. energy methods [37], or methods based on the application of special finite elements [4], is less complex. The disadvantage of this method, though, is a necessity to use a high density of mesh of division to finite elements in the tip area of stress concentrator. Additionally, accuracy of the results is influenced by the selection of area, where the numerical solution is compared with the analytical solution. This inconvenience can be eliminated by using terms of higher order [17, 24, 33] in the analytical description or determining an adequate criterion for the selection of nodes, for which values of stresses obtained from FEM modelling are compared with the known analytical solution. Such criterion was specified in papers [20] (for the case of interfacial crack) and [18] (for the problem of structural notch). As is well known, if the stress chart of the type $\sigma = Ar^{-b}$ in logarithmic system is linear, the line gradient equals $-b$.

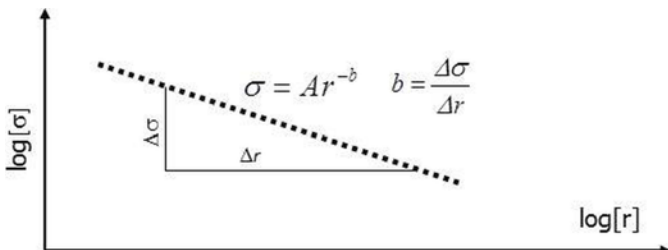


Fig. 6. Graphical interpretation of singular stress fields with theoretical gradient b [18]

Thus, when determining stress intensity factors, numerical and analytical solutions are compared only for nodes with the gradient of b .

For the case of the structural notch, stress components are always simultaneously dependent on K_I and K_{II} , and therefore, in order to use the above criterion, it is necessary to determine the so-called “combined stresses” [18]:

$$\sigma_I(r,0) = \text{Sech}[\pi\delta] \left(\sigma \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] + \tau \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}}, \tag{12}$$

$$\sigma_{II}(r,0) = \left(\tau \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] - \sigma \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \right) \text{Sech}[\pi\delta] = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}}, \tag{13}$$

where σ, τ are circumferential and shear stresses, respectively, obtained from FEM modelling (obtained from nodes located on the interface).

According to the adopted criterion when determining the sought generalised stress intensity factors, pairs of nodes with the gradient of $b = (\lambda_r - 1) \pm 0.01$ were taken into account.

The “combined stresses” $\sigma_j(r,0)$ in the distance of r_n and r_{n+1} from the notch tip can be noted as follows:

$$\sigma_j(r_n,0) = \frac{K_j}{\sqrt{2\pi r_n^{1-\lambda_r}}} (1 + cr_n), \sigma_j(r_{n+1},0) = \frac{K_j}{\sqrt{2\pi r_{n+1}^{1-\lambda_r}}} (1 + cr_{n+1}). \tag{14}$$

Using equations (12) – (14) after simple mathematical transformations, formulas (15) are obtained: (enabling to determine factors K_j at some distance from the notch tip):

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \frac{\sqrt{2\pi} (r_n r_{n+1})^{1-\lambda_r}}{r_n - r_{n+1}} \text{sech}[\pi\delta] \left\{ r_n^{\lambda_r} \left(\sigma_{(r_{n+1})} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] + \tau_{(r_{n+1})} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] \right) - \right. \\ &\quad \left. r_{n+1}^{\lambda_r} \left(\sigma_{(r_n)} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] + \tau_{(r_n)} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] \right) \right\} \\ K_{II} &= \frac{\sqrt{2\pi} (r_n r_{n+1})^{1-\lambda_r}}{r_n - r_{n+1}} \text{sech}[\pi\delta] \left\{ r_n^{\lambda_r} \left(\tau_{(r_{n+1})} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] - \sigma_{(r_{n+1})} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] \right) - \right. \\ &\quad \left. r_{n+1}^{\lambda_r} \left(\tau_{(r_n)} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] - \sigma_{(r_n)} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] \right) \right\} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Calculated stress intensity factor, for selected nodes (with the gradient of $b = (\lambda_r - 1) \pm 0.01$), is approximated with a straight line and this way generalised stress intensity factors K_j are determined.

It is worth noting that if exponent λ is a real number ($\delta = 0$), the dependence (15) is simplified to the form as given in paper [14]:

$$K_j = \frac{\sqrt{2\pi} (r_n r_{n+1})^{1-\lambda_r} (r_{n+1}^{\lambda_r} \sigma_{(r_n)} - r_n^{\lambda_r} \sigma_{(r_{n+1})})}{r_{n+1} - r_n}. \tag{16}$$

6. Test results and discussion

As it was already discussed, in order to verify the McClintock stress criterion, it is necessary to know the qualitative and quantitative description of stress fields which occurred in the cracking plane, critical parameters and experimental data (damage loads). Damage loads were taken from paper [11, 12]. Since after the cracking process was initiated, the crack propagated along the interface, in the tested criterion critical parameters characterising properties of adhesive layer / interface [10] were used, for which critical distance σ_c was determined, according to formula (5). The methods of determining critical parameters for the adhesive layer are discussed in [7, 10, 22, 25].

In order to determine the quantitative description of mechanical fields, generalised stress intensity factors K_j were calculated. They were determined numerically with extrapolation method using data obtained from FEM modelling and analytical solutions. The extrapolation method, FEM modelling and analytical solution were presented and discussed in the previous sections herein.

Values of the calculated generalised stress intensity factors K_j , for all types of samples (Fig. 4), are given in Tables 4-5.

Exponents λ , obtained from equation (7), for material constants given in Table 2, are listed in Table 6.

Table 3. Strength properties of adhesive - Weld-on® 10 [10]

	Tensile strength σ_c [MPa]	Fracture toughness K_{Ic} [MPa m ^{0.5}]	Critical distance ρ_c [mm]
PC/ aluminum alloy 6061	11.35	0.24	0.071
PMMA/ aluminum alloy 6061	12.85	0.28	0.075

case it is defined (on the basis of analytical description of local stress fields) using formula (17):

$$K_E = \cosh(\pi\delta)\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}, \quad (17)$$

Critical value of the factor K_{Ec} can be determined by solving the below system of equations (18):

$$\frac{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}{\sigma_c} = 1, \left(\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0, r=\rho_c} = 0. \quad (18)$$

Table 4. Values of generalised stress intensity factors K_j and applied force F PC /aluminum alloy 6061

β [°]	mounting conditions					
	sliding supports			non-sliding supports		
	K_I [Pa m ^{1-λ_r]}	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r]}	F [N]	K_I [Pa m ^{1-λ_r]}	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r]}	F [N]
30	6621327.4* 5654415.8**	16207.8* 565904.7**	4139.0* 3508.3**	2670172.3* 2337935.8**	334892.9* 576351.2**	5598.9* 4718.3**
90	6953117.8* 7929593.6**	-2675922.6* -1851771.4**	3532.6* 3004.2**	2654647.7* 3089615.1**	-1281221.0* -622169.7**	5071.6* 4276.7**
120	3224964.6* 3206237.2**	-4631416.6* -6451442.2**	3345.1* 2853.9**	1156739.9* 1185145.1**	-1821056.5* -2538667.0**	5001.9* 4225.0**

*-plane strain, **-plane stress

After the system of equations (18) is solved - using formulas (5), (9) and (10) a dependence is obtained, allowing to determine the value of critical equivalent stress intensity factor (19):

$$K_{Ec} = (2\pi)^{\lambda_r} \frac{1}{2} \left(\frac{K_{Ic}^2}{\sigma_c^2} \right)^{1-\lambda_r} \sigma_c. \quad (19)$$

It is worth noting that for the tension element with a crack ($\lambda_r = 0.5$) or a notch, with tip angle equal to π ($\lambda_r = 1$), the dependence (19) is simplified accordingly to the following forms: $K_{Ec} = K_{Ic}$; $K_{Ec} = \sqrt{2\pi}\sigma_c$, which is consistent with the literature data.

Assuming that the fracture process will be initiated when:

$$K_E = K_{Ec}, \quad (20)$$

predicted critical force can be calculated from the following condition:

$$F_k = \frac{K_{Ec}F}{K_E}, \quad (21)$$

where F is a force at which K_E (17) were calculated.

Table 5. Values of generalised stress intensity factors K_j and applied force F PMMA/aluminum alloy 6061

β [°]	mounting conditions					
	sliding supports			non-sliding supports		
	K_I [Pa m ^{1-λ_r]}	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r]}	F [N]	K_I [Pa m ^{1-λ_r]}	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r]}	F [N]
30	10590286.9* 9092521.1**	88797.8* 449519.4**	6510.0* 5522.1**	4304874.73* 3774299.6**	466048.7* 845462.9**	8818.2* 7435.5**
90	15655266.1* 13838295.9**	-8259321.6* -4731359.1**	5572.9* 4742.3**	6032440.86* 5427305.2**	-1915526.6* -578767.5**	8002.9* 6753.4**
120	4796910.9* 4040648.9**	-6494991.4* -6507052.4**	5279.8* 4507.1**	1798019.9* 1525983.9**	-2641592.9* -2594161.8**	7892.7* 6671.4**

*-plane strain, **-plane stress

As already mentioned it is difficult to model the actual frictional and contact conditions [2, 15] occurring in the support area with numerical modeling of three-point bending test. Therefore Figure 7 (for plane stress) and Table 7 (for plane strain) provide values for the predicted force F_k (21) determined by using two variants of specimen fixing in *FEM* models. It is obvious that the real critical force will take values from a range limited by forces estimated when using sliding supports and non-sliding supports in numerical models.

Table 6. Values of exponents λ

β [°]	type of specimen			
	PC/ aluminum alloy 6061		PMMA/ aluminum alloy 6061	
	λ_r	δ	λ_r	δ
30	0.5032* 0.5033**	0.0611* 0.0958**	0.5051* 0.5052**	0.0579* 0.0913**
90	0.5222* 0.5231**	0.0450* 0.0810**	0.5339* 0.5352**	0.0235* 0.0646**
120	0.5058* 0.5324**	0* 0**	0.5003* 0.5071**	0* 0**

*-plane strain, **-plane stress

As already mentioned, if both shear and normal stresses are present in the cracking plane, in order to predict the cracking process the equivalent stress intensity factor K_E can be used. For the analysed

The values of critical forces determined using the formula (21) were compared with the experimental data, which is shown in Figure 7 and Table 6. The experimental crack initiation load is an average obtained from at least three experiments performed for each type of specimen.

On the basis of the obtained results it can be stated that distribution of the estimated critical forces is consistent with experimental data. Better convergence of results, both for plane stress and plane strain condition, was obtained by using non-sliding supports in the *FEM* model:

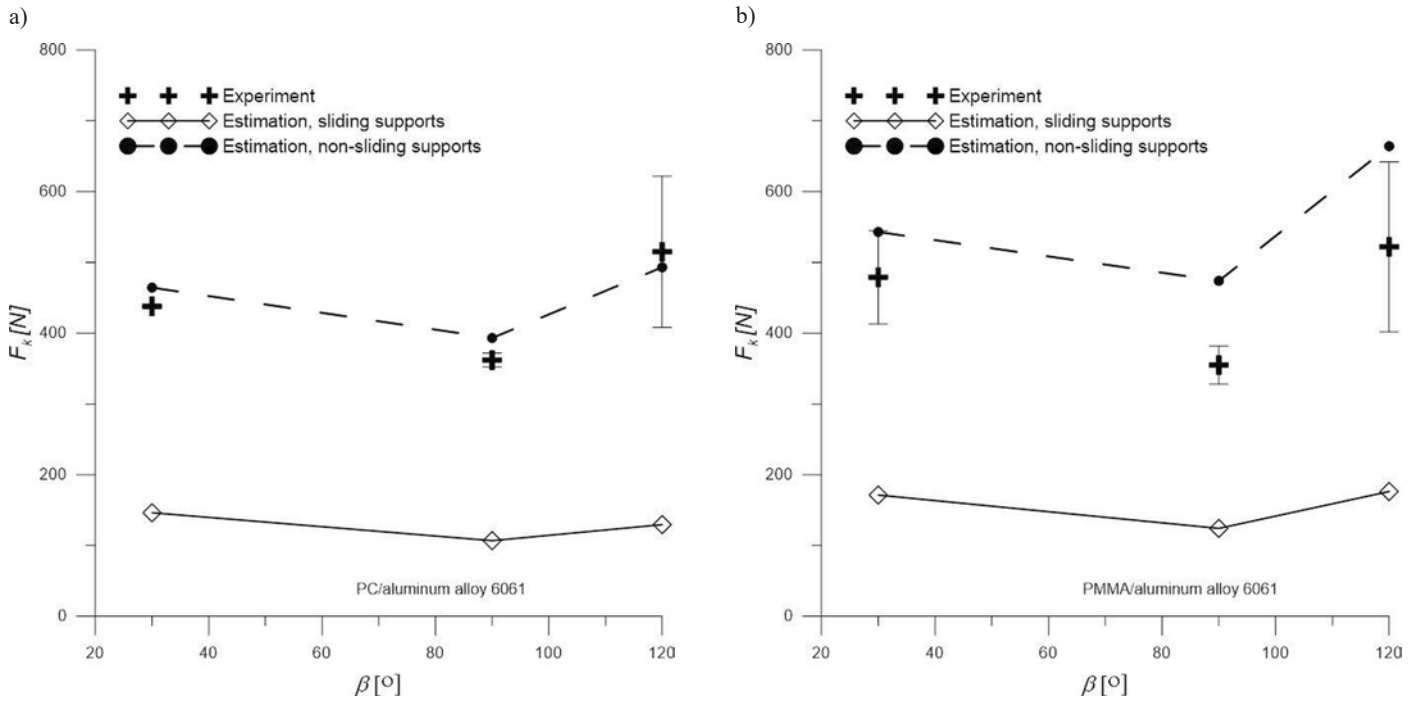


Fig. 7. Comparison of critical stress values, obtained from tested criterion with values obtained from experimental testing [12], bonded polycarbonate/ aluminum alloy 6061specimens, b) bonded PMMA/aluminum alloy 6061 specimens, plane stress

Table 7. Values of critical forces F_k (21) calculated for various types of specimens, plane strain

β [°]	PC/ aluminum alloy 6061		PMMA/ aluminum alloy 6061	
	experiment [12]	estimation (21)	experiment [12]	estimation (21)
30	438±1	151.9* 505.7**	479±66	177.7* 588.6**
90	362±10	139.2* 403.3**	355±27	121.3* 487.2**
120	515±107	150.3* 587.9**	522±120	183.6* 693.6**

*- sliding supports, **- non-sliding supports

When determining critical forces in the analytical description first singular term was used only. Use of terms of a higher order was not necessary due to a fact that analytical (when using the first singular term only) and numerical solutions matched one another in an area larger than the critical distance ρ_c , which is shown in Figure 8.

It is worth noting that prediction of fracture toughness with use of the concept of equivalent stress intensity factor is quite complicated. Since it is necessary to determine exponents λ and generalized stress intensity factors K_j . For uniform materials it is not a major problem, as approximate formulas are available which allow for calculation of generalized stress intensity factors, and exponent λ depends only on tip angle of the notch and can be easily determined (exponent values λ can be found, e.g. in paper [28]). For a bi-material with a notch situated on the interface, both K_j and λ depend on geometrical and material features of the structure and should be determined individually for each analysed case. Due to the above inconveniences, the paper attempts to develop a procedure of predicting fracture toughness which might be more practical from the engineering point of view.

Authors of many papers, e.g. [30] indicate that critical value of energy release factor depends on the ratio of shear and normal stresses which are present in the cracking plane. Therefore, critical stresses

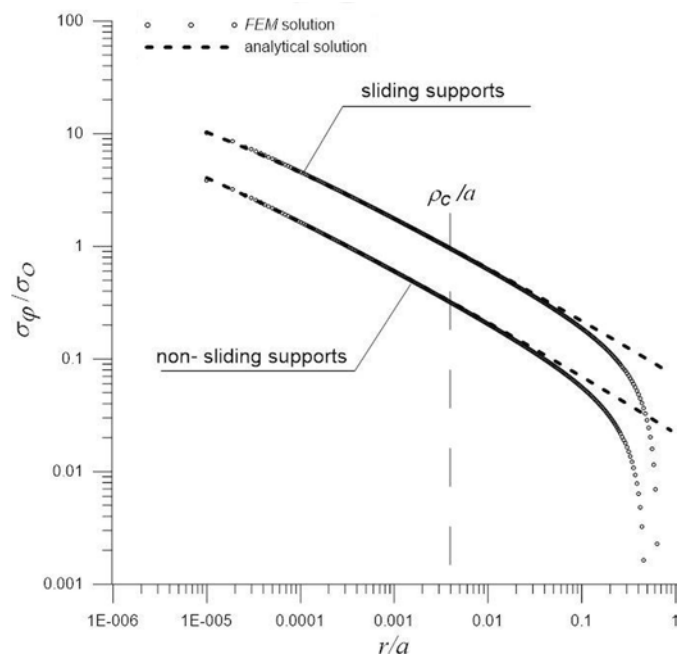


Fig. 8. The normalized circumferential stress versus r/a for PC/aluminum alloy 6061 specimen with notch-tip angle $\beta= 300$, $\sigma_0 = 3FL / (2gh^2)$, plane stress

also must be dependent on such factor. Accordingly, condition (3) can be written as follows (22):

$$\sigma_\varphi(\rho_c, 0) = \sigma_c(\psi) \tag{22}$$

Taking into account inter-relationships between cracking mechanics parameters, the following form of function depending on critical stress to mode mixity ratio ψ was proposed:

$$\sigma_c(\psi) = \sigma_c / \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (23)$$

$$\text{where: } \psi = \frac{\tau_{r\varphi}(\rho_c, 0)}{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}.$$

It is worth noting that the proposed modification of a criterion of cracking (23) is concurrent with a concept provided in paper [34]. Author of paper [34] suggests the use of an additional factor including impact of quantitative portion of shear and normal stresses in the process of prediction of crack initiation. This factor is not constant and depends on geometry of the object and load conditions.

By using criterion (23) critical force value can be estimated on the basis of dependence (24):

$$F_k = \frac{\sigma_c(\psi)F}{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}. \quad (24)$$

Critical force F_k (24) can be determined in two ways:

- using analytical (qualitative description (9, 10)) and numerical (quantitative description (15)) solutions;
- using only numerical solution (stresses obtained, e.g. using *FEM*).

Of course the latter, from practical point of view, is less complicated and recommended for use in engineering calculations.

However in this paper the former is used. The reason for that was the necessity to check to what extent solutions obtained from formulas (21) and (24) match each other. Because critical forces (21) were estimated using analytical and numerical solutions, the same approach should be used in formula (24). Thus using analytical and numerical solutions, critical forces F_k (24) for all analysed specimens were determined. The obtained results were exactly the same as results obtained on the basis of formula (21) and therefore there was no need to include them in the paper.

7. Summary and conclusions

This paper dealt with the analysis of interface crack initiation at sharp notches along adhesive bonding in bonded bi-material structure. The possibility of using McClintock criterion was analysed to predict the loads at the crack initiation for such type of construction elements. In order to use this criterion, usually, it is necessary to know

the qualitative and quantitative description of stress fields around concentrator's tip. Thus, the analytical description was obtained, and methodology of its obtaining was presented. Moreover, the method for determining generalised stress intensity factors was discussed, including qualitative nature of singularity of stresses fields, and for the selected cases, their values were determined.

The obtained analytical and numerical solutions allowed for formulation of the form of damage criterion and critical parameters.

Two forms of cracking criterion were developed, based on:

- equivalent stress intensity factor;
- modification of McClintock criterion involving dependence of critical stresses on proportion of shear and normal stresses occurring in the cracking plane.

The carried out analyses showed that from both forms of the cracking criterion the same results of prediction of critical forces are obtained. However from the practical point of view the second form of the cracking criterion is more favourable. This is due to the fact that in the prediction of cracking stresses determined by using, e.g. *FEM* can be used only with no need of determining stress intensity factors.

Values of critical loads resulting from the hypothesis were compared with values obtained from the experiment. Since actual frictional and contact conditions that are present in the specimen support area cannot be reflected with numerical modelling of three-point bending test, a range in which the predicted critical forces occur, was determined only. In the vast majority of analysed cases critical forces determined experimentally occurred in the range defined by means of the tested criterion. What is more, tendency of variability of the predicted forces was consistent with experimental data. This suggests that the analysed criterion can be used to predict initiation of the process of cracking of elements bonded using an adhesive with a notch situated on the interface. However in order to state such fact clearly it would be necessary to carry out additional experimental tests. Such tests should be planned so that actual fixing and loading conditions for the specimens are reflected in numerical modelling. The author shall try to carry out such tests and verify suitability of McClintock's hypothesis again in his next paper.

Acknowledgement

Studies were carried out within work no. S/WM/3/17 and funded from under development of science by Ministry of Science and Higher Education.

References

1. Ayatollahi M, Torabi A R. A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics* 2009; 39: 1883–1896, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.04.008>.
2. Baranowski P, Damaziak K, Małachowski J. Brake system studies using numerical methods, *Eksplotacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2013; 15 (4): 337–342.
3. Bogy D B, Wang K C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. *International Journal of Solids and Structures* 1971; 1: 993–1005, [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90077-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90077-1).
4. Byskov E. Calculation of stress intensity factors using finite element method with cracked elements. *International Journal of Fracture Mechanics* 1970; 6(2): 59–167, <https://doi.org/10.1007/BF00189823>.
5. Carpinteri A, Paggi M. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Engineering Fracture Mechanics* 2007; 74: 59–74, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.01.030>.
6. Griffith A A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions series A* 1920; 221: 163–198, <https://doi.org/10.1098/rsta.1921.0006>.
7. Kinloch A J. Adhesion and adhesives, *Science and Technology*. London: Springer, 1987, <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7764-9>.
8. Kirsch G. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre. *Verein deutscher Ingenieure Zeitschrift* 1898; 29: 797–807.
9. Knesl Z, Klusak J, Nahlik L. Crack initiation criteria for singular stress concentrations, Part I: A Universal assessment of singular stress concentrations, *Engineering Mechanics* 2007; 14(6): 399–408.
10. Krishnan A, Xu L R. Systematic evaluation of bonding strengths and fracture toughness of adhesive joints. *The Journal of Adhesion* 2011; 87(1): 53–71, <https://doi.org/10.1080/00218464.2011.538322>.

11. Krishnan A, Xu LR. Experimental studies on the interaction among cracks, notches and interfaces of bonded polymers. *International Journal of Solids and Structures* 2013; 50: 1583–1596, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.01.024>.
12. Krishnan A, Roy Xu L. An experimental study on the crack initiation from notches connected to interfaces of bonded bi-materials. *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 111: 65–76, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.08.010>.
13. Leguillon D. A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB – Mechanics* 2001; 329(2): 97–102, [https://doi.org/10.1016/S1620-7742\(01\)01302-2](https://doi.org/10.1016/S1620-7742(01)01302-2).
14. Li Y, Song M. Method to calculate stress intensity factor of V-notch in bi-materials. *Acta Mechanica Solida Sinica* 2008; 21(4): 337–346, <https://doi.org/10.1007/s10338-008-0840-3>.
15. Łukaszewicz A. Nonlinear numerical model of heat generation in the rotary friction welding. *Journal of Friction and Wear* 2018; 39 (6): 612–619, <https://doi.org/10.3103/S1068366618060089>.
16. McClintock F A. Ductile fracture instability in shear. *Journal of Applied Mechanics* 1958; 25: 582–588.
17. Mieczkowski G. Description of stress fields and displacements at the tip of a rigid, flat inclusion located at interface using modified stress intensity factors. *Mechanika* 2015; 21(2): 91–98, <https://doi.org/10.5755/j01.mech.21.2.8726>.
18. Mieczkowski G. Stress fields and fracture prediction for adhesively bonded bi-material structure with sharp notch located on the interface. *Mechanics of Composite Materials* 2017; 53(3): 305–320, <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9663-y>.
19. Mieczkowski G. Stress fields at the tip of a sharp inclusion on the interface. *Mechanics of Composite Materials* 2016; 52(5):601–610, <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9610-3>.
20. Naik R A, Crews J H. Determination of stress intensity factors for interface cracks under mixed-mode loading. Paper presented at the ASTM National Symposium on Fracture Mechanics, June 30–July 2, 1992, Gatlinburg, TN.
21. Parton V ., Perlin P I. *Mathematical methods of the theory of elasticity*. Moscow: Mir Publishers, 1984.
22. Pirondi A, Nicoletto G. Fatigue crack growth in bonded DCB specimens. *Engineering Fracture Mechanics* 2004; 71(4–6): 859–871, [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00046-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00046-8).
23. Ritchie R O, Knott J F, Rice J R. On the relation between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1973; 21: 395–410, [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90008-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90008-2).
24. Rogowski G, Molski K L. The T-stress effect on the plastic zone size in a thin ductile material layer sandwiched between two elastic adherents. *Engineering Fracture Mechanics* 2016; 168 (A): 260–270.
25. Rudawska A, Dębski H. Experimental and numerical analysis of adhesively bonded aluminium alloy sheets joints. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2011; 1: 4–10.
26. Savruk M P, Shkarayev S, Madenci E. Stress near apex of dissimilar material with bilinear behavior. *Journal of Applied Fracture Mechanics* 1999; 31: 203–212, [https://doi.org/10.1016/S0167-8442\(99\)00014-2](https://doi.org/10.1016/S0167-8442(99)00014-2).
27. Seweryn A, Łukaszewicz A. Verification of fracture criteria of elements with V-shaped notches. *Eksploracja i Niezawodność — Maintenance and Reliability* 2001; 5: 6–8.
28. Seweryn A, Molski K. Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions. *Engineering Fracture Mechanics* 1996; 55: 529–556, [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00035-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00035-5).
29. Sih G C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture* 1974; 10: 305–321, <https://doi.org/10.1007/BF00035493>.
30. Sih G C, Chen E P. *Cracks in composite materials*, Ch.3 (Mechanics of Fracture VI) ed. G. C. Sih. Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981.
31. Sneddon I N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London A* 1946; 187(1009): 229–260, <https://doi.org/10.1098/rspa.1946.0077>.
32. Sun C T, Jih C J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Engineering Fracture Mechanics* 1987; 28: 13–20, [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90115-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90115-9).
33. Sun C T, Qian H. Brittle fracture beyond the stress intensity factor. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 2009; 4(4): 743–753, <https://doi.org/10.2140/jomms.2009.4.743>.
34. Taylor, D. *The Theory of Critical Distances: A new perspective in fracture mechanics*. Oxford: Elsevier, 2007.
35. Tracey D M. Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics* 1971; 3(3): 255–265, [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(71\)90036-1](https://doi.org/10.1016/0013-7944(71)90036-1).
36. Tran V-X, Leguillon D, Krishnan A. Interface crack initiation at V-notches along adhesive bonding in weakly bonded polymers subjected to mixed-mode loading. *International Journal of Fracture Mechanics* 2012; 176: 65–79, <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9727-x>.
37. Treifi M, Oyadji S O. Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches. *International Journal of Solids and Structures* 2013; 50: 2196–2212, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.011>.
38. Williams M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension. *Journal of Applied Mechanics* 1952; 9: 526–528

Grzegorz MIECZKOWSKI

Faculty of Mechanical Engineering
Białystok University of Technology
ul. Wiejska 45C, Poland

E-mail: g.mieczkowski@pb.edu.pl

Grzegorz Mieczkowski

Faculty of Mechanical Engineering
Bialystok University of Technology
ul. Wiejska 45C, Poland
E-mail: g.mieczkowski@pb.edu.pl

Kryterium pęknięcia struktury bi-materiałowej z ostrym karbem usytuowanym na interfejsie

Słowa kluczowe: inicjacja procesu pęknięcia, bi-materiały, osobliwe pola naprężeń, współczynniki intensywności naprężeń

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki badań dotyczących pęknięcia struktury bi-materiałowej z karbem usytuowanym na interfejsie. Do prognozowania inicjacji procesu pęknięcia zastosowano kryterium oparte na punktowej teorii krytycznych dystansów. Analizowano elementy wykonane ze stopu aluminium i polimerów (PC, PMMA), które poddane były trójpunktowemu zginaniu. Wartości obciążeń krytycznych wynikających z wykorzystanej hipotezy porównano z wartościami uzyskanymi z eksperymentu. Walidacja wybranego kryterium wymagała określania jakościowego i ilościowego opisu osobliwych pól naprężeń, występujących w okolicy wierzchołkowej karbu strukturalnego. W związku z tym, uzyskano takie rozwiązania i omówiono metodykę ich otrzymywania.

1. Wstęp

Prognozowanie trwałości konstrukcji mechanicznych jest złożonym procesem wymagającym uwzględnienia wielu czynników. Jednym z nich jest złożoność strukturalna konstrukcji. Konstrukcja jest obiektem fizycznym zbudowanym z wielu elementów, często wykonanych z materiałów o różnych właściwościach mechano-fizycznych. Dodatkowo, konstrukcje poddane są zwykle działaniu złożonych obciążeń zewnętrznych, często o charakterze zmiennym, przy różnych czynnikach środowiskowych. Powoduje to różne mechanizmy zniszczenia - zużycie (korozyjne, kawitacyjne, tarciove), utratę nośności, pęknięcie – wykluczające często dalszą pracę urządzenia.

Miejscem inicjacji pęknięć są najczęściej pustki i inne wady materiałowe oraz karby konstrukcyjne, których obecność w konstrukcji wynika najczęściej z konieczności połączenia ze sobą poszczególnych komponentów, zapewnienia konstrukcji wymaganych cech funkcjonalnych, czy żądanej struktury materiałowej.

Karby można podzielić na wiele różnych kategorii w zależności od ich kształtu, usytuowania w konstrukcji, niejednorodności materiałowej czy technologii wytwarzania konstrukcji. Wszystkie one mają wspólną cechę – powodują lokalny wzrost naprężenia w obciążonej konstrukcji, przez co wpływają na jej trwałość i wytrzymałość.

Na podstawie obserwacji i badań eksperymentalnych, naukowcy od dawna próbowali określić pewne krytyczne warunki, przy których następuje zniszczenie materiału. Można tu wymienić np. idee Galileusza, Tresci, Beltramię, Coulomba, Mohra, Misesa czy Hubera. Przyjęli oni pewne hipotezy, określające wytrzymałość materiałów, stanowiące do dziś podstawy obliczeń inżynierskich. Zakładając jednorodność i ciągłość ośrodka, z którego został wykonany element konstrukcyjny, sformułowali graniczne wartości funkcji, po której przekroczeniu następowało zniszczenie materiału. Hipotezy te nie uwzględniały znaczącego wpływu silnych gradientów pól naprężeń i odkształceń na wytrzymałość. Rozwój teoretyczny

mechaniki ciała stałego, szczególnie teorii sprężystości, pozwolił na uzyskanie wielu rozwiązań analitycznych opisujących lokalne pola naprężeń w otoczeniu zarówno łagodnego koncentratora (np. rozwiązania Kirscha [8]), jak i koncentratorów ostrych, generujących osobliwe pola naprężeń (rozwiązania Sneddon [31], Williamsa [38]). Znajomość nowych rozwiązań matematycznych umożliwiła sformułowanie kolejnych kryteriów wytrzymałościowych uwzględniających wpływ obecności koncentratorów naprężeń w jednorodnych materiałach konstrukcyjnych (np. Griffith [6], Sih [295], McClintock [16] i inni).

W ostatnich latach zauważalny jest silny rozwój materiałów kompozytowych o z góry zaprojektowanych właściwościach mechanicznych. Są to z reguły materiały anizotropowe lub kompozyty o złożonej strukturze periodycznej, często zawierające pęknięcia, wtrącenia lub inne wady wewnętrzne wywołujące efekty miejscowego spiętrzenia naprężeń.

Typowym koncentratorem naprężeń występującym w kompozytach warstwowych jest pęknięcie [30] lub ostry karb usytuowany w płaszczyźnie łączenia poszczególnych warstw kompozytu [3, 5, 26]. Tego typu koncentraty występują także często w elementach konstrukcyjnych powstałych przez połączenie dwóch różnych materiałów za pomocą klejenia (taki element można traktować jako swoisty materiał kompozytowy). Pojawia się zatem potrzeba określenia wytrzymałości i odporności na pękanie kompozytów (z uwzględnieniem właściwości mechanicznych warstwy łączącej), w których karby strukturalne generują duże gradienty naprężeń. Rozwiązaniem tego problemu jest odpowiednio sformułowane kryterium wytrzymałościowe. Kryterium powinno zawierać precyzyjnie określone równanie wraz ze zdefiniowanymi stałymi materiałowymi, na podstawie, którego można przewidzieć moment zainicjowania procesu pękania. Prognozowaniem trwałości elementów z karbami strukturalnymi zajmowało się stosunkowo niewielu naukowców.

W pracy [12] analizowano wytrzymałość elementów dwufazowych z karbem strukturalnym. Komponenty materiałowe połączone były adhezyjnie. Autorzy wykonali badania trójpunktowego zginania i wyznaczyli wartości sił inicjujących pękanie. Możliwość zastosowania kryterium Leguillona dla tego typu elementów (elementy z karbem łączone adhezyjnie) została pozytywnie zweryfikowana w pracy [36]. Kryterium, które jest często stosowane dla materiałów jednorodnych i nie wymaga wyznaczania tak dużej ilości stałych materiałowych, jest kryterium McClintocka. Zatem głównym celem prezentowanej pracy jest eksperymentalna weryfikacja możliwości stosowania tego kryterium (z zastosowaniem właściwej modyfikacji) dla struktur bi-materiałowych, w których ostre karby strukturalne generują osobliwe pola naprężeń. Ideę kryterium opisano poniżej.

Nomenklatura

a - Wysokość karbu

b - Gradient 'naprężeń kombinowanych'

E - Moduł Younga

f_{ik}^I, f_{ik}^{II} - Współczynniki wpływu dla naprężeń

F - Obciążenie, przy którym obliczano uogólnione współczynniki intensywności naprężeń

F_k - Prognozowane obciążenie niszczące

g - Grubość próbki

h - Wysokość próbki

H_0, H_1, H_2 - Współczynniki wpływu dla równania charakterystycznego

i - Indeks materiału (=1,2)

K_E - Ekwiwalentny współczynnik intensywności naprężeń

K_{Ec} - Wartość krytyczna ekwiwalentnego współczynnika intensywności naprężeń

K_I, K_{II} - Uogólnione współczynniki intensywności naprężeń

K_{Ic} - Odporność na pękanie

L - Odległość między podporami w próbie trójpunktowego zginania

L_c - Długość próbki

n - Indeks węzłów

r, φ - Współrzędne w biegunowym układzie odniesienia

u_r, u_φ - Przeszyczenia w biegunowym układzie odniesienia

α - Kąt pomiędzy interfejsem, a krawędzią karbu w materiale 1

β - Kąt wierzchołkowy karbu

γ - Kąt pomiędzy interfejsem, a krawędzią karbu w materiale 2

Γ - Proporcja modułów odkształcenia postaciowego

δ - Część urojona wartości własnej macierzy warunków brzegowych λ

λ - Wartość własna macierzy warunków brzegowych

λ_r - Część rzeczywista wartości własnej macierzy warunków brzegowych λ

μ - Moduł odkształcenia postaciowego

ν - Współczynnik Poissona

$\sigma_\varphi, \sigma_r, \tau_{r\varphi}$ - Naprężenia w biegunowym układzie odniesienia

φ_0 - Kąt propagacji pęknięcia

ψ - Proporcja naprężeń stycznych i normalnych

2. Kryterium pękania

W kryterium zaproponowanym w pracy [16] przyjmuje się, że pękanie nastąpi w przypadku, gdy odkształcenie normalne ε_φ w pewnej małej odległości od wierzchołka szczeliny ρ_c osiągnie wartość krytyczną, co można zapisać w następujący sposób:

$$\varepsilon_\varphi(\rho_c) = \varepsilon_c \quad (1)$$

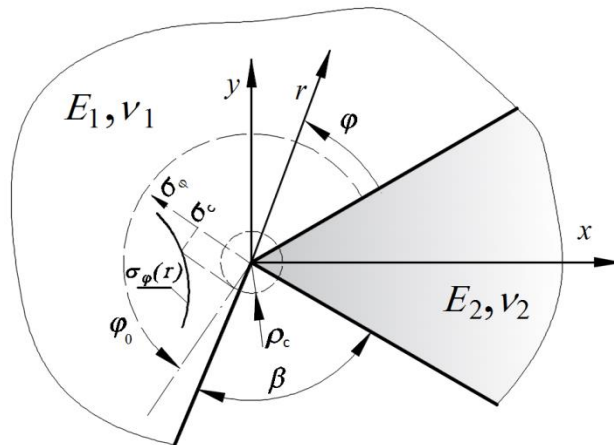
Szersze zastosowanie znalazła jednak postać naprężeniowa tego kryterium, w której odkształcenie zostało zastąpione przez odpowiednią składową naprężeń normalnych.

W podejściu zaproponowanym w pracy [23] przyjęto, że propagacja pęknięcia nastąpi wtedy, gdy naprężenia obwodowe σ_φ w pewnej skończonej odległości $r = \rho_c$ osiągną wartość krytyczną σ_c (2). Stosowanie tak sformułowanego warunku, dla elementów z karami występującymi w materiałach jednorodnych, zostało pozytywnie zweryfikowane w wielu pracach np. [27].

$$\max_\varphi \sigma_\varphi(\rho_c) = \sigma_c \quad (2)$$

Kąt propagacji pęknięcia φ_0 wyznacza się maksymalizując σ_φ względem kąta φ . W przypadku zagadnienia bi-materiału ze strukturalnym karbem, początkowo pęknięcie propaguje wzdłuż interfejsu. Zatem można z góry założyć, że $\varphi_0 = 0$ (rys.1) i warunek (2) można zapisać w następujący sposób:

$$\sigma_\varphi(\rho_c, 0) = \sigma_c \quad (3)$$



Rys. 1 Graficzna interpretacja kryterium McClintocka.

Parametr ρ_c , traktowany jest jako stała materiałowa i może być wyznaczony doświadczalnie. Na przykład, wykorzystując w warunku (3) zależność na naprężenia obwodowe przy wierzchołku szczeliny oraz kryterium Griffitha – Irwina otrzymuje się:

$$\frac{K_c}{\sqrt{2\pi\rho_c}} = \sigma_c \quad (4)$$

skąd można obliczyć krytyczny dystans:

$$\rho_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_c}{\sigma_c} \right)^2, \quad (5)$$

gdzie K_c - odporność na pękanie, σ_c - wytrzymałość na rozciąganie.

Zaletą proponowanej metody, opartej na tak zwanej teorii krytycznych dystansów (TDC), jest to, że w większości przypadków do prognozowania procesu pękania nie jest wymagana znajomość analitycznego opisu pól naprężeń- prognozowanie opiera się na rozwiązaniach numerycznych.

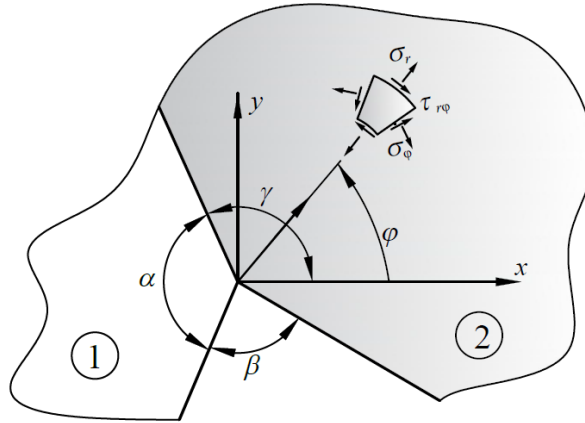
W przypadku, gdy proces pękania odbywa się w płaszczyźnie, w której występuje złożony stan naprężeń, zastosowanie rozwiązań numerycznych może spowodować błędną prognozę [13]. Najczęściej w takiej sytuacji, na podstawie analitycznego opisu lokalnych pól naprężeń, formułowane jest globalne kryterium pękania (przy użyciu lokalnego parametru) oparte na współczynniku intensywności naprężeń [27, 13, 1] lub współczynniku uwalniania energii [9].

W prezentowanej pracy, na podstawie kryterium McClintocka, zaproponowano dwie koncepcje przewidywania inicjacji procesu pękania. Pierwsza z nich oparta jest na ekwiwalentnym współczynniku intensywności naprężeń, a druga na uzależnieniu (w warunku (2)) naprężeń krytycznych od proporcji naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie pękania. Szczegółowy opis koncepcji przedstawiono w rozdziale 6.

Jak łatwo zauważyć, zastosowanie kryterium McClintocka wymaga znajomości dystrybucji pól naprężeń występujących w bliskim sąsiedztwie punktu osobliwego. W związku z tym w kolejnym rozdziale pracy podane zostaną postaci funkcji opisujących takie pola naprężeń oraz metodologia ich wyznaczania.

3. Analityczne zależności opisujące pola naprężeń w okolicy wierzchołka karbu strukturalnego.

Rozwiązanie zagadnienia bi-materiału z karbem strukturalnym usytuowanym na interfejsie (rys.2) otrzymano wykorzystując podejście zastosowane przez autorów pracy [21] dla przypadku ostrego naroża w materiale jednorodnym.



Rys. 2 Bi-materiał z karbem strukturalnym usytuowanym na interfejsie

W wykorzystanej metodzie, której dokładny opis można znaleźć w pracy [19], stosując funkcję naprężeń Airy'ego otrzymujemy się ogólne rozwiązania asymptotyczne opisujące poszczególne komponenty pól naprężeń i przemieszczeń. Dla zagadnienia karbu usytuowanego na interfejsie bi-materiału rozwiązanie ogólne przyjmuje następującą postać [18]:

$$\begin{aligned}
 u_{ri} &= r^\lambda (A_i \cos((1+\lambda)\varphi) + B_i \sin((1+\lambda)\varphi) + C_i \cos((1-\lambda)\varphi) + D_i \sin((1-\lambda)\varphi)) \\
 u_{\varphi i} &= r^\lambda \left(-A_i \sin((1+\lambda)\varphi) + B_i \cos((1+\lambda)\varphi) - C_i \frac{\kappa+\lambda}{\kappa-\lambda} \sin((1-\lambda)\varphi) + D_i \frac{\kappa+\lambda}{\kappa-\lambda} \cos((1-\lambda)\varphi) \right) \\
 \sigma_{ri} &= r^{\lambda-1} \mu \left(A_i 2\lambda \cos((1+\lambda)\varphi) + B_i 2\lambda \sin((1+\lambda)\varphi) + C_i (3-\lambda) \frac{2\lambda}{\kappa-\lambda} \cos((1-\lambda)\varphi) + D_i (3-\lambda) \frac{2\lambda}{\kappa-\lambda} \sin((1-\lambda)\varphi) \right) \\
 \sigma_{\varphi i} &= r^{\lambda-1} \mu \left(-A_i 2\lambda \cos((1+\lambda)\varphi) - B_i 2\lambda \sin((1+\lambda)\varphi) + C_i (1+\lambda) \frac{2\lambda}{\kappa-\lambda} \cos((1-\lambda)\varphi) + D_i (1+\lambda) \frac{2\lambda}{\kappa-\lambda} \sin((1-\lambda)\varphi) \right) \\
 \tau_{r\varphi i} &= r^{\lambda-1} \mu \left(-A_i 2\lambda \sin((1+\lambda)\varphi) + B_i 2\lambda \cos((1+\lambda)\varphi) + C_i (1-\lambda) \frac{2\lambda}{\kappa-\lambda} \sin((1-\lambda)\varphi) - D_i (1-\lambda) \frac{2\lambda}{\kappa-\lambda} \cos((1-\lambda)\varphi) \right)
 \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie: $\mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$ - moduł odkształcenia postaciowego, $\kappa_i = (3-\nu_i)/(1+\nu_i)$ - płaski stan

naprężenia, $\kappa_i = (3-4\nu_i)$ - płaski stan odkształcenia, ν_i - współczynnik Poissona, $i=1,2$.

Rozwiązanie szczególne otrzymuje się poprzez wyznaczenie wykładnika potęgowego λ oraz stałych A_i, B_i, C_i, D_i . Stałe wyznaczone na podstawie następujących warunków brzegowych [18]:

1. dla lewej powierzchni bocznej karbu, $\varphi = \alpha$;

$$\sigma_{\varphi 1} = \tau_{r\varphi 1} = 0$$

2. dla prawej powierzchni bocznej karbu $\varphi = -\gamma$,

$$\sigma_{\varphi 2} = \tau_{r\varphi 2} = 0$$

3. wzdłuż interfejsu, $\varphi = 0$;

$$u_{r1} = u_{r2}; u_{\varphi 1} = u_{\varphi 2}; \sigma_{\varphi 1} = \sigma_{\varphi 2}; \tau_{r\varphi 1} = \tau_{r\varphi 2}.$$

Ponadto z warunku zerowania się wyznacznika macierzy warunków brzegowych wyznaczono równanie charakterystyczne (7), którego kolejne pierwiastki wyznaczają wartości wykładnika potęgowego λ (wartości własne macierzy warunków brzegowych) w uzyskanych rozwiązaniach asymptotycznych (6)[18].

$$H_0 + \Gamma H_1 + \Gamma^2 H_2 = 0 \quad (7)$$

gdzie:

$$H_0 = (1 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 \cos[2\alpha])(1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos[2\gamma] - \cos[2\gamma\lambda])$$

$$- \kappa_1 \left(\cos[2(-\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2\alpha\lambda](-2 + 4\lambda^2 \sin[\gamma]^2) \right) + 2(\lambda^2 \sin[\gamma]^2 - \sin[\gamma\lambda]^2) \kappa_1$$

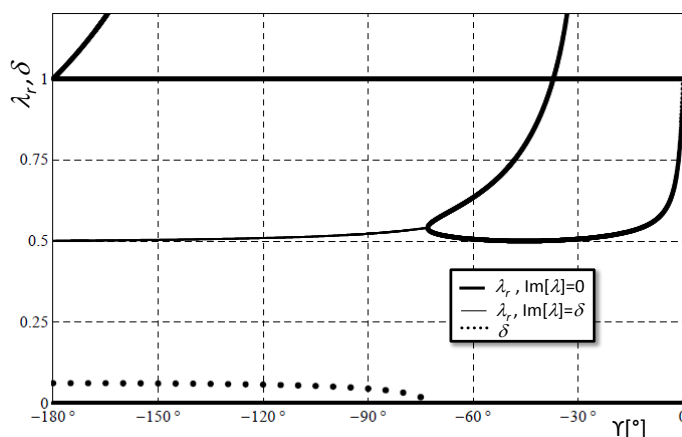
$$H_1 = 5\lambda^2 + \cos[2\alpha\lambda] + \cos[2\gamma\lambda] - 2\cos[(-\alpha + \gamma)\lambda]^2 - \lambda^2 (3\cos[2\alpha] - \cos[2(\alpha - \gamma)] + 3\cos[2\gamma] + 4\cos[2\gamma\lambda]\sin[\alpha]^2 + 4(\cos[2\alpha\lambda] + 4\lambda^2 \sin[\alpha]^2)\sin[\gamma]^2) + \kappa_2 (\cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] - \cos[2\alpha\lambda] + 2\sin[\gamma\lambda]^2 - \lambda^2 (1 + (\cos[2\alpha] + 4\cos[2\gamma\lambda]\sin[\alpha]^2 - 2\sin[\alpha]\sin[\alpha - 2\gamma]))) + \kappa_1 \left(\cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] + 4\lambda^2 \cos[\alpha]\sin[\alpha - \gamma]\sin[\gamma] + \cos[2\alpha\lambda](-1 + 4\lambda^2 \sin[\gamma]^2) + 2\sin[\gamma\lambda]^2 \right) + (\cos[2\alpha\lambda] + \cos[2\gamma\lambda] - 2\cos[(-\alpha + \gamma)\lambda]^2 + 4\lambda^2 \cos[\alpha - \gamma]\sin[\alpha]\sin[\gamma]) \kappa_2$$

$$H_2 = (1 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2 \cos[2\gamma])(1 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos[2\alpha] - \cos[2\alpha\lambda]) - \kappa_2 \left(\cos[2(-\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2(\alpha + \gamma)\lambda] + \cos[2\gamma\lambda](-2 + 4\lambda^2 \sin[\alpha]^2) \right) + 2(\lambda^2 \sin[\alpha]^2 - \sin[\alpha\lambda]^2) \kappa_2$$

$$\Gamma = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Z uzyskanego równania charakterystycznego (7) można wywnioskować, że wykładnik potęgowy zależy od stałych materiałowych i kąta wierzchołkowego karbu. Pierwiastki równania (7) nie mogą być wyznaczone analitycznie. Wyznaczono je numerycznie. W tym celu wykorzystano program obliczeniowy napisany w środowisku Mathematica 9.0.

Na rysunku 3 przedstawiono graficznie wartości własne równania (7), gdzie linią grubą zaznaczono rzeczywiste wykładniki λ ($\lambda = \lambda_r$, $\text{Im}[\lambda]=0$), linią cienką rzeczywiste wartości zespolonych wykładników λ ($\lambda_r = \text{Re}[\lambda]$, $\text{Im}[\lambda]=\delta$), natomiast linią punktową części urojone zespolonych wykładników λ ($\delta = \text{Im}[\lambda]$).



Rys. 3. Rozwiązanie równania charakterystycznego (7) dla $\Gamma = 0.033$, $\alpha = 180^\circ$, $\nu_1 = 0.37$, $\nu_2 = 0.35$, (płaski stan odkształcenia)

Z otrzymanego rozwiązania wynika, że w zależności od stałych materiałowych i geometrii karbu, istnieje jeden lub więcej członów osobliwy rozwiązania asymptotycznego o wykładniku rzeczywistym lub zespolonym. Co więcej, warto zauważyć, że dla problemu

karbu znajdującego się na interfejsie, równania charakterystyczne nie mogą być uzyskane niezależnie dla I i II sposobu obciążania [3, 5]

Otrzymano również wzory analityczne opisujące składniki pola naprężeń w okolicy wierzchołkowej. Ponieważ naprężenia mogą być opisane zespolonym wykładnikiem λ , uogólnione współczynniki intensywności naprężeń zdefiniowano podobnie jak autorzy pracy [32] (dla zagadnienia szczeliny międzyfazowej):

$$(\sigma_\varphi + i\tau_{r\varphi})_{\varphi=0} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}} \left(\frac{r}{2a}\right)^{i\delta} \cosh[\pi\delta], \quad (8)$$

gdzie wymiar a można traktować jako np. wysokość karbu.

Wykorzystując równanie (6), warunki brzegowe i przyjętą uogólnioną definicję współczynników intensywności naprężeń (8), można uzyskać analityczny opis pól naprężeń występujących w obszarze wierzchołka karbu [18]:

$$\sigma_{ik} = \frac{\cosh[\pi\delta] \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}} \left(\sin \left[\arctan \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] + \delta \log \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \operatorname{Re} [f'_{ik}] + \cos \left[\frac{K_{II}}{K_I} + \delta \log \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \operatorname{Re} [f''_{ik}] \right), \quad (9)$$

gdzie:

$$f_{rr}^I = M^{-1} \left((\lambda - 1) \cos[(1 + \lambda)\varphi] (\lambda \sin[2\epsilon] - \sin[2\epsilon\lambda]) - (1 + \lambda) (\lambda - \lambda \cos[2\epsilon] + \cos[2\epsilon\lambda] - 1) \sin[(1 + \lambda)\varphi] \right. \\ \left. + (\lambda - 3) (\lambda \sin[2\epsilon + (\lambda - 1)\varphi] + (1 + \lambda) \sin[\varphi - \lambda\varphi] - \sin[2\epsilon\lambda + \varphi - \lambda\varphi]) \right),$$

$$f_{rr}^{II} = -M^{-1} \left((1 - \lambda) (\lambda \cos[2\epsilon] + \cos[2\epsilon\lambda] - 1 - \lambda) \cos[(1 + \lambda)\varphi] + \right. \\ \left. (\lambda - 3) (-\lambda \cos[2\epsilon + (\lambda - 1)\varphi] + (\lambda - 1) \cos[\varphi - \lambda\varphi] + \cos[2\epsilon\lambda + \varphi - \lambda\varphi]) - \right. \\ \left. + (\lambda - 1) (\lambda \sin[2\epsilon] + \sin[2\epsilon\lambda]) \sin[(1 + \lambda)\varphi] \right),$$

$$f_{\varphi\varphi}^I = M^{-1} (1 + \lambda) \left((1 - \lambda) \sin[(1 + \lambda)\varphi] + \lambda \sin[2\epsilon + (\lambda - 1)\varphi] + \right. \\ \left. (1 + \lambda) \sin[\varphi - \lambda\varphi] - \sin[2\epsilon\lambda + \varphi - \lambda\varphi] - \lambda \sin[2\epsilon - (1 + \lambda)\varphi] + \sin[2\epsilon\lambda - (1 + \lambda)\varphi] \right),$$

$$f_{\varphi\varphi}^{II} = -M^{-1} \left((\lambda - 1) (-1 - \lambda + \lambda \cos[2\epsilon] + \cos[2\epsilon\lambda]) \cos[(1 + \lambda)\varphi] + (\lambda - 1) (\lambda \sin[2\epsilon] + \sin[2\epsilon\lambda]) \sin[(1 + \lambda)\varphi] \right. \\ \left. + (1 + \lambda) (\lambda \cos[2\epsilon + (\lambda - 1)\varphi] - \lambda \cos[\varphi - \lambda\varphi] + 2 \sin[\epsilon\lambda] \sin[\epsilon\lambda + \varphi - \lambda\varphi]) \right),$$

$$f_{r\varphi}^I = M^{-1} \left((1 + \lambda) (1 - \lambda + \lambda \cos[2\epsilon] - \cos[2\epsilon\lambda]) \cos[(1 + \lambda)\varphi] + \right. \\ \left. (\lambda - 1) (\lambda \cos[2\epsilon + (\lambda - 1)\varphi] - (1 + \lambda) \cos[\varphi - \lambda\varphi] + \cos[2\epsilon\lambda + \varphi - \lambda\varphi]) + \right. \\ \left. + (1 + \lambda) (\lambda \sin[2\epsilon] - \sin[2\epsilon\lambda]) \sin[(1 + \lambda)\varphi] \right),$$

$$f_{r\varphi}^{II} = M^{-1} (\lambda - 1) \left((1 + \lambda) \sin[(1 + \lambda)\varphi] - \lambda \sin[2\epsilon + (\lambda - 1)\varphi] \right. \\ \left. - (\lambda - 1) \sin[\varphi - \lambda\varphi] - \sin[2\epsilon\lambda + \varphi - \lambda\varphi] + \lambda \sin[2\epsilon - (1 + \lambda)\varphi] + \sin[2\epsilon\lambda - (1 + \lambda)\varphi] \right),$$

$$M = 2(\lambda^2 - \lambda^2 \cos[2\epsilon] + \cos[2\epsilon\lambda] - 1), \quad \epsilon = \alpha \text{ -dla materiału 1 i } \epsilon = -\gamma \text{ dla materiału 2.}$$

Poniżej podano szczególną postać pól naprężeń dla kąta $\varphi=0$, czyli wzdłuż linii interfejsu.

$$\sigma_{\varphi 1,2 \varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} r^{\lambda_r - 1} \cos \left[\arctan \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] + \delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \cosh[\pi\delta], \\ \tau_{r\varphi 1,2 \varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} r^{\lambda_r - 1} \sin \left[\arctan \left[\frac{K_{II}}{K_I} \right] + \delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \cosh[\pi\delta], \quad (10)$$

W sytuacji, gdy wykładnik λ opisany jest liczbą rzeczywistą wzory (10) uproszczą się do następującej postaci:

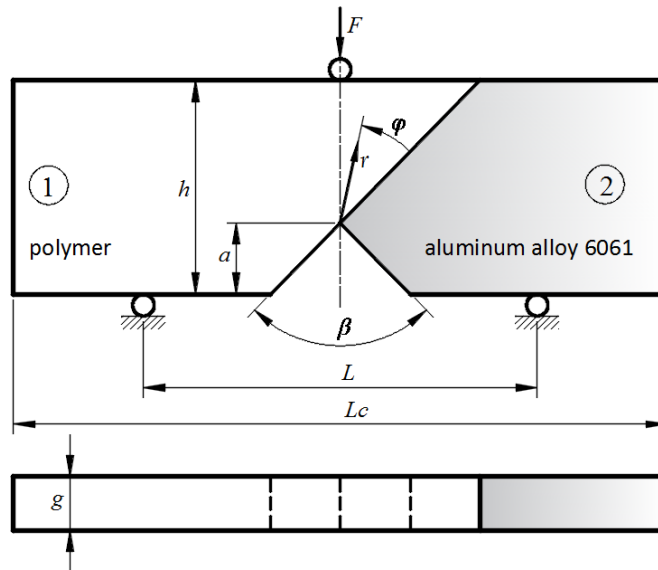
$$\sigma_{\varphi 1,2 \varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_I r^{\lambda_r - 1}, \quad \tau_{r\varphi 1,2 \varphi=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K_{II} r^{\lambda_r - 1}. \quad (11)$$

Do ilościowego opisu naprężeń niezbędne jest wyznaczenie wartości współczynników K_j . Wyznaczono je na podstawie porównania uzyskanych rozwiązań analitycznym z

naprężeniami otrzymanymi z rozwiązania MES. W związku z tym, że głównym celem prezentowanej pracy była eksperymentalna weryfikacja możliwości stosowania kryterium McClintocka, wykonano modele MES próbek, których wytrzymałość została zbadana doświadczalnie w pracy [11,12].

4. Próbkki badawcze i model MES

W symulacjach numerycznych modelowano próbki, których geometria i właściwości materiałowe były identyczne jak próbek użytych w badaniach eksperymentalnych opisanych w pracy [11, 12].



Rys. 4 Geometria i sposób obciążenia próbek z karbem strukturalnym.

Analizowano dwa rodzaje próbek:

- element 1 wykonany z PC (Poliwęglanu) oraz komponent 2 ze stopu aluminium 6061;
- element 1 wykonany z PMMA (Poli (metakrylan metylu)), natomiast komponent 2 ze stopu aluminium 6061.

Komponenty zostały sklejone za pomocą kleju Weld-on® 10. Klej został tak dobrany, aby jego właściwości sztywnościowe były zbliżone do właściwości polimerów. Dzięki temu możliwe było spełnienie założenia, że modelowany jest bi-materiał, a nie kompozyt trójwarstwowy. W takiej sytuacji interfejs klejowy można było potraktować, jako warstwę bez żadnej grubości, ale o różnej wytrzymałości i odporności na kruche pękanie niż polimery lub stop aluminium rozpatrywane oddzielnie.

Aby uzyskać minimalną grubość kleju, próbki zostały połączone pod wysokim ciśnieniem za pomocą specjalnego uchwytu. Pozostawiono je do utwardzenia na okres 24 godzin, aby uzyskać wymaganą wytrzymałość. Grubość warstwy klejącej nie została zmierzona. Takie informacje nie były potrzebne do prognozowania odporności na kruche pękanie, przy założeniu, że analizowana struktura jest bi-materiałem. Warto zauważyć, że stosując wybrany klej w przypadku, gdy łączone byłyby dwa różne stopy metali np. stal i stop aluminium, pominięcie grubości warstwy kleju i traktowanie takiej struktury, jako bi-materiał byłoby niedopuszczalne. W takim przypadku do przewidywania obciążenia krytycznego można wykorzystać podejście oparte o kryterium Traction-Separation [25]. Mianowicie warstwa kleju powinna być modelowana przy użyciu specjalnych elementów skończonych (cohesive elements).

Wykonane analizy miały na celu określenie możliwości zastosowania zaproponowanego kryterium pękania dla struktur bi-materiałowych w sytuacji, gdy w

płaszczyźnie pęknięcia (na interfejsie) występuje złożony stan naprężeń, a karb strukturalny generuje osobliwe pola naprężeń. Przy czym pola naprężeń, w zależności od cech geometryczno-materiałowych struktury, opisane mogą być za pomocą rzeczywistych lub zespolonych wykładników potęgowych λ . W badaniach wykorzystano próbki o różnym kącie wierzchołkowym karbu. Kąty wierzchołkowe β dobrano w ten sposób, żeby uzyskać przypadki, gdy naprężenia opisane są zarówno rzeczywistym jak i zespolonym wykładnikiem potęgowym λ . Co więcej zmienność kątów wierzchołkowych pozwoliła uzyskać różne proporcje naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie połączenia. We wszystkich próbkach przyjęto jednakową wysokość karbu (mierzoną od dolnej powierzchni próbki), wymiary gabarytowe oraz położenie punktów podparcia i obciążania w próbie trójpunktowego zginania. Miało to na celu zapewnienie jednakowych warunków brzegowych (mocowania i obciążania) dla wszystkich badanych próbek. Wymiary gabarytowe dobrano arbitralnie uwzględniając możliwości stanowiska badawczego oraz przyrządu wykorzystywanego do klejenia.

Wymiary próbek wynosiły odpowiednio: długość całkowita $L_c=254$ mm, odległość między podporami $L=90$ mm, wysokość karbu $a=19.1$ mm, wysokość próbki $h=50.8$ mm, grubość $g=5.4$ mm. Analizowano trzy rodzaje próbek, o różnym kącie wierzchołkowym karbu strukturalnego: $\beta=30^\circ$, $\beta=90^\circ$ i $\beta=120^\circ$. Próbki użyte w badaniach przedstawiono w tabeli 1. Dane materiałowe poszczególnych komponentów podano w tabeli 2.

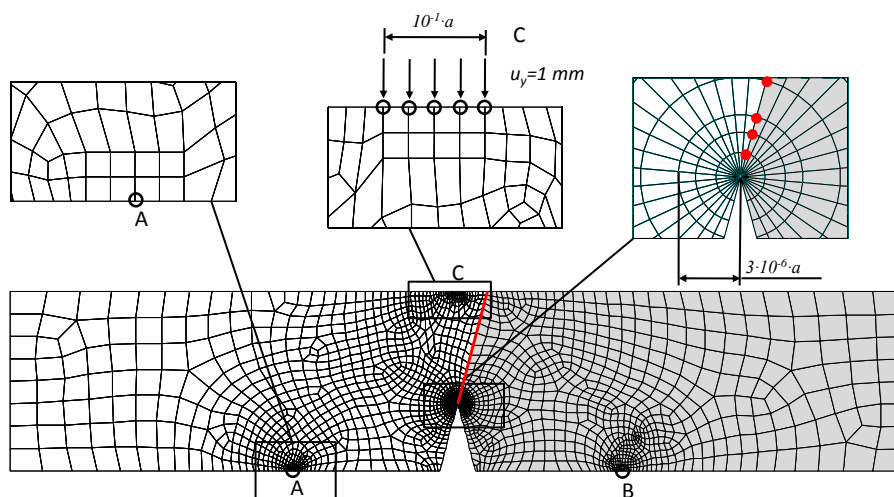
Tab. 1 Próbki badawcze

Lp.	próbki badawcze	kąt wierzchołkowy karbu $\beta [^\circ]$
1	PC/ stop aluminium 6061	30
2	PC/ stop aluminium 6061	90
3	PC/ stop aluminium 6061	120
4	PMMA/ stop aluminium 6061	30
5	PMMA/ stop aluminium 6061	90
6	PMMA/ stop aluminium 6061	120

Tab. 2 Właściwości mechaniczne poszczególnych komponentów próbek [12]

	moduł Younga E [GPa]	Współczynnik Poissona ν
stop aluminium 6061	70	0.35
PC	2.38	0.37
PMMA	3.79	0.37

Badane próbki (rys.4) zamodelowano za pomocą MES, wykorzystując program ANSYS. Na rysunku 5 pokazano, dla wybranej próbki, podział na elementy skończone oraz warunki brzegowe.



Rys. 5. Podział na elementy skończone oraz warunki mocowania i obciążenia próbki z karbem o kącie wierzchołkowym $\beta=30^{\circ}$, kolorem czerwonym zaznaczono węzły, z których naprężenia zostały wykorzystane do obliczenia współczynników intensywności naprężeń

Płaskie próbki opisano siatką czworokątnych, ośmiowęzłowych elementów skończonych, o zwiększonym zagęszczeniu w okolicy wierzchołkowej, z trójkątnymi elementami specjalnymi [35] otaczającymi punkt osobliwy (rys. 5). Całkowita długość bocznych krawędzi ostatnich trzech elementów zależała od wysokości karbu a i założono, że wynosi $3 \cdot 10^{-6} a$ dla wszystkich próbek. Ze względu na dużą gęstość siatki elementów skończonych w obszarze wierzchołkowym karbu, przygotowane modele zawierały około 10000 elementów skończonych. Jak już wspomniano wcześniej, próbki można traktować jako strukturę bi-materiałową. Dlatego warstwa adhezyjna nie została uwzględniona w przygotowanych modelach numerycznych. Jeśli chodzi o warunki połączenia poszczególnych komponentów, to węzły leżące na interfejsie były wspólne dla obydwu materiałów (nie ma możliwości poślizgu między komponentami na interfejsie).

Ze względu na fakt, że ciężko jest określić rzeczywiste warunki tarciowo-kontaktowe, między podporami a materiałem próbki, jakie występują podczas próby trójpunktowego zginania należało przyjąć pewne uproszczenia. Zatem przetestowano dwa sposoby zamocowania:

- I) podpory przesuwne (odebrana możliwość przemieszczenia pionowego w węzłach usytuowanych w punktach podparcia A i B);
- II) podpory nieprzesuwne (odebrana możliwość przemieszczenia pionowego i poziomego w węzłach usytuowanych w punktach podparcia A i B).

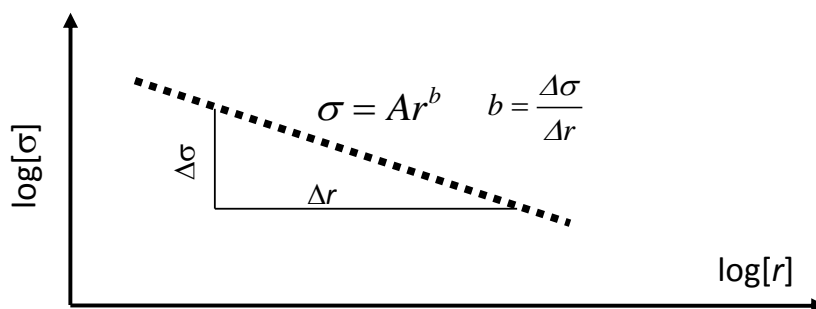
Co się tyczy warunków obciążenia, to próbki obciążano stałym przemieszczeniem pionowym $u_y = 1\text{mm}$, aplikowanym w wybranych węzłach (punkt C). Siła obciążająca F została określona na podstawie naprężeń w węzłach, w których aplikowano przemieszczenie u_y . Obliczenia numeryczne wykonano dla dwóch przypadków stanu naprężeń: płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia.

Jak już wspomniano wcześniej, w modelach *MES* klej, jako oddzielna warstwa materiału, nie został uwzględniony. Mimo to możliwe było uwzględnienie właściwości wytrzymałościowych interfejsu w zastosowanym kryterium pęknięcia. Na podstawie symulacji numerycznych wyznaczono współczynniki intensywności naprężeń. Wykorzystano je do obliczenia wartości przewidywanej funkcji zniszczenia (opisanej dalszej części pracy), którą następnie porównano z wartościami krytycznymi. Właściwości wytrzymałościowe interfejsu w badanych próbkach zostały uwzględnione w ten sposób, że wartości krytyczne funkcji zniszczenia i parametru ρ_c zostały określone w oparciu o wytrzymałość na rozciąganie i

odporność na pękanie warstwy adhezyjnej (Tab. 3). Oba parametry zostały określone eksperymentalnie dla bi-materiałów wykonanych z PMMA i stopu aluminium, a także PC i stopu aluminium.

5. Opis metody wykorzystanej do wyznaczania uogólnionych współczynników intensywności naprężeń

Do wyznaczenia wartości współczynników K_j wykorzystano metodę ekstrapolacji. Metoda ta, w przeciwieństwie np. do metod energetycznych [37] czy też metod opartych na stosowaniu specjalnych elementów skończonych [4], jest mniej skomplikowana. Wadą tej metody jest konieczność stosowania dużego zagęszczenia siatki podziału na elementy skończone w okolicy wierzchołkowej koncentratora naprężeń. Dodatkowo na dokładność wyników ma wpływ wybór obszaru, w którym porównywane jest rozwiązanie numeryczne z analitycznym. Niedogodność tą można wyeliminować poprzez użycie w opisie analitycznym członów wyższych rzędów [17, 33, 24] lub ustalenie odpowiedniego kryterium wyboru węzłów, dla których wartości naprężeń otrzymane z MES porównuje się ze znanym rozwiązaniem analitycznym. Kryterium takie, określono w pracach [20] (dla zagadnienia szczeliny międzyfazowej) oraz [18] (dla karbu strukturalnego). Jak powszechnie wiadomo, jeżeli wykres naprężeń typu $\sigma = Ar^b$ -w układzie podwójnie logarytmicznym jest liniowy (rys. 6), to gradient naprężeń wynosi b .



Rys. 6. Graficzna interpretacja osłabionych pól naprężeń o teoretycznym gradientie b

Zatem, wyznaczając współczynniki intensywności naprężeń, porównuje się rozwiązania numeryczne i analityczne tylko dla węzłów o gradientie równym b .

Dla zagadnienia karbu strukturalnego, składowe naprężenia zawsze uzależnione są jednocześnie od współczynników K_I i K_{II} , w związku z tym, aby skorzystać z powyższego kryterium, konieczne jest określenie tzw. 'naprężeń kombinowanych' [18]:

$$\sigma_{1(r,0)} = \text{Sech}[\pi\delta] \left(\sigma \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] + \tau \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \right) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}}, \quad (12)$$

$$\sigma_{2(r,0)} = \left(\tau \cos \left[\delta \log \left[\frac{r}{2a} \right] \right] - \sigma \sin \left[\delta \log \left[\frac{r}{2a} \right] \right] \right) \text{Sech}[\pi\delta] = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}}, \quad (13)$$

gdzie- σ, τ to odpowiednio naprężenia obwodowe i styczne uzyskane z MES.

Zgodnie z przyjętym kryterium przy wyznaczaniu poszukiwanych współczynników pod uwagę brano tylko pary węzłów gradientie naprężeń $b = (\lambda_r - 1) \pm 0.01$.

'Naprężenia kombinowane' $\sigma_{i(r,0)}$ w odległości r_n i r_{n+1} od wierzchołka karbu można zapisać w następujący sposób:

$$\sigma_{j(n,0)} = \frac{K_{j(r)}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}} (1 + cr_n), \sigma_{j(n+1,0)} = \frac{K_{j(r)}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_r}}} (1 + cr_{n+1}). \quad (14)$$

Wykorzystując zależności (12÷14) po prostych przekształceniach matematycznych otrzymuje się wzory (15) umożliwiające wyznaczenie współczynników $K_{j(r)}$ (w pewnej odległości od wierzchołka karbu):

$$\begin{aligned}
 K_{I(r)} &= \frac{\sqrt{2\pi} (r_n r_{n+1})^{1-\lambda_r}}{r_n - r_{n+1}} \operatorname{sech}[\pi\delta] \left(\begin{array}{l} r_n^{\lambda_r} \left(\sigma_{(r_{n+1})} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] + \tau_{(r_{n+1})} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] \right) \\ -r_{n+1}^{\lambda_r} \left(\sigma_{(r_n)} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] + \tau_{(r_n)} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] \right) \end{array} \right) \\
 K_{II(r)} &= \frac{\sqrt{2\pi} (r_n r_{n+1})^{1-\lambda_r}}{r_n - r_{n+1}} \operatorname{sech}[\pi\delta] \left(\begin{array}{l} r_n^{\lambda_r} \left(\tau_{(r_{n+1})} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] - \sigma_{(r_{n+1})} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_{n+1}}{2a} \right] \right] \right) \\ -r_{n+1}^{\lambda_r} \left(\tau_{(r_n)} \cos \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] - \sigma_{(r_n)} \sin \left[\delta \ln \left[\frac{r_n}{2a} \right] \right] \right) \end{array} \right)
 \end{aligned} \quad (15)$$

Obliczone współczynniki, dla wyselekcjonowanych węzłów, za pomocą wzoru (15) aproksymuje się linią prostą i w ten sposób wyznacza się uogólnione współczynniki intensywności naprężeń $K_{j(r=0)}$.

Warto zauważyć, że przypadku, gdy wykładnik potęgowy λ jest liczbą rzeczywistą ($\delta = 0$) zależność (15) upraszcza się do postaci przedstawionej w pracy [14].

$$K_I = \frac{\sqrt{2\pi} (r_n r_{n+1})^{1-\lambda_r} (r_{n+1}^{\lambda_r} \sigma_{(r_n)} - r_n^{\lambda_r} \sigma_{(r_{n+1})})}{r_{n+1} - r_n} \quad (16)$$

6. Wyniki badań oraz ich dyskusja

Jak już wspomniano do zweryfikowania zmodyfikowanego kryterium McClintocka niezbędna jest znajomość jakościowego i ilościowego opisu pól naprężeń występujących w płaszczyźnie pęknięcia, parametrów krytycznych i danych eksperymentalnych (obciążenie niszczące). Obciążenia niszczące zaczerpnięto z prac [11, 12]. Ponieważ po zainicjowaniu procesu pęknięcia pęknięcie propagowało wzdłuż interfejsu, to w testowanym kryterium użyto parametrów krytycznych charakteryzujących właściwości warstwy adhezyjnej, dla których określono długość strefy zniszczenia ρ_c , zgodnie ze wzorem (5). Metody wyznaczania krytycznych parametrów warstwy adhezyjnej omówiono w pracach [7, 10, 22, 25].

Tab. 3. Właściwości wytrzymałościowe warstwy adhezyjnej [10]

	wytrzymałość na rozciąganie σ_c [MPa]	odporność na pęknięcie K_{Ic} [MPa m ^{0.5}]	dystans krytyczny ρ_c [mm]
PC/ stop aluminium 6061	11.35	0.24	0.071
PMMA/ stop aluminium 6061	12.85	0.28	0.075

W celu określenia ilościowego opisu pól mechanicznych, obliczono uogólnione współczynniki intensywności naprężeń K_j . Wyznaczone je numerycznie metodą ekstrapolacji, wykorzystując dane uzyskane z MES i rozwiązania analityczne. Metodę ekstrapolacji, modelowanie MES i rozwiązanie analityczne przedstawiono i omówiono w wcześniejszych częściach pracy. Wartości obliczonych współczynników przedstawiono w tabelach 4-5.

Tab. 4 Wartości uogólnionych współczynników intensywności naprężeń K_j oraz obciążania F , przy którym obliczano współczynnik K_j

PC /stop aluminium 6061

Warunki podparcia						
β [°]	podpory przesuwne			podpory nieprzesuwne		
	K_I [Pa m ^{1-λ_r}]	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r}]	F [N]	K_I [Pa m ^{1-λ_r}]	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r}]	F [N]
30	6621327.4*	16207.8*	4139.0*	2670172.3*	334892.9*	5598.9*
	5654415.8**	565904.7**	3508.3**	2337935.8**	576351.2**	4718.3**
90	6953117.8*	-2675922.6*	3532.6*	2654647.7*	-1281221.0*	5071.6*
	7929593.6**	-1851771.4**	3004.2**	3089615.1**	-622169.7**	4276.7**
120	3224964.6*	-4631416.6*	3345.1*	1156739.9*	-1821056.5*	5001.9*
	3206237.2**	-6451442.2**	2853.9**	1185145.1**	-2538667.0**	4225.0**
*-płaski stan odkształcenia, ** - płaski stan naprężenia						

Tab. 5 Wartości uogólnionych współczynników intensywności naprężeń K_j oraz obciążania F , przy którym obliczano współczynnik K_j

PMMA/stop aluminium 6061

Warunki podparcia						
β [°]	podpory przesuwne			podpory nieprzesuwne		
	K_I [Pa m ^{1-λ_r}]	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r}]	F [N]	K_I [Pa m ^{1-λ_r}]	K_{II} [Pa m ^{1-λ_r}]	F [N]
30	10590286.9*	88797.8*	6510.0*	4304874.73*	466048.7*	8818.2*
	9092521.1**	449519.4**	5522.1**	3774299.6**	845462.9**	7435.5**
90	15655266.1*	-8259321.6*	5572.9*	6032440.86*	-1915526.6*	8002.9*
	13838295.9**	4731359.1**	4742.3**	5427305.2**	578767.5**	6753.4**
120	4796910.9*	-6494991.4*	5279.8*	1798019.9*	-2641592.9*	7892.7*
	4040648.9**	-6507052.4**	4507.1**	1525983.9**	2594161.8**	6671.4**
*-płaski stan odkształcenia, ** - płaski stan naprężenia						

Wartości wykładników potęgowych λ , otrzymane z równania (7), dla stałych materiałowych podanych w tabeli 2, zestawiono w tabeli 6.

Tab. 6 Wartości wykładników potęgowych λ

Typ próbki				
β [°]	PC /stop aluminium 6061		PMMA/stop aluminium 6061	
	λ_r	δ	λ_r	δ
30	0.5032*	0.0611*	0.5051*	0.0579*
	0.5033**	0.0958**	0.5052**	0.0913**
90	0.5222*	0.0450*	0.5339*	0.0235*
	0.5231**	0.0810**	0.5352**	0.0646**
120	0.5058*	0*	0.5003*	0*
	0.5324**	0**	0.5071**	0**
*-płaski stan odkształcenia, ** - płaski stan naprężenia				

Jak już wspomniano, jeżeli w płaszczyźnie pęknięcia występują zarówno naprężenia styczne, jak i normalne, w celu prognozowania procesu pęknięcia można zastosować ekwiwalentny współczynnik intensywności naprężeń K_E . Dla analizowanego przypadku został on określony (na podstawie analitycznego opisu lokalnych pól naprężeń) za pomocą wzoru (17):

$$K_E = \cosh(\pi\delta) \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}, \quad (17)$$

Krytyczną wartość współczynnika K_{Ec} można wyznaczyć poprzez rozwiązanie poniższego układu równań (18):

$$\frac{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}{\sigma_c} = 1, \left(\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0, r=\rho_c} = 0. \quad (18)$$

Po rozwiązaniu układu równań (18) – z wykorzystaniem wzorów (5), (9) i (10) uzyskuje się zależność, pozwalającą wyznaczyć wartość krytycznego współczynnika K_{Ec} (19):

$$K_{Ec} = (2\pi)^{\lambda_r - \frac{1}{2}} \left(\frac{K_{lc}^2}{\sigma_c^2} \right)^{1-\lambda_r} \sigma_c. \quad (19)$$

Warto zauważyć, że dla przypadku rozciąganego elementu ze szczeliną ($\lambda_r = 0.5$) lub z karbem, o kącie wierzchołkowym równym π ($\lambda_r = 1$), zależność (19) upraszcza się odpowiednio do następujących postaci: $K_{Ec} = K_{lc}$; $K_{Ec} = \sqrt{2\pi} \sigma_c$, co jest zgodne z danymi literaturowymi.

Zakładając, że proces pęknięcia zostanie zainicjowany, w sytuacji, gdy:

$$K_E = K_{Ec}, \quad (20)$$

przewidywana siła krytyczna może być obliczona na podstawie następującego warunku:

$$F_k = \frac{K_{Ec} F}{K_E}, \quad (21)$$

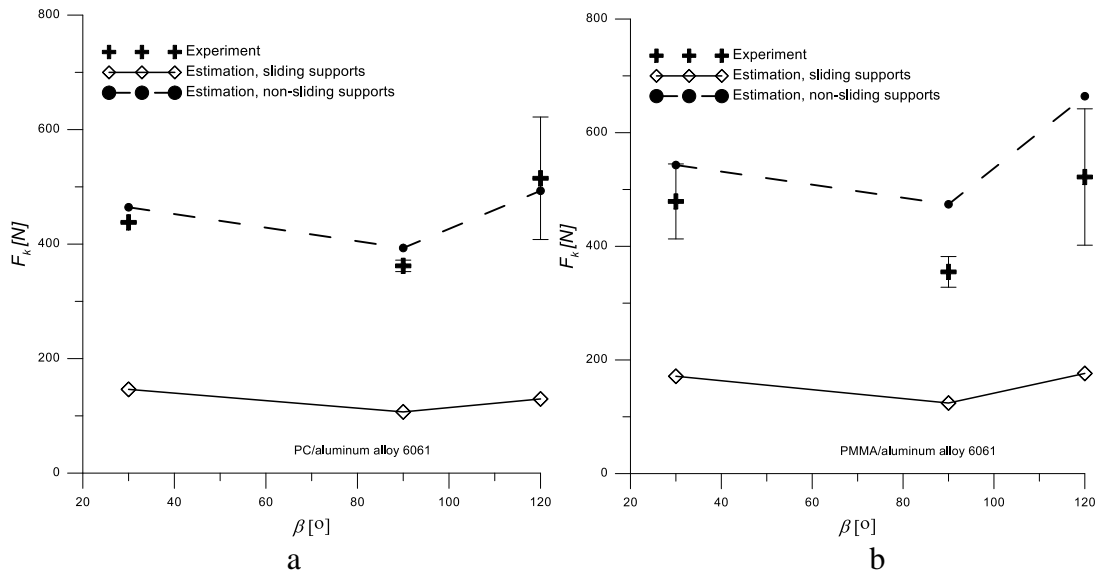
gdzie F jest obciążeniem, przy którym obliczano ekwiwalentny współczynnik intensywności naprężeń K_E (17).

Jak już wspomniano wcześniej, trudno jest odzwierciedlić rzeczywiste warunki tarciowo- kontaktowe [2, 15] występujące w miejscu podparcia przy numerycznym modelowaniu trójpunktowej próby zginania. Dlatego też na rysunku 7 (dla płaskiego stanu naprężenia) i tabela 7 (dla płaskiego stanu odkształcenia) podano wartości prognozowanych sił F_k (21) określonych dla dwóch wariantów zamocowania próbek w modelach MES. Oczywiście jest fakt, że rzeczywista siła krytyczna przyjmie wartości z zakresu ograniczonego przez siły oszacowane przy stosowaniu podparcia przesuwne i nieprzesuwne.

Tab. 7 Wartości sił krytycznych F_k (21) obliczone dla różnych typów próbek, płaski stan odkształcenia

β [°]	PC/ stop aluminium 6061		PMMA/ stop aluminium 6061	
	experiment [12]	estimation (21)	experiment [12]	estimation (21)
30	438±1	151.9* 505.7**	479±66	177.7* 588.6**
90	362±10	139.2* 403.3**	355±27	121.3* 487.2**
120	515±107	150.3* 587.9**	522±120	183.6* 693.6**

*- podpory przesuwne, **- podpory nieprzesuwne

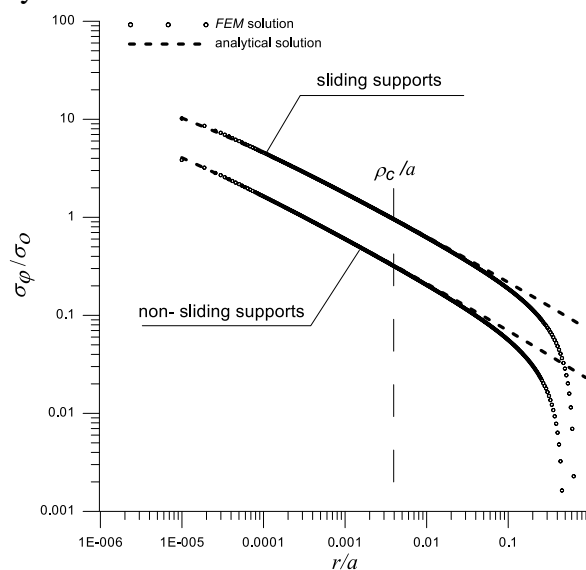


Rys. 7 Porównanie krytycznych wartości obciążeń, uzyskanych z testowanych kryteriów z wartościami otrzymanymi z badań eksperymentalnych [12], a) PC/ stop aluminium 6061, b) PMMA/ stop aluminium 6061, płaski stan naprężenia

Wartości sił krytycznych określone za pomocą wzoru (21) zostały porównane z danymi eksperymentalnymi, co pokazano na rys. 7 i w tabeli 6. Eksperymentalne obciążenie inicjujące proces pęknięcia jest średnią wartością siły niszczącej określonej na podstawie, co najmniej trzech prób wykonanych dla każdego typu próbek.

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że rozkład prognozowanych sił krytycznych jest zgodny z danymi eksperymentalnymi. Lepszą zbieżność wyników, zarówno dla płaskiego stanu naprężenia, jak i odkształcenia, uzyskano przy zastosowaniu w modelach MES podpór nieprzesuwnych.

Przy określaniu sił krytycznych w opisie analitycznym użyto tylko pierwszego członu osobliwego rozwiązania asymptotycznego. Używanie członów wyższych rzędów nie było konieczne ze względu na fakt, że rozwiązania analityczne (przy użyciu tylko pierwszego członu osobliwego) i numeryczne zgadzały się ze sobą w obszarze większym niż krytyczny dystans ρ_c , co pokazano na rysunku 8.



Rys. 8 Unormowane naprężenia obwodowe w funkcji r/a dla próbki PC/ stop aluminium 6061specimen z kątem wierzchołkowym $\beta= 30^0$, $\sigma_0 = 3FL/(2gh^2)$, płaski stan naprężenia

Warto zauważyć, że prognozowanie odporności na kruche pękanie za pomocą koncepcji ekwiwalentnego współczynnika intensywności naprężeń jest dość skomplikowane. Konieczne jest bowiem wyznaczenie wykładników λ i uogólnionych współczynników intensywności naprężeń K_j . W przypadku materiałów jednorodnych nie stanowi to poważnego problemu, ponieważ w literaturze dostępne są przybliżone formuły, które pozwalają na obliczenie uogólnionych współczynników intensywności naprężeń, a wykładnik λ zależy tylko od kąta wierzchołka karbu i można go łatwo określić (wartości wykładników można znaleźć np. w pracy [28]). W przypadku bi-materiału z karbem usytuowanym na interfejsie, zarówno K_j , jak i λ zależą od cech geometryczno- materiałowych struktury i powinny być wyznaczone indywidualnie dla każdego analizowanego przypadku. Ze względu na powyższe niedogodności, w artykule podjęto próbę opracowania procedury prognozowania odporności na kruche pękanie, która może być bardziej praktyczna z inżynierskiego punktu widzenia.

Autorzy wielu prac, np. [30] wskazują, że krytyczna wartość współczynnika uwalniania energii (dla zagadnienia bi-materiału) zależy od proporcji naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie pęknięcia. Dlatego też wartości krytyczne σ_c również muszą być uzależnione od takiego czynnika. W związku z tym warunek (3) można zapisać w następujący sposób (22):

$$\sigma_\varphi(\rho_c, 0) = \sigma_c(\psi) \quad (22)$$

Biorąc pod uwagę wzajemne zależności między poszczególnymi parametrami mechaniki pęknięcia zaproponowano następującą formę funkcji uzależniającej naprężenia krytyczne od proporcji naprężeń stycznych i normalnych ψ :

$$\sigma_c(\psi) = \sigma_c / \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (23)$$

gdzie: $\psi = \frac{\tau_{r\varphi}(\rho_c, 0)}{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}$.

Warto zauważyć, że zaproponowana modyfikacja kryterium pęknięcia (23) jest zbieżna z koncepcją przedstawioną w pracy [34]. Autor pracy [34] sugeruje zastosowanie, w procesie prognozowania inicjacji pęknięcia, dodatkowego współczynnika, uwzględniającego wpływ ilościowego udziału naprężeń stycznych i normalnych. Współczynnik ten nie jest stały i zależy od geometrii elementu i warunków obciążeniowych. Wartość siły krytycznej, wykorzystując kryterium (23), można obliczyć z zależności (24):

$$F_k = \frac{\sigma_c(\psi)F}{\sigma_\varphi(\rho_c, 0)}. \quad (24)$$

Siła krytyczna F_k (24) może być określona na dwa sposoby:

- przy wykorzystaniu zarówno rozwiązań analitycznych (opis jakościowy (9, 10)), jak i numerycznych (opis ilościowy (15));
- przy wykorzystaniu tylko rozwiązania numerycznego (określenie naprężeń $\tau_{r\varphi}(\rho_c, 0)$ i $\sigma_\varphi(\rho_c, 0)$ np. przy użyciu MES).

Oczywiście sposób drugi, z praktycznego punktu widzenia, jest mniej skomplikowany i zalecany do stosowania w obliczeniach inżynierskich.

Jednak w prezentowanej pracy zastosowano podejście pierwsze. Podyktowane to było koniecznością sprawdzenia zbieżności rozwiązań uzyskiwanych ze wzorów (21) i (24). Ze względu na fakt, że siły krytyczne (21) zostały oszacowane przy użyciu rozwiązań analitycznych i numerycznych, to identyczne podejście powinno zostać użyte przy prognozowaniu z wykorzystaniem zależności (24). W związku z tym wykorzystując rozwiązania analityczne i numeryczne wyznaczono siły krytyczne F_k (24) dla wszystkich analizowanych próbek. Uzyskane wyniki były identyczne z wynikami uzyskanymi na

podstawie wzoru (21) i w związku z tym nie było potrzeby zamieszczenia ich w prezentowanej pracy.

7. Podsumowanie i wnioski

W pracy analizowano proces inicjacji pęknięć w strukturze bi-materiałowej z karbem usytuowanym na interfejsie. Zweryfikowano możliwość zastosowania kryterium McClintocka do prognozowania odporności na pęknięcia tego typu elementów konstrukcyjnych. Stosowanie tego kryterium wymaga znajomości ilościowego i jakościowego opisu pól naprężeń wokół wierzchołka koncentratora. Zatem uzyskano opis analityczny i przedstawiono metodykę jego otrzymywania. Ponadto omówiono metodę wyznaczania uogólnionych współczynników intensywności naprężeń, uwzględniającą jakościowy charakter osobliwości pól generowanych przez karb strukturalny, i dla wybranych przypadków wyznaczono ich wartości.

Uzyskane rozwiązania analityczne i numeryczne pozwoliły na sformułowanie postaci kryterium pęknięcia i parametrów kryterialnych. Opracowano dwie postaci kryterium pęknięcia, oparte na:

- ekwiwalentnym współczynniku intensywności naprężeń;
- wprowadzeniu modyfikacji w kryterium McClintocka polegającej na uzależnieniu naprężeń krytycznych od proporcji naprężeń stycznych i normalnych występujących w płaszczyźnie pęknięcia.

Wykonane analizy pokazały, że z obydwu postaci kryterium pęknięcia uzyskuje się identyczne wyniki prognozowania sił krytycznych. Jednak praktycznego punktu widzenia, druga postać kryterium pęknięcia jest korzystniejsza. Wynika to z faktu, że w prognozowaniu pęknięcia można wykorzystać tylko naprężenia wyznaczone np. za pomocą *FEM* bez konieczności wyznaczania współczynników intensywności naprężeń.

Wartości obciążeń krytycznych wynikających z hipotez porównano z wartościami uzyskanymi z badań eksperymentalnych. Ze względu fakt, że przy modelowaniu numerycznym próby trójpunktowego zginania nie można odzwierciedlić rzeczywistych warunków tarciowo-kontaktowych, jakie występują w miejscu podparcia próbek, wyznaczono jedynie przedział, w którym znajdują się prognozowane siły krytyczne. W zdecydowanej większości analizowanych przypadków siły krytyczne wyznaczone eksperymentalnie znajdowały się w przedziale określonym za pomocą testowanego kryterium. Co więcej, trend zmienności prognozowanych sił zgadzał się z danymi eksperymentalnymi. Pozwala to sądzić, że analizowane kryterium może być stosowane do prognozowania inicjacji procesu pęknięcia elementów z karbem usytuowanym na interfejsie. Jednak w celu jednoznacznego stwierdzenia takiego faktu, należałoby wykonać dodatkowe badania eksperymentalne. Takie badania powinny być zaplanowane w ten sposób, żeby można było w modelowaniu numerycznym odzwierciedlić rzeczywiste warunki mocowania i obciążenia próbek badawczych. Wykonanie takich badań i ponowne zweryfikowanie przydatności hipotezy McClintocka będzie celem kolejnej pracy autora.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr S/WM/2/13 i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.

References

1. Ayatollahi M.R., Torabi A.R. A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics* 2009; 39: 1883–1896.

2. Baranowski P., Damaziak K., Małachowski J. Brake system studies using numerical methods, *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2013; 15 (4): 337–342.
3. Bogy D.B., Wang K.C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. *International Journal of Solids and Structures* 1971; 1: 993-1005.
4. Byskov E. Calculation of stress intensity factors using finite element method with cracked elements. *International Journal of Fracture Mechanics* 1970; 6(2): 59-167.
5. Carpinteri, A., Paggi M. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems. *Engineering Fracture Mechanics* 2007; 74: 59–74.
6. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions series A* 1920; 221: 163-198.
7. Kinloch A. J. *Adhesion and adhesives, Science and Technology*. London: Springer, 1987.
8. Kirsch G. Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre. *Verein deutscher Ingenieure Zeitschrift* 1898; 29: 797-807.
9. Knesl Z., Klusak J., Nahlik L. Crack initiation criteria for singular stress concentrations, Part I: A Universal assessment of singular stress concentrations, *Engineering Mechanics* 2007; 14(6): 399–408.
10. Krishnan A., Xu LR. Systematic evaluation of bonding strengths and fracture toughness of adhesive joints. *The Journal of Adhesion* 2011; 87(1): 53–71.
11. Krishnan A, Xu LR. Experimental studies on the interaction among cracks, notches and interfaces of bonded polymers. *International Journal of Solids and Structures* 2013, 50: 1583–1596.
12. Krishnan A., Roy Xu L. An experimental study on the crack initiation from notches connected to interfaces of bonded bi-materials. *Engineering Fracture Mechanics* 2013; 111: 65–76.
13. Leguillon D. A criterion for crack nucleation at a notch in homogeneous materials. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB – Mechanics* 2001; 329(2): 97–102.
14. Li Y., Song M. Method to calculate stress intensity factor of V-notch in bi-materials. *Acta Mechanica Solida Sinica* 2008; 21(4): 337–346.
15. Łukaszewicz A. Nonlinear numerical model of heat generation in the rotary friction welding, *Journal of Friction and Wear* 2018; 39 (6): 612-619.
16. McClintock F. A. Ductile fracture instability in shear. *Journal of Applied Mechanics* 1958; 25: 582-588.
17. Mieczkowski G. Description of stress fields and displacements at the tip of a rigid, flat inclusion located at interface using modified stress intensity factors. *Mechanika* 2015; 21(2): 91-98.
18. Mieczkowski G. Stress fields and fracture prediction for adhesively bonded bi-material structure with sharp notch located on the interface. *Mechanics of Composite Materials* 2017; 53(3): 305-320.
19. Mieczkowski G. Stress fields at the tip of a sharp inclusion on the interface. *Mechanics of Composite Materials* 2016; 52(5):601-610.
20. Naik R. A., Crews J. H. Determination of stress intensity factors for interface cracks under mixed-mode loading. Paper presented at the ASTM National Symposium on Fracture Mechanics, June 30-July 2, 1992, Gatlinburg, TN.
21. Parton V.Z., Perlin P.I. *Mathematical methods of the theory of elasticity*. Moscow: Mir Publishers, 1984.

22. Pirondi A., Nicoletto, G. Fatigue crack growth in bonded DCB specimens. *Engineering Fracture Mechanics* 2004; 71(4–6): 859–871.
23. Ritchie R. O., Knott J. F., Rice J. R. On the relation between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 1973; 21: 395-410.
24. Rogowski G., Molski K.L. The T-stress effect on the plastic zone size in a thin ductile material layer sandwiched between two elastic adherents. *Engineering Fracture Mechanics* 2016; 168 (A): 260-270.
25. Rudawska A., Dębski H. Experimental and numerical analysis of adhesively bonded aluminium alloy sheets joints. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2011; 1: 4–10.
26. Savruk M.P., Shkarayev S., Madenci E. Stress near apex of dissimilar material with bilinear behavior. *Journal of Applied Fracture Mechanics* 1999; 31: 203-212.
27. Seweryn A., Łukaszewicz A. Verification of fracture criteria of elements with V-shaped notches. *Eksploatacja i Niezawodność — Maintenance and Reliability* 2001; 5: 6–8.
28. Seweryn A., Molski K. Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions. *Engineering Fracture Mechanics* 1996; 55: 529-556.
29. Sih G.C. Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture* 1974; 10: 305-321.
30. Sih G.C., Chen E.P. Cracks in composite materials, Ch.3 (Mechanics of Fracture VI) ed. G. C. Sih. Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981.
31. Sneddon I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proceedings of the Royal Society of London A* 1946;187(1009): 229-260.
32. Sun C T., Jih C. J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Engineering Fracture Mechanics* 1987; 28: 13-20.
33. Sun C. T., Qian H. Brittle fracture beyond the stress intensity factor. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 2009; 4(4): 743-753.
34. Taylor, D. *The Theory of Critical Distances: A new perspective in fracture mechanics*. Oxford: Elsevier, 2007.
35. Tracey D. M. Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics* 1971; 3(3): 255-265.
36. Tran V.-X., Leguillon D., Krishnan A. Interface crack initiation at V-notches along adhesive bonding in weakly bonded polymers subjected to mixed-mode loading. *International Journal of Fracture Mechanics* 2012; 176: 65–79.
37. Treifi M., Oyadiji S.O. Strain energy approach to compute stress intensity factors for isotropic homogeneous and bi-material V-notches. *International Journal of Solids and Structures* 2013; 50: 2196–2212.
38. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension. *Journal of Applied Mechanics* 1952; 9: 526-528.