

Mariusz ZIEJA  
Mariusz WAŻNY  
Sławomir STĘPIEŃ

## OUTLINE OF A METHOD FOR ESTIMATING THE DURABILITY OF COMPONENTS OR DEVICE ASSEMBLIES WHILE MAINTAINING THE REQUIRED RELIABILITY LEVEL

### ZARYS METODY SZACOWANIA TRWAŁOŚCI ELEMENTÓW LUB ZESPOŁÓW URZĄDZEŃ Z ZACHOWANIEM WYMAGANEGO POZIOMU NIEZAWODNOŚCI\*

*The paper includes a probabilistic method for evaluating the durability of components and device assemblies which operate under the impact of destructive processes. As a result of these processes, wear that causes deterioration of their cooperation conditions occurs. It is assumed that a component operates reliably when the wear does not exceed the acceptable (limit) values. In mathematical terms, this method is based on a differential equation, after the transformation of which, it is possible to obtain the Fokker-Planck type partial differential equation. The specific solution of this equation allows for obtaining the density function of the probability wear in the normal distribution form. The paper presents two methods for determining the durability. The first one involves the application of the wear density function, and the second one consists in determining the probability density function of the time of reaching the acceptable state, and its use in order to determine the component or assembly durability. The paper presents a numerical example on the aircraft technology operation process.*

*Keywords: reliability, durability, density function acceptable state, ageing, wear.*

*Praca zawiera probabilistyczną metodę oceny trwałości elementów lub zespołów urządzeń pracujących w warunkach oddziaływania procesów destrukcyjnych. W wyniku działania tychże procesów następuje zużywanie powodujące pogorszenie warunków ich współpracy. Przyjmuje się, że element pracuje niezawodnie, gdy zużycie nie przekracza wartości dopuszczalnych (granicznych). Metoda od strony matematycznej bazuje na równaniu różnicowym z którego po przekształceniu otrzymuje się równanie różniczkowe cząstkowe typu Fokkera-Plancka. Z rozwiązania szczególnego tego równania otrzymuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa zużywania w postaci rozkładu normalnego. W pracy przedstawione są dwa sposoby wyznaczania trwałości. Pierwszy polega na wykorzystaniu funkcji gęstości zużywania a drugi na wyznaczeniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa czasu osiągnięcia stanu dopuszczalnego i zastosowanie jej do wyznaczenia trwałości elementu lub zespołu. W pracy przedstawiono przykład liczbowy dotyczący procesu eksploatacji techniki lotniczej.*

*Słowa kluczowe: niezawodność, trwałość, funkcja gęstości stan dopuszczalny, starzenie, zużywanie*

#### 1. Introduction

In the available literature, it is possible to find a number of papers, which demonstrate the problem of the impact of the external environment, ageing and wear processes on the technical system functioning [4, 9, 13, 16, 17, 21]. Due to technical advancement and a high degree of integration of the devices used on the board of military aircraft, the development of optimal operation models is a complex task. The methods for evaluating the reliability and durability of aviation equipment based on a change in diagnostic parameters are extremely useful within this area [6, 7, 8, 12, 15, 20].

This paper includes a probabilistic method for evaluating the durability of components and the assemblies of the device that operates under the impact of ageing processes (corrosive, wear and other) in the aircraft devices [15, 18, 19]. The technical condition of some aviation equipment can be assessed with the use of diagnostic parameters. This assessment requires knowledge of limit (acceptable) values, for

which it is considered that the device or assembly is in the state of usability.

In the offered durability assessment model, the following assumptions are adopted:

- the device's technical condition is defined by one diagnostic parameter "z" in the form of the parameter deviation from the nominal value:

$$z = \left| X - X^{norm} \right|, \quad (1)$$

where:

$X$  – current value of the diagnostic parameter,  
 $X^{norm}$  – nominal value of the diagnostic parameter;

(\*) Tekst artykułu w polskiej wersji językowej dostępny w elektronicznym wydaniu kwartalnika na stronie [www.ein.org.pl](http://www.ein.org.pl)

- change in the deviation value of the diagnostic parameter takes place in the entire operation period (operation and standstill);
- “z” parameter is non-decreasing, because it is determined by the absolute value of the difference of the present and nominal values;
- increase speed of the diagnostic parameter deviation in case of random changes can be described by the following relationship:

$$\frac{dz}{dt} = c, \quad (2)$$

where:

- c – random variable which characterises the component’s susceptibility to ageing changes depending on its features and operating conditions,
- t – calendar time.

## 2. Method for estimating the durability of the device component with the use of the density function of the diagnostic parameter deviation

### 2.1. Determination of the deviation density function taking into account the relationship (1)

The dynamics of changes in “z” deviation value in random terms will be characterised by the following differential equation:

$$U_{z,t+\Delta t} = (1-P)U_{z,t} + PU_{z-\Delta z,t}, \quad (3)$$

where:

- $U_{z,t}$  – probability of the fact that in the moment of t, the diagnostic parameter value adopts z value;
- P – probability of the event that the random wear occurs and that in the time interval of  $\Delta t$ , the deviation value will be increased by  $\Delta z$  value;
- $\Delta z$  – deviation increase.

In case, when  $P=1$  equation (3) in the function notation will adopt the following form:

$$u(z,t+\Delta t) = u(z-\Delta z,t). \quad (4)$$

The equation (4) has the following form: probability of the fact that in the moment of  $t+\Delta t$ , the deviation value will be z is equal to the probability of the fact that in the t moment, the deviation value was equal to  $z-\Delta z$ . It means that along with the probability equal to unity, in the time interval of  $\Delta t$ , the deviation will be increased by  $\Delta z$  value.

The equation (4) is transformed into the partial differential equation. Therefore, the following approximations are adopted [1,2]:

$$u(z,t+\Delta t) = u(z,t) + \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \Delta t, \quad (5)$$

$$u(z-\Delta z,t) = u(z,t) - \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} (\Delta z)^2. \quad (6)$$

By using (5) and (6), the equation (4) adopts the following form:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = -b \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}, \quad (7)$$

where:

- $b=E[c]$  – average increase in the diagnostic parameter’s deviation value per time unit;
- $a=E[c^2]$  – average increase square of the diagnostic parameter’s deviation per time unit.

We are searching for the solution of a particular equation (7), the one, which at  $t \rightarrow 0$  is coergent to the so-called Dirac function, i.e.  $u(z,t) \rightarrow 0$  for  $z \neq 0$  and  $u(0,t) \rightarrow +\infty$ , but in a way that the integral of u function is equal to “1” for all  $t > 0$ .

The equation solution (7) adopts the following form for the above specified condition [3, 11, 14]:

$$u(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} e^{-\frac{(z-B(t))^2}{2A(t)}}, \quad (8)$$

where:

$$B(t) = \int_0^t b dt = bt = \bar{c}t, \quad A(t) = \int_0^t a dt = at = \bar{c}^2 t.$$

The value of 0 in lower limits of the integrals means the adopted initial moment of time, according to which the dynamics of changes in the diagnostic parameter’s value is considered – it can be, e.g. the moment of putting a given device into operation.

The density function (8) of the diagnostic parameter’s deviation increase can be used for assessing the reliability of the considered device component.

### 2.2. Determination of reliability and durability of the component or device assembly

By having a specific density function, it is possible to record the relationship on reliability and durability due to the time of the parameter’s deviation increase to the limit value. The formula adopts the following form:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{z_d} u(z,t) dz, \quad (9)$$

where:

- $u(z,t)$  – density function specified by the relationship (8);
- $z_d$  – acceptable value of the diagnostic parameter’s deviation due to safety;
- t – calendar time of the device operation.

Figure 1 presents a diagram of the density function course and a way of determining the reliability and durability.

The relationship (9) taking into account (8), adopts the following form:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{z_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} dz. \quad (10)$$

By assuming the minimum, required value of  $R^*$  reliability, it is possible to determine  $t^*$  time, after which the reliability will decrease below the required level. The time  $t^*$  can be treated as the durability of a given component for the required, acceptable reliability value.

In this case, it is possible to obtain:

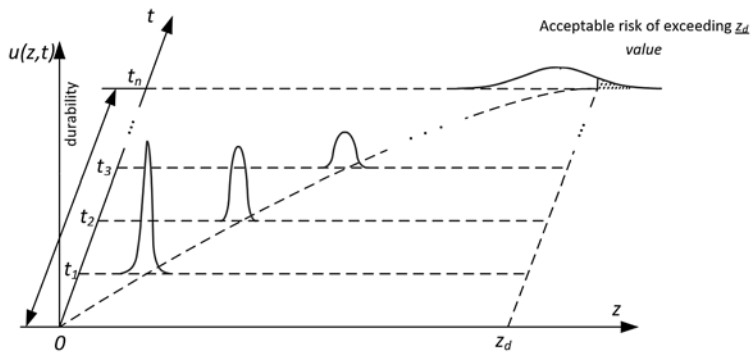


Fig. 1. Diagram of changes in the density function form

$$R^* = \int_{-\infty}^{z_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi at^*}} e^{-\frac{(z-bt^*)^2}{2at^*}} dz. \quad (11)$$

### 3. Method for estimating the durability with the use of the density function of the time exceeding the acceptable (limit) state

#### 3.1. Determination of the time distribution of exceeding the acceptable (limit) state

The probability of exceeding the acceptable (limit) value by the diagnostic parameter with the use of the density function of changes in the diagnostic parameter's deviation (8) can be presented in the following form:

$$Q(t; z_d) = \int_{z_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} dz. \quad (12)$$

The density function of the time distribution of the first transition beyond the acceptable value  $z_d$  adopts the following form:

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} Q(t; z_d) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} dz. \quad (13)$$

Thus,

$$f(t) = \int_{z_d}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} \right] \right\} dz. \quad (14)$$

By assuming (8) definition, it is possible to obtain:

$$f(t) = \int_{z_d}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(z,t) \right\} dz. \quad (15)$$

Furthermore, a derivative after the function time (8), adopts the following form:

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(z,t)] = u(z,t) \left( \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2} \right). \quad (16)$$

The relationship (16) was substituted to (14):

$$f(t) = \int_{z_d}^{\infty} \left[ u(z,t) \left( \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2} \right) \right] dz. \quad (17)$$

The primary function for the integrand in the relationship (17) is searched for. It is expected that the function in the form of:

$$w(z,t) = u(z,t)\theta(z,t),$$

is a primary function for the integrand of the relationship (17), where  $\theta(z,t)$  is a sought unknown function.

That is:

$$\frac{\partial}{\partial z} [u(z,t)\theta(z,t)] = u(z,t) \left( \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2} \right).$$

After transformations, the following equation is obtained:

$$\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} - \frac{z-bt}{at} \theta(z,t) = \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2}. \quad (18)$$

Homogeneous equation:

$$\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z} - \frac{z-bt}{at} \theta(z,t) = 0.$$

Solution of the homogeneous equation:

$$\theta_0(z,t) = C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}},$$

where:  $C$  – arbitrary constant

The expected specific solution of the homogeneous equation has the following form:

$$\theta_s(z,t) = -\frac{z+bt}{2t}.$$

It was checked that the equation (18) fulfils the above solution. The general solution of the homogeneous equation:

$$\theta(z,t) = C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} - \frac{z+bt}{2t}.$$

That is the sought primary function of the integral (17) has the following form:

$$w(z, t) = u(z, t) \left[ C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} - \frac{z + bt}{2t} \right]$$

Thus, by calculating the integral (17) in the specified limits, it is possible to obtain:

$$\begin{aligned} f(t) &= u(z, t) \left[ C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} - \frac{z + bt}{2t} \right]_{z_d}^{\infty} = C u(z, t) e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} \Big|_{z_d}^{\infty} - u(z, t) \frac{z + bt}{2t} \Big|_{z_d}^{\infty} = \\ &= C \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{b^2 t}{2a}} \left[ -u(z, t) \frac{z + bt}{2t} \right]_{z_d}^{\infty} = 0 - 0 + u(z_d, t) \frac{z_d + bt}{2t} \\ f(t) &= \frac{z_d + bt}{2t} u(z_d, t). \end{aligned} \quad (19)$$

The relationship (19) determines the density function of the time of the first transition of the acceptable (limit) state by the diagnostic parameter's deviation. It should be checked, whether the function (19) is a density function of time of reaching the acceptable (limit) state. The function has the following form:

$$f(t) = \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} \quad (20)$$

The function (20) should meet the condition:

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1. \quad (21)$$

In order to demonstrate the validity (21), the following justification is presented:

$$\int_0^{\infty} \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} dt = 1. \quad (22)$$

In order to calculate the integral that occurs in the formula (22), the following substitution is used:

$$w = \frac{z_d - bt}{\sqrt{at}} \Rightarrow dt = -\frac{2t\sqrt{at}}{z_d + bt} dw. \quad (23)$$

Transformation of the limits of integration:

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow w = \infty, \\ t = \infty &\Rightarrow w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_d - bt}{\sqrt{at}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2b\sqrt{at}}{a} = -\infty. \end{aligned} \quad (24)$$

After substituting to the output integral, it is possible to obtain:

$$\int_0^{\infty} \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} dt = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \quad (25)$$

The above integral is an integral of  $N(0,1)$  normal distribution in the limits from  $-\infty$  to  $+\infty$  and is equal to unity. On this basis, it can be concluded that:

$$\int_0^{\infty} \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (26)$$

### 3.2. Evaluation of the durability of selected components of the aircraft construction with the use of the time distribution of obtaining the acceptable state

The formula for the aircraft's structural component reliability adopts the following form:

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (27)$$

where the density function  $f(t)$  is determined by the following formula (19).

However, the unreliability of the aircraft's structural component can be determined on the basis of the following relationship:

$$Q(t) = \int_0^t \frac{z_d + b\tau}{2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\tau}} e^{-\frac{(z_d - b\tau)^2}{2a\tau}} d\tau. \quad (28)$$

The integral occurring in the relationships (27) and (28) must be transformed to the more convenient form:

$$\int_0^t \frac{z_d + b\tau}{2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\tau}} e^{-\frac{(z_d - b\tau)^2}{2a\tau}} d\tau = \left[ \begin{array}{l} w = \frac{z_d - b\tau}{\sqrt{a\tau}} \quad \tau = 0 \diamond w = \infty \\ d\tau = -\frac{2\tau\sqrt{a\tau}}{z_d + b\tau} \quad \tau = t \diamond w = \frac{z_d - bt}{\sqrt{at}} \end{array} \right] = -\int_{\infty}^{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw.$$

After changing the limits of integration, it is possible to obtain:

$$\int_0^t \frac{z_d + b\tau}{2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\tau}} e^{-\frac{(z_d - b\tau)^2}{2a\tau}} d\tau = \int_{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (29)$$

The reliability of a given component will adopt the following form:

$$R(t) = 1 - \int_{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw, \quad (30)$$

or

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (31)$$

The integral occurring in the formula (31) is a value of  $N(0,1)$  normal distribution function for the argument occurring in the upper limit of integration. Again, by assuming the required minimum value of  $R^*$  reliability, it is possible to determine  $t^*$  durability.

$$R^* = \int_{-\infty}^{\frac{z_d - bt^*}{\sqrt{at^*}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (32)$$

$$a^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[(z_{k+1} - z_k) - b^*(t_{k+1} - t_k)]^2}{(t_{k+1} - t_k)}. \quad (37)$$

The use of (11) or (32) formula in the calculation requires estimation of the values of  $a$  and  $b$  coefficients. This estimation is carried out on the basis of the data obtained from the aircraft operation process.

#### 4. Numerical example

In order to determine the durability of the considered component, it is important to determine (estimate) the values of  $a$  and  $b$  constants. Therefore, it is assumed that the observation of the tested device in the operation process results in the provision of data on the increase of the diagnostic parameter's deviation value in the form of:

$$[(z_0, t_0), (z_1, t_1), (z_2, t_2), \dots, (z_n, t_n)]. \quad (33)$$

The best method for determining "b" and "a" values for the held data is a method that uses a likelihood function. Its form in the general case can be presented as the relationship:

$$L = \prod_{k=0}^{n-1} g(t_k, z_k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \quad (34)$$

where:

- $g(t_k, z_k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  – density function of the total probability of  $z$  variable;
- $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  – density function parameters;
- $z_k$  – measured wear values of  $z$  parameter respectively in the moments of time  $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ .

Finding  $(\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_m^*)$  estimates of unknown parameters  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  with the use of a maximum likelihood method consists in solving the equations in the form of:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0, \quad (35)$$

where:

- $j=1, 2, \dots, m;$
- $m$  – number of parameters characterising the wear process of a given technical object.

In this case,  $b^*$  and  $a^*$  estimates of unknown  $b$  and  $a$  parameters with the use of the maximum likelihood method consists in solving the system of equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0 \end{cases}. \quad (29)$$

By solving the system of equations (29),  $b^*$  and  $a^*$  are found.

$$b^* = \frac{z_n}{t_n}, \quad (36)$$

The component, which was chosen for a numerical example is 12-SAM-28 aircraft battery. Figure 2 shows a change in the time of the averaged battery capacity for held data.

In accordance with the relationship (1), the absolute value of the capacity difference and its nominal value were adopted as "z" diagnostic parameter. The change in time of "z" parameter was presented in Figure 3.

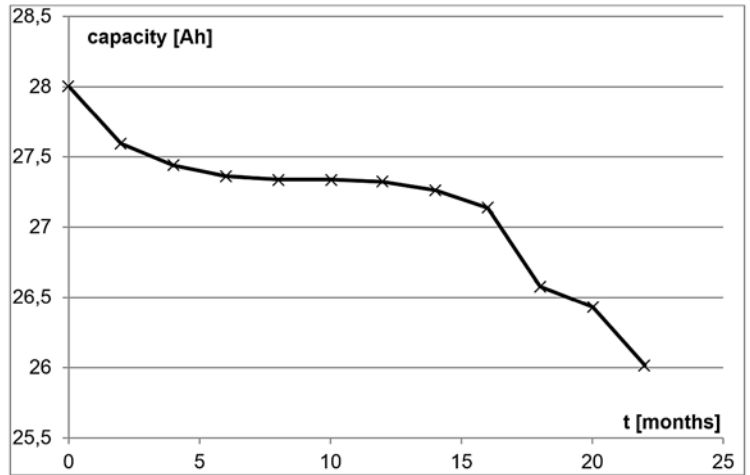


Fig. 2. The course of changes in the averaged capacity of 12-SAM-28 battery

Thus, holding the data describing the values of the diagnostic parameter in the form of  $[(z_0, t_0), (z_1, t_1), (z_2, t_2), \dots, (z_n, t_n)]$ , based on (36) and (37) formulas, the values of the density function coefficients were determined:

$$b^*=0,09, \quad a^*=0,015. \quad (38)$$

The parameter  $z_d$  was determined with the use of technical documentation used for the implementation of maintenance works, in which the information on the acceptable value of the capacity of batteries was provided.

Therefore, by holding the values of parameters  $b_\epsilon^*, a_\epsilon^*, z_d$ , they were substituted to (11) or (32) equations by determining the relationship of  $t^*$  time on  $R^*$  probability – Figure 4. In both cases (relationship (11) or (32)) the same course was obtained.

By assuming the minimum value of  $R^*=0.99$  reliability, the time, to which the diagnostic parameter deviation will not exceed the limit state, in accordance with the assumed probability, was determined:

$$T=63 \text{ [months]}. \quad (39)$$

The obtained value (39) can be used in the technical maintenance depending on the adopted strategy of maintenance. On the basis of the above methodology, it is possible to determine further periods, in which the control of the device diagnostic parameter should be carried out [5, 10].

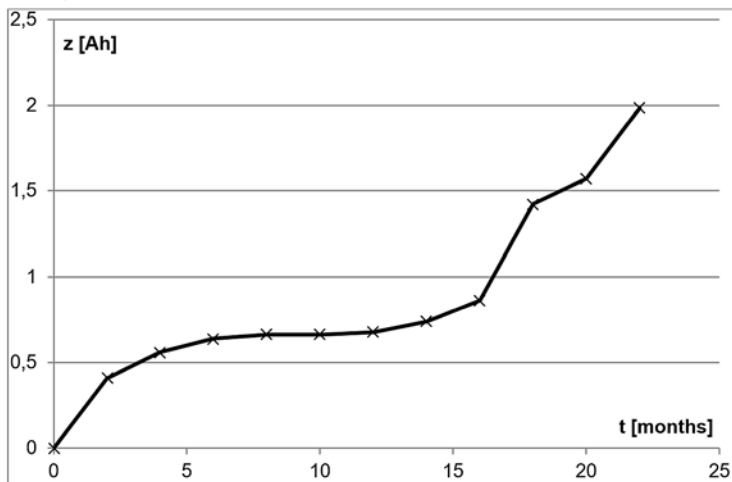


Fig. 3. Change in time of "z" parameter for 12-SAM-28 battery

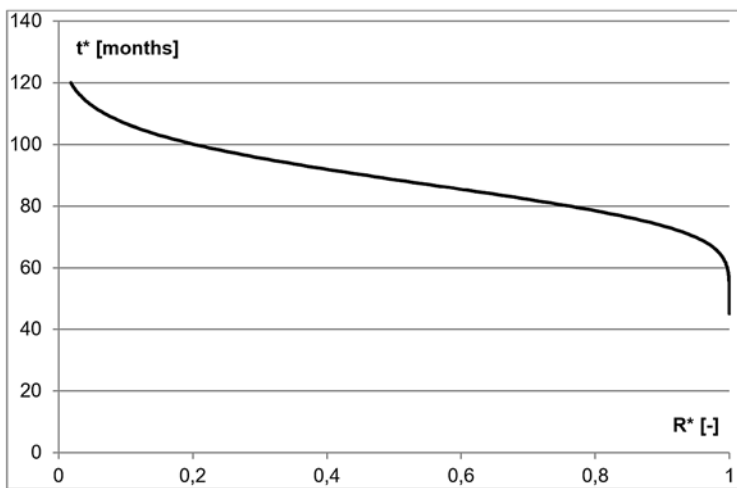


Fig. 4. Relationship of projected  $t^*$  durability on  $R^*$  reliability

## 5. Final remarks

In this paper, an overview of the method for estimating the durability of components or assemblies, when the increase speed of changes was of random nature, was presented. However, the method of this change was described by the following simple relationship:

$$\frac{dz}{dt} = c,$$

where  $c$  was a random variable determining the possibility of the parameter's deviation increase.

It is possible to generalise this method, when the speed of the deviation increase will be described by the following relationships:

$$\frac{dz}{dt} = cz, \quad (40)$$

$$\frac{dz}{dt} = ct^{\alpha-1}. \quad (41)$$

In the first case, the increase speed of changes will be of random nature similar to the exponential one. In the second case, the increase nature of changes will be similar to the intensity of damage in the Weibull distribution.

In summary, it can be concluded that the presented method seems to be correct and right, and allows to analyse the device technical condition due to the nature of changes in the values of diagnostic parameters. The presented calculation example allowed to carry out the verification of the developed model, and emphasised the developed method's application advantages. This method may be useful in further works on the improvement of both the operational process and the method of using the aircraft with the use of its on-board systems, allowing for determining the time of the device's staying in the state of usability.

Furthermore, the presented method, owing to its universal nature, can be successfully used in order to specify the residual life of any technical object, the technical condition of which is determined on the basis of the analysis of the diagnostic parameters' values.

In this paper, the presented method can be further improved and extended to other cases of increase in random changes of the exponential type. It seems that it can be used for assessing the reliability of mechanical components, in case of considering the propagation of fatigue cracks in the components subjected to the random load, and in case of using the Paris formula in order to specify the crack velocity.

## References

1. DeLurgio SA. Forecasting principles and applications. University of Missouri-Kansas City: Irwin/McGraw-Hill, 1998.
2. Franck TD. Nonlinear Fokker-Planck Equations. Fundamentals and Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.
3. Grasman J, Herwaarden OA. Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03857-4>.
4. Idziaszek Z, Grzesik N. Object characteristics deterioration effect on task realizability – outline method of estimation and prognosis. *Eksplatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2014; 16 (3): 433–440.
5. Kinnison H, Siddiqui T. Aviation Maintenance Management. The McGraw-Hill Companies, Inc. 2013.
6. Knopik L, Migawa K. Multi-state model of maintenance policy. *Eksplatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2018; 20 (1): 125–130, <https://doi.org/10.17531/ein.2018.1.16>.
7. Knopik L, Migawa K, Wdźięczny A. Profit optimization in maintenance system, *Polish Maritime Research*, 2016, 1(89): 193–98.
8. Kołowrocki K, Soszyńska Budny J. Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes. Springer 2011, <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-694-8>.
9. McPherson JW. Reliability physics and engineering. New York: Springer, 2010, <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6348-2>.
10. Narayan V. Effective Maintenance Management. New York: Industrial Press Inc., 2012.
11. Pham H. Handbook of Engineering Statistics. London: Springer-Verlag 2006, <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-288-1>.
12. Rasuo B., Duknic G. Optimization of the aircraft general overhaul process. *Aircraft engineering and aerospace technology* 2013; 85 (5):

- 343-354, <https://doi.org/10.1108/AEAT-02-2012-0017>.
13. Restel F. The Markov reliability and safety model of the railway transportation system. Safety and reliability: methodology and applications: proceedings of the European Safety and Reliability Conference, ESREL 2014, 14-18 September, 2015, Wrocław, Poland. CRC Press/Balkema: 303-311.
  14. Risken H. The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1984, <https://doi.org/10.1007/978-3-642-96807-5>.
  15. Tan CM, Singh P. Time evolution degradation physics in high power white LEDs under high temperature-humidity conditions. IEEE Transactions on Device and Materials Reliability 2014; 14(2): 742-750, <https://doi.org/10.1109/TDMR.2014.2318725>.
  16. Ulanowicz L. Modelling of a process, which causes adhesive seizing (tacking) in precise pairs of hydraulic control devices. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2016; 18 (4): 492-500, <https://doi.org/10.17531/ein.2016.4.3>.
  17. Valis D, Koucky M, Zak L. On approaches for non-direct determination of system deterioration. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2012; 1:33-41.
  18. Wang P, Tang Y, Baeb SJ, He Y. Bayesian analysis of two-phase degradation data based on change-point Wiener process. Reliability Engineering & System Safety 2018; 170: 244-256, <https://doi.org/10.1016/j.res.2017.09.027>.
  19. Wang YS, Zhang CH, Zhang SF, Chen X, Tan YY. Optimal design of constant stress accelerated degradation test plan with multiple stresses and multiple degradation measures. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability 2015; 229(1): 83-93, <https://doi.org/10.1177/1748006X14552312>.
  20. Woch M. Reliability analysis of the PZL-130 Orlik TC-II aircraft structural component under real operating conditions. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2017; 19 (2): 287-295, <https://doi.org/10.17531/ein.2017.2.17>.
  21. Zurek J, Tomaszek H, Zieja M. Analysis of structural component's lifetime distribution considered from the aspect of the wearing with the characteristic function applied. Safety, reliability and risk analysis: Beyond the horizon. Amsterdam: Balkema 2014, 2597-2602.

---

**Mariusz ZIEJA**

Air Force Institute of Technology  
ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warsaw 96, Poland

**Mariusz WAŻNY****Sławomir STĘPIEŃ**

Faculty of Mechatronics and Aerospace  
Military University of Technology  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warsaw 49, Poland

E-mails: [mariusz.zieja@itwl.pl](mailto:mariusz.zieja@itwl.pl), [mwazny@wat.edu.pl](mailto:mwazny@wat.edu.pl), [sstepien@wat.edu.pl](mailto:sstepien@wat.edu.pl)

---

## **Dr hab. inż. Mariusz ZIEJA**

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych  
ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa 96  
e-mail: mariusz.zieja@itwl.pl

## **Dr inż. Mariusz WAŻNY**

Wydział Mechatroniki i Lotnictwa  
Wojskowa Akademia Techniczna  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa 49  
e-mail: mwazny@wat.edu.pl

## **Dr inż. Sławomir STĘPIEŃ**

Wydział Mechatroniki i Lotnictwa  
Wojskowa Akademia Techniczna  
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa 49  
e-mail: sstepien@wat.edu.pl

# **Zarys metody szacowania trwałości elementów lub zespołów urządzeń z zachowaniem wymaganego poziomu niezawodności**

*Słowa kluczowe: niezawodność, trwałość, funkcja gęstości stan dopuszczalny, starzenie, zużywanie*

**Streszczenie:** Praca zawiera probabilistyczną metodę oceny trwałości elementów lub zespołów urządzeń pracujących w warunkach oddziaływania procesów destrukcyjnych. W wyniku działania tychże procesów następuje zużywanie powodujące pogorszenie warunków ich współpracy. Przyjmuje się, że element pracuje niezawodnie, gdy zużycie nie przekracza wartości dopuszczalnych (granicznych). Metoda od strony matematycznej bazuje na równaniu różnicowym z którego po przekształceniu otrzymuje się równanie różniczkowe cząstkowe typu Fokkera-Plancka. Z rozwiązania szczególnego tego równania otrzymuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa zużywania w postaci rozkładu normalnego. W pracy przedstawione są dwa sposoby wyznaczania trwałości. Pierwszy polega na wykorzystaniu funkcji gęstości zużywania a drugi na wyznaczeniu funkcji gęstości prawdopodobieństwa czasu osiągnięcia stanu dopuszczalnego i zastosowanie jej do wyznaczenia trwałości elementu lub zespołu. W pracy przedstawiono przykład liczbowy dotyczący procesu eksploatacji techniki lotniczej.

## **1. Wstęp**

W dostępnej literaturze można znaleźć szereg prac, które pokazują problem wpływu środowiska zewnętrznego, procesów starzenia i zużywania na funkcjonowanie systemu technicznego [4,9,13,16,17,21]. Ze względu na zaawansowanie techniczne i duży stopień integracji urządzeń wykorzystywanych na pokładzie wojskowych statków powietrznych opracowanie optymalnych modeli eksploatacji jest zadaniem skomplikowanym. Niezwykle użyteczne w tym obszarze są metody oceny niezawodności i trwałości urządzeń lotniczych bazujące na zmianie parametrów diagnostycznych [6,7,8,12,15,20].



Niniejsza praca zawiera probabilistyczną metodę oceny trwałości elementów i zespołów urządzenia pracującego w warunkach oddziaływania procesów starzeniowych (korozyjnych, zużyciowych i innych) w urządzeniach statku powietrznego [15,18.19]. Stan techniczny niektórych urządzeń lotniczych można oceniać przy pomocy parametrów diagnostycznych. Ocena ta wymaga znajomości granicznych (dopuszczalnych) wartości dla których uznaje się, że urządzenie lub zespół jest w stanie zdatności do użycia.

W proponowanym modelu oceny trwałości przyjmuje się następujące założenia:

- stan techniczny urządzenia określa się jednym parametrem diagnostycznym „z” w postaci odchyłki parametru od wartości nominalnej,

$$z = |X - X^{norm}|, \quad (1)$$

gdzie:

$X$  – wartość bieżąca parametru diagnostycznego,  
 $X^{norm}$  – wartość nominalna parametru diagnostycznego;

- zmiana wartości odchyłki parametru diagnostycznego następuje w całym okresie eksploatacji (pracy i postoju);
- parametr „z” jest niemalejący, ponieważ określony jest przez wartość bezwzględną różnicy wartości bieżącej i wartości nominalnej;
- prędkość narastania odchyłki parametru diagnostycznego można w przypadku zmian losowych opisać następującą zależnością:

$$\frac{dz}{dt} = c, \quad (2)$$

gdzie:

$c$  – zmienna losowa charakteryzująca podatność elementu na zmiany starzeniowe w zależności od jego cech i warunków pracy,  
 $t$  – czas kalendarzowy.

## 2. Metoda szacowania trwałości elementu urządzenia z wykorzystaniem funkcji gęstości odchyłki parametru diagnostycznego

### 2.1. Wyznaczenie funkcji gęstości odchyłki z uwzględnieniem zależności (1)

Dynamika zmian wartości odchyłki „z” w ujęciu losowym scharakteryzujemy następującym równaniem różnicowym

$$U_{z,t+\Delta t} = (1 - P)U_{z,t} + PU_{z-\Delta z,t}, \quad (3)$$

gdzie:

$U_{z,t}$  - prawdopodobieństwo tego, że w chwili  $t$  wartość parametru diagnostycznego przyjmuje wartość  $z$ ;  
 $P$  - prawdopodobieństwo zdarzenia, że występuje losowe zużywanie i w przedziale czasu o długości  $\Delta t$  wartość odchyłki wzrośnie o wartość  $\Delta z$ ;  
 $\Delta z$  - przyrost odchyłki.

Dla przypadku, gdy  $P=1$  równanie (3) w zapisie funkcyjnym przyjmie postać:

$$u(z, t + \Delta t) = u(z - \Delta z, t). \quad (4)$$

Równanie (4) ma następujący sens: prawdopodobieństwo tego, że w chwili  $t + \Delta t$  wartość odchyłki będzie równa  $z$  jest równe prawdopodobieństwu tego, że w chwili  $t$  wartość odchyłki była równa  $z - \Delta z$ . Oznacza to, że  $z$  z prawdopodobieństwem równym jedności, w przedziale czasu o długości  $\Delta t$ , odchyłka wzrośnie o wartość  $\Delta z$ .

Równanie (4) przekształcamy w równanie różniczkowe cząstkowe. W tym celu przyjmujemy następujące przybliżenia [1,2]:

$$u(z, t + \Delta t) = u(z, t) + \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \Delta t, \quad (5)$$

$$u(z - \Delta z, t) = u(z, t) - \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} (\Delta z)^2. \quad (6)$$

Wykorzystując (5) i (6) to równanie (4) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = -b \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}, \quad (7)$$

gdzie:

$b = E[c]$  - średni przyrost wartości odchyłki parametru diagnostycznego na jednostkę czasu;

$a = E[c^2]$  - średni kwadrat przyrostu odchyłki parametru diagnostycznego na jednostkę czasu.

Szukamy rozwiązania szczególnego równania (7) takiego, które przy  $t \rightarrow 0$  jest zbieżna do tzw. funkcji Diraca, tj.  $u(z, t) \rightarrow 0$  dla  $z \neq 0$  i  $u(0, t) \rightarrow +\infty$ , ale w ten sposób, że całka funkcji  $u$  jest równa „1” dla wszystkich  $t > 0$ .

Rozwiązanie równania (7) dla wyżej określonego warunku przyjmuje postać [3,11,14]:

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} e^{-\frac{(z-B(t))^2}{2A(t)}}, \quad (8)$$

gdzie:  $B(t) = \int_0^t b dt = bt = \bar{c}t, \quad A(t) = \int_0^t a dt = at = \bar{c}^2 t.$

Wartość 0 w dolnych granicach całek oznacza przyjętą, początkową chwilę czasu, od której rozpatrujemy dynamikę zmian wartości parametru diagnostycznego - może to być np. moment wprowadzenia danego urządzenia do eksploatacji.

Funkcję gęstości (8) narastania odchyłki parametru diagnostycznego można wykorzystać do oceny niezawodności elementu rozpatrywanego urządzenia.

## 2.2. Określenie niezawodności i trwałości elementu lub zespołu urządzenia

Dysponując określoną funkcją gęstości można zapisać zależność na niezawodność i trwałość ze względu na czas narastania odchyłki parametru do wartości granicznej. Wzór przyjmuje postać

$$R(t) = \int_{-\infty}^{z_d} u(z, t) dz, \quad (9)$$

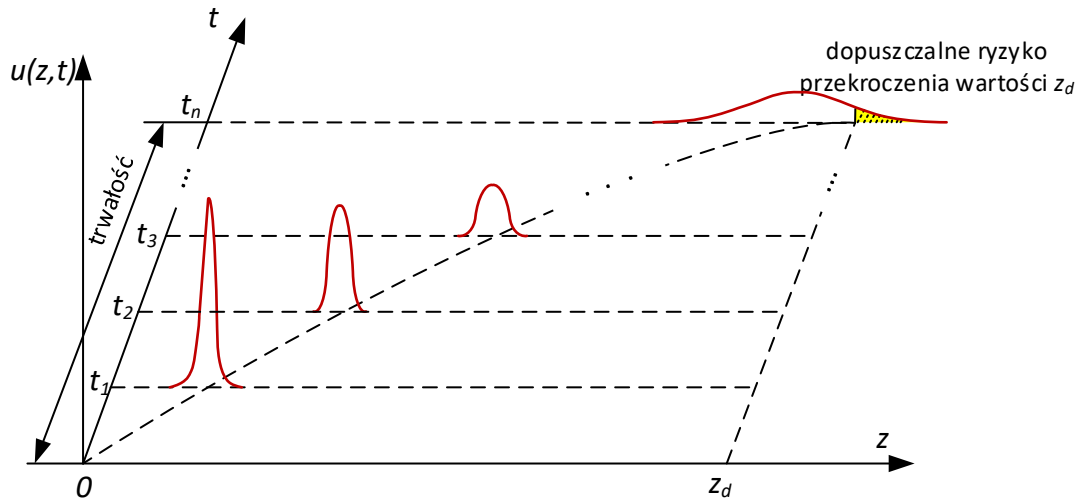
gdzie:

$u(z, t)$  - funkcja gęstości określona zależnością (8);

$z_d$  - dopuszczalna wartość odchyłki parametru diagnostycznego ze względu na bezpieczeństwo;

$t$  - czas kalendarzowy eksploatacji urządzenia.

Na rysunku 1 przedstawiono schemat przebiegu funkcji gęstości i sposobu określenia niezawodności oraz trwałości.



Rys. 1. Schemat zmian postaci funkcji gęstości

Zależność (9) z uwzględnieniem (8), przyjmuje postać:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{z_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} dz \quad (10)$$

Zakładając minimalną, wymaganą wartość niezawodności  $R^*$  można określić czas  $t^*$ , po którym niezawodność spadnie poniżej wymaganego poziomu. Czas  $t^*$  można traktować jako trwałość danego elementu dla żądanej, dopuszczalnej wartości niezawodności.

W tym przypadku otrzymujemy:

$$R^* = \int_{-\infty}^{z_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi at^*}} e^{-\frac{(z-bt^*)^2}{2at^*}} dz \quad (11)$$

### 3. Metoda szacowania trwałości z wykorzystaniem funkcji gęstości czasu przekroczenia stanu dopuszczalnego (granicznego)

#### 3.1. Wyznaczanie rozkładu czasu przekraczania stanu dopuszczalnego (granicznego)

Prawdopodobieństwo przekroczenia wartości dopuszczalnej (granicznej) przez parametr diagnostyczny z wykorzystaniem funkcji gęstości zmian odchyłki parametru diagnostycznego (8) można przedstawić w postaci:

$$Q(t; z_d) = \int_{z_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} dz, \quad (12)$$

Funkcję gęstości rozkładu czasu pierwszego przejścia poza wartość dopuszczalną  $z_d$  przyjmuje postać:

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} Q(t; z_d) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} dz. \quad (13)$$

Zatem,

$$f(t) = \int_{z_d}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z-bt)^2}{2at}} \right] \right\} dz. \quad (14)$$

Przyjmując określenie (8) otrzymujemy:

$$f(t) = \int_{z_d}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(z, t) \right\} dz. \quad (15)$$

Ponadto pochodna po czasie funkcji (8) przyjmuje następującą postać

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(z, t)] = u(z, t) \left( \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2} \right). \quad (16)$$

Zależność (16) podstawiono do (14)

$$f(t) = \int_{z_d}^{\infty} \left[ u(z, t) \left( \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2} \right) \right] dz. \quad (17)$$

Szukamy teraz funkcji pierwotnej dla funkcji podcałkowej w zależności (17). Przewidujemy, że funkcja postaci:

$$w(z, t) = u(z, t)\theta(z, t),$$

jest funkcją pierwotną dla funkcji podcałkowej zależności (17), gdzie  $\theta(z, t)$  jest poszukiwaną, nieznaną funkcją.

Czyli

$$\frac{\partial}{\partial z} [u(z, t)\theta(z, t)] = u(z, t) \left( \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2} \right),$$

Po przekształceniach uzyskujemy następujące równanie:

$$\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} - \frac{z - bt}{at} \theta(z, t) = \frac{z^2 - b^2 t^2 - at}{2at^2}. \quad (18)$$

Równanie jednorodne:

$$\frac{\partial \theta(z, t)}{\partial z} - \frac{z - bt}{at} \theta(z, t) = 0.$$

Rozwiązanie równania jednorodnego:

$$\theta_o(z, t) = C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}},$$

gdzie:  $C$  - stała dowolna

Przewidywane rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ma postać:

$$\theta_s(z, t) = -\frac{z + bt}{2t}$$

Sprawdzono, że powyższe rozwiązanie spełnia równanie (18). Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$\theta(z, t) = C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} - \frac{z + bt}{2t},$$

Czyli poszukiwana funkcja pierwotna całki (17) ma postać:

$$w(z, t) = u(z, t) \left[ C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} - \frac{z + bt}{2t} \right],$$

Zatem obliczając całkę (17) w podanych granicach otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(t) &= u(z, t) \left[ C e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} - \frac{z + bt}{2t} \right]_{z_d}^{\infty} = C u(z, t) e^{\frac{z^2 - 2btz}{2at}} \Big|_{z_d}^{\infty} - u(z, t) \frac{z + bt}{2t} \Big|_{z_d}^{\infty} = \\ &= C \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{\frac{b^2 t}{2a}} \Big|_{z_d}^{\infty} - u(z, t) \frac{z + bt}{2t} \Big|_{z_d}^{\infty} = 0 - 0 + u(z_d, t) \frac{z_d + bt}{2t} \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{z_d + bt}{2t} u(z_d, t). \quad (19)$$

Zależność (19) określa funkcję gęstości czasu pierwszego przejścia stanu dopuszczalnego (granicznego) przez odchyłkę parametru diagnostycznego. Należy sprawdzić, czy funkcja (19) jest funkcją gęstości czasu osiągnięcia stanu dopuszczalnego (granicznego). Funkcja ta ma postać:

$$f(t) = \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}}. \quad (20)$$

Funkcja (20) powinna spełniać warunek

$$\int_0^{\infty} f(t) dt = 1. \quad (21)$$

Dla wykazania słuszności (21) przedstawia się następujące uzasadnienia

$$\int_0^{\infty} \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} dt = 1. \quad (22)$$

W celu obliczenia całki występującej we wzorze (22) stosujemy następujące podstawienie:

$$w = \frac{z_d - bt}{\sqrt{at}} \Rightarrow dt = -\frac{2t\sqrt{at}}{z_d + bt} dw. \quad (23)$$

Przekształcenie granic całkowania

$$t = 0 \Rightarrow w = \infty$$

$$t = \infty \Rightarrow w = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_d - bt}{\sqrt{at}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2b\sqrt{at}}{a} = -\infty. \quad (24)$$

Po podstawieniu do wyjściowej całki otrzymujemy:

$$\int_0^{\infty} \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} dt = -\int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (25)$$

Powyższa całka jest całką z rozkładu normalnego  $N(0,1)$  w granicach od  $-\infty$  do  $+\infty$  i jest równa jedności. Na tej podstawie można stwierdzić, że:

$$\int_0^{\infty} \frac{z_d + bt}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi at}} e^{-\frac{(z_d - bt)^2}{2at}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 1. \quad (26)$$

### 3.2. Ocena trwałości wybranych elementów konstrukcji statku powietrznego z wykorzystaniem rozkładu czasu osiągnięcia stanu dopuszczalnego

Wzór na niezawodność elementu konstrukcyjnego statku powietrznego przyjmuje postać:

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad (27)$$

gdzie funkcja gęstości  $f(t)$  określona jest wzorem (19).

Natomiast, zawodność elementu konstrukcyjnego statku powietrznego można wyznaczyć z zależności

$$Q(t) = \int_0^t \frac{z_d + b\tau}{2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi a\tau}} e^{-\frac{(z_d - b\tau)^2}{2a\tau}} d\tau. \quad (28)$$

Całkę występującą w zależności (27) oraz (28) należy przekształcić do dogodniejszej postaci:

$$\int_0^t \frac{z_d + b\tau}{2\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi a\tau}} e^{-\frac{(z_d - b\tau)^2}{2a\tau}} d\tau = \left| \begin{array}{l} w = \frac{z_d - b\tau}{\sqrt{a\tau}} \quad \tau = 0 \Rightarrow w = \infty \\ d\tau = -\frac{2\tau\sqrt{a\tau}}{z_d + b\tau} dw \quad \tau = t \Rightarrow w = \frac{z_d - bt}{\sqrt{at}} \end{array} \right| = - \int_{\infty}^{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

Po zamianie granic całowania otrzymujemy

$$\int_0^t \frac{z_d + b\tau}{2\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi a\tau}} e^{-\frac{(z_d - b\tau)^2}{2a\tau}} d\tau = \int_{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw \quad (29)$$

Niezawodność danego elementu przyjmie postać:

$$R(t) = 1 - \int_{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw, \quad (30)$$

lub

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\frac{z_d - bt}{\sqrt{at}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (31)$$

Całka występująca we wzorze (31) jest wartością dystrybuanty rozkładu normalnego  $N(0,1)$  dla argumentu występującego w górnej granicy całkowania. Ponownie zakładając wymaganą, minimalną wartość niezawodności  $R^*$  możemy wyznaczyć trwałość  $t^*$ .

$$R^* = \int_{-\infty}^{\frac{z_d - bt^*}{\sqrt{at^*}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} dw. \quad (32)$$

Skorzystanie w obliczeniach ze wzoru (11) lub (32) wymaga oszacowania wartości współczynników  $a$  oraz  $b$ . Oszacowania tego dokonuje się na podstawie danych uzyskanych z procesu eksploatacji statku powietrznego.

#### 4. Przykład liczbowy

W celu określenia trwałości rozpatrywanego elementu należy wyznaczyć (oszacować) wartości stałych  $a$  oraz  $b$ . W tym celu przyjmujemy, że z obserwacji badanego urządzenia w procesie eksploatacji posiadamy dane o narastaniu wartości odchyłki parametru diagnostycznego w postaci

$$[(z_0, t_0), (z_1, t_1), (z_2, t_2), \dots, (z_n, t_n)]. \quad (33)$$

Najlepszą metodą do wyznaczania wartości „ $b$ ” i „ $a$ ” dla posiadanych danych jest metoda wykorzystująca funkcję wiarygodności. Jej postać w ogólnym przypadku możemy przedstawić jako zależność:

$$L = \prod_{k=0}^{n-1} g(t_k, z_k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m), \quad (34)$$

gdzie:

- $g(t_k, z_k, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa całkowitego zmiennej  $z$ ;
- $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  – parametry funkcji gęstości;
- $z_k$  – pomierzone wartości zużycia parametru  $z$  odpowiednio w chwilach czasu  $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ .

Znalezienie oszacowań  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_m^*$  nieznanymi parametrami  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  metodą największej wiarygodności sprowadza się do rozwiązania równań postaci:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0, \quad (35)$$

gdzie:

$$j=1, 2, \dots, m;$$

$m$  - liczba parametrów charakteryzujących proces zużycia danego obiektu technicznego.

W tym przypadku oszacowanie  $b^*$  i  $a^*$  nieznanymi parametrami  $b$  i  $a$  metodą największej wiarygodności sprowadza się do rozwiązania układu równań:

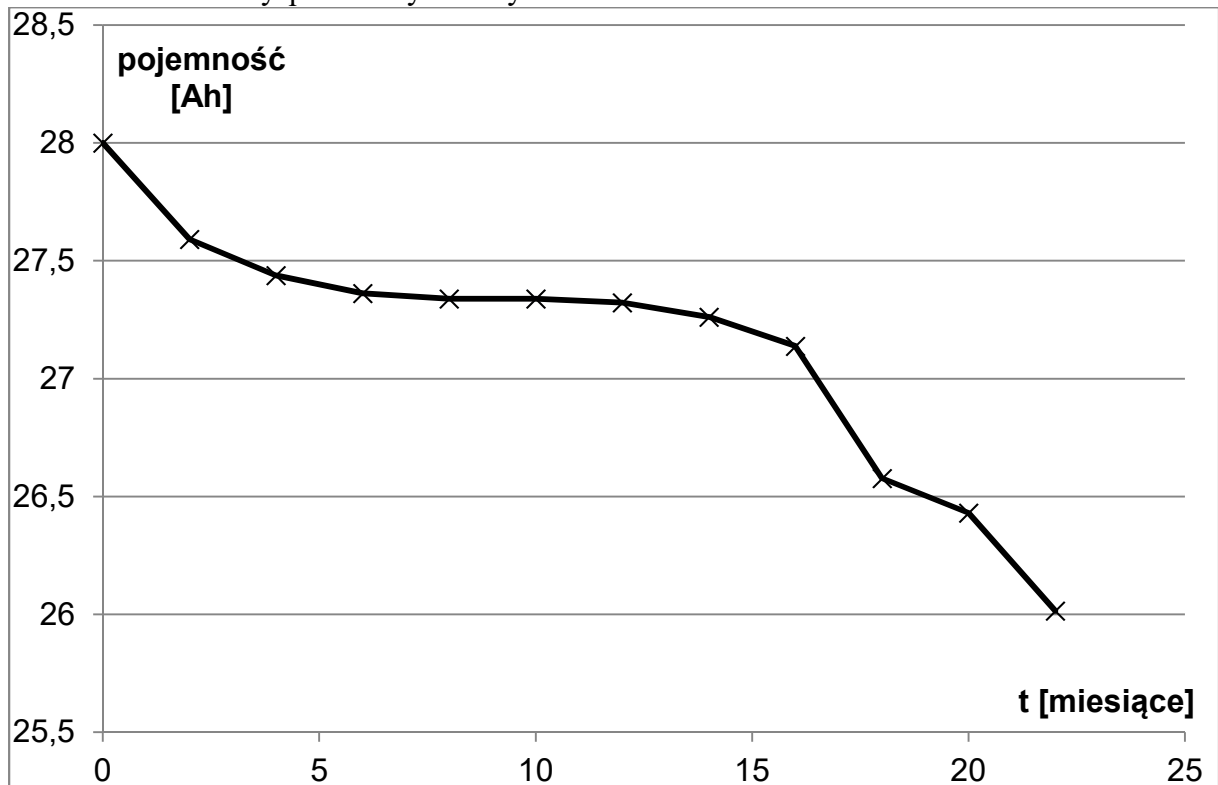
$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0 \end{cases}. \quad (29)$$

Rozwiązując układ równań (29) znajdujemy  $b^*$  i  $a^*$ .

$$b^* = \frac{z_n}{t_n}, \quad (36)$$

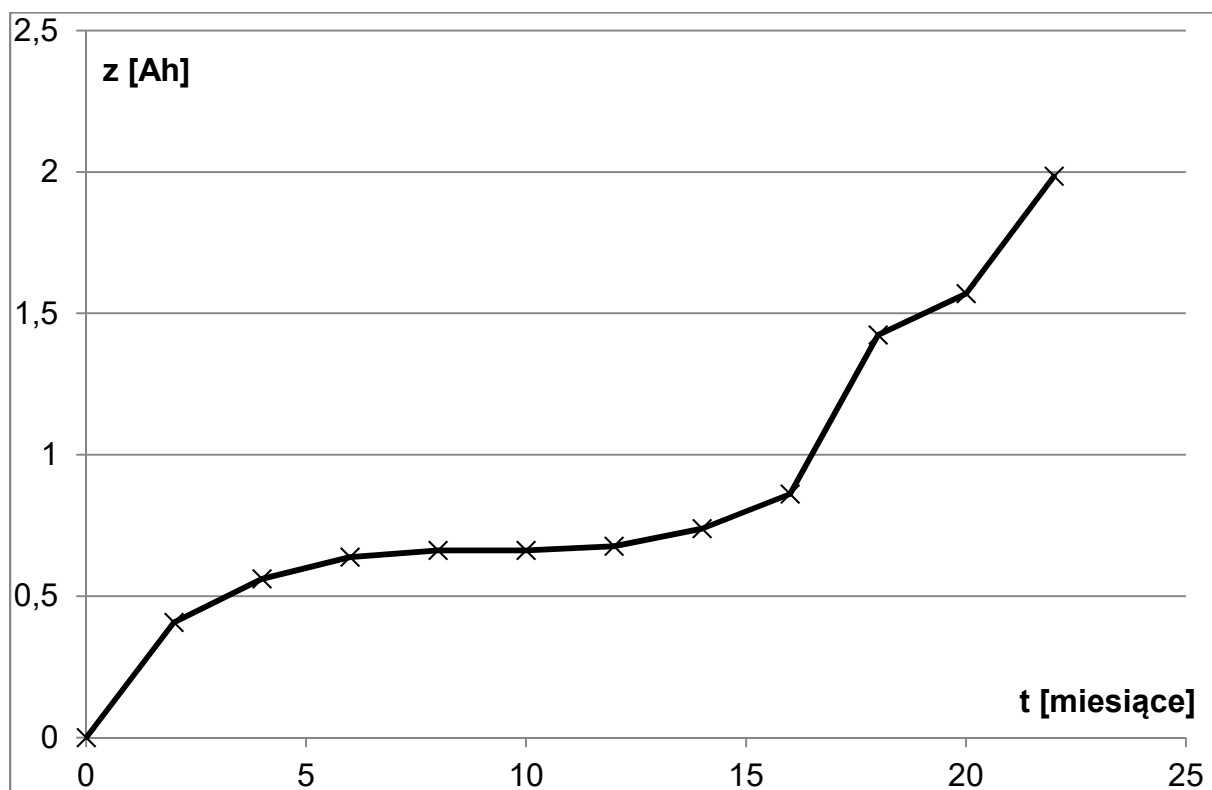
$$a^* = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[(z_{k+1} - z_k) - b^*(t_{k+1} - t_k)]^2}{(t_{k+1} - t_k)}. \quad (37)$$

Elementem, który został wybrany do przykładu liczbowego jest bateria lotnicza 12-SAM-28. Na rysunku 2 przedstawiono zmianę w czasie uśrednionej pojemności akumulatorów dla dysponowanych danych.



Rys. 2. Przebieg zmian uśrednionej pojemności baterii 12-SAM-28

Za parametr diagnostyczny „z” przyjęto, zgodnie z zależnością (1) wartość bezwzględną z różnicy pojemność i jej wartości nominalnej. Zmiana w czasie parametru „z” została przedstawiona na rysunku 3.



Rys. 3. Zmiana w czasie parametru „z” dla baterii 12-SAM-28

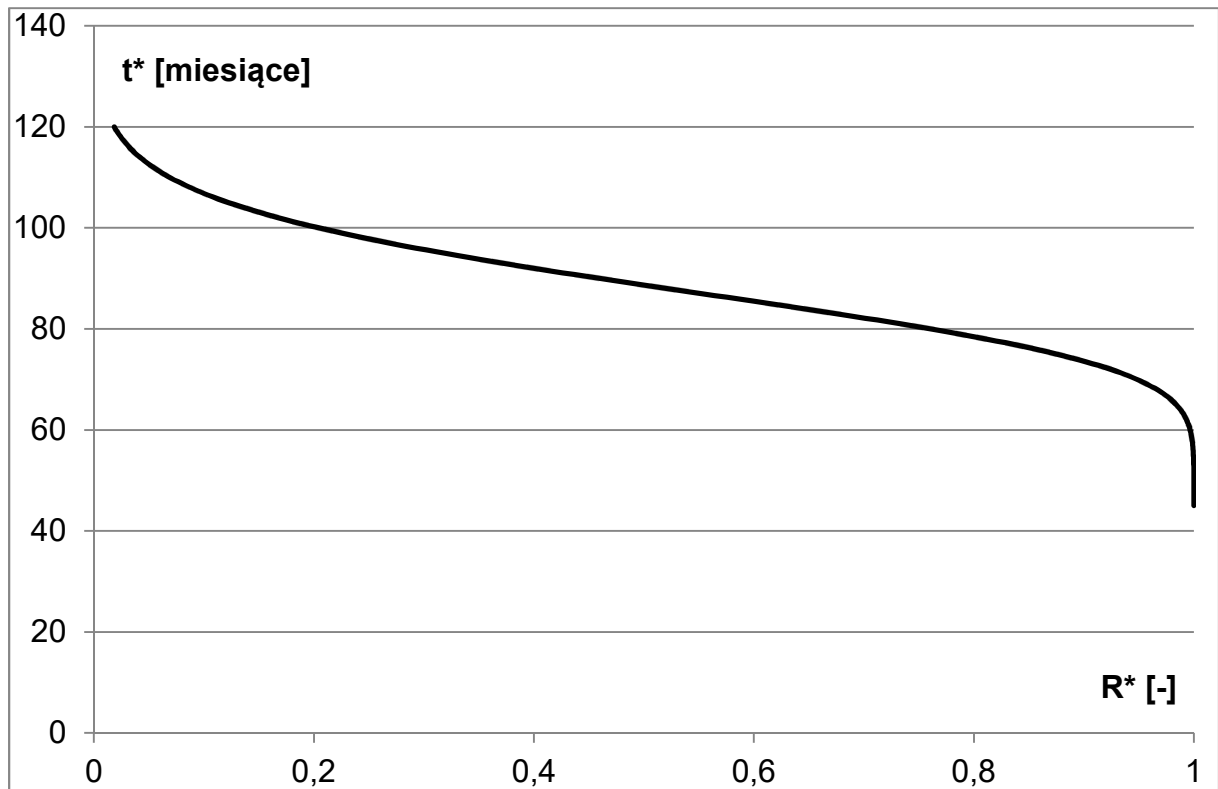
Posiadając zatem dane opisujące wartości parametru diagnostycznego w postaci  $[(z_0, t_0), (z_1, t_1), (z_2, t_2), \dots, (z_n, t_n)]$ , w oparciu o wzory (36) i (37) wyznaczono wartości współczynników funkcji gęstości:

$$b^* = 0,09, \quad a^* = 0,015. \quad (38)$$

Parametr  $z_d$  określono posługując się dokumentacją techniczną wykorzystywaną do realizacji prac obsługowych, w której zamieszczono informację o wartości dopuszczalnej pojemności akumulatorów.

Dysponując zatem wartościami parametrów  $b_\varepsilon^*$ ,  $a_\varepsilon^*$ ,  $z_d$  podstawiono je do równań (11) lub (32) wyznaczając zależność czasu  $t^*$  od prawdopodobieństwa  $R^*$  - rysunek 4. W obu przypadkach (zależność (11) lub (32)) uzyskano ten sam przebieg.





Rys. 4. Zależność prognozowanej trwałości  $t^*$  od niezawodności  $R^*$

Zakładając minimalną wartość niezawodności  $R^* = 0,99$  wyznaczono czas, do którego z założonym prawdopodobieństwem odchyłka parametru diagnostycznego nie przekroczy stanu granicznego:

$$T=63 \text{ [miesiące]} \quad (39)$$

Otrzymaną wartość (39) można wykorzystać w obsłudze technicznej w zależności od przyjętej strategii obsługi. W oparciu o powyższą metodykę można wyznaczyć kolejne okresy w których należy przeprowadzić kontrolę parametru diagnostycznego urządzenia [5,10].

## 5. Uwagi końcowe

W niniejszym opracowaniu przedstawiono zarys metody szacowania trwałości elementów lub zespołów gdy prędkość narastania zmian miała charakter losowy. Jednak sposób tej zmiany był opisany następującą, prostą zależnością

$$\frac{dz}{dt} = c,$$

gdzie  $c$  była zmienną losową określającą możliwość wzrostu odchyłki parametru.

Istnieje możliwość uogólnienia tej metody gdy prędkość narastania odchyłki będzie opisywana następującymi zależnościami:

$$\frac{dz}{dt} = cz, \quad (40)$$

$$\frac{dz}{dt} = ct^{\alpha-1}. \quad (41)$$

W pierwszym przypadku prędkość narastania zmian będzie miała charakter losowy zbliżony do wykładniczego. W drugim przypadku charakter narastania zmian będzie zbliżony do intensywności uszkodzeń w rozkładzie Weibulla.

Reasumując, można stwierdzić, że przedstawiona metoda wydaje się być poprawna i słuszna oraz pozwala na przeprowadzenie analizy stanu technicznego urządzenia ze względu na charakter zmian wartości parametrów diagnostycznych. Przedstawiony przykład obliczeniowy pozwolił na przeprowadzenie weryfikacji opracowanego modelu oraz uwypuklił aplikacyjne walory opracowanej metody. Metoda ta może być przydatna w dalszych pracach nad usprawnieniem zarówno procesu eksploatacyjnego jak i sposobu wykorzystania statków powietrznych z użyciem jego systemów pokładowych, pozwalając na określenie czasu przebywania urządzenia w stanie zdatności.

Ponadto z uwagi na swój uniwersalny charakter przedstawiona metoda, może z powodzeniem być zastosowana do określania trwałości resztkowej dowolnego obiektu technicznego, którego stan techniczny określany jest na podstawie analizy wartości parametrów diagnostycznych.

Przedstawiona metoda w niniejszym artykule może być dalej doskonalona i rozszerzona na inne przypadki narastania losowych zmian typu wykładniczego. Wydaje się, że może być wykorzystana do oceny niezawodności elementów mechanicznych, w przypadku rozpatrywania propagacji pęknięć zmęczeniowych w elementach poddanych losowemu obciążeniu i zastosowaniu wzoru Parisa do określenia prędkości pęknięcia.

## **LITERATURA**

1. DeLurgio SA. Forecasting principles and applications. University of Missouri-Kansas City: Irwin/McGraw-Hill, 1998.
2. Franck TD. Nonlinear Fokker-Planck Equations. Fundamentals and Applications. Berlin Heildenberg: Springer-Verlag, 2005.
3. Grasman J, Herwaarden OA. Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Applications. Berlin Heildenberg: Springer-Verlag, 1999.
4. Idziaszek Z, Grzesik N. Object characteristics deterioration effect on task realizability – outline method of estimation and prognosis. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2014; 16 (3): 433–440.
5. Kinnison H, Siddiqui T. Aviation Maintenance Management. The McGraw-Hill Companies, Inc. 2013.
6. Knopik L, Migawa K. Multi-state model of maintenance policy. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2018; 20 (1): 125–130.
7. Knopik L, Migawa K, Wdzięczny A. Profit optimization in maintenance system, *Polish Maritime Research*, 2016, 1(89): 193-98.
8. Kołowrocki K, Soszyńska Budny J. Reliability and Safety of Complex Technical Systems and Processes. Springer 2011.
9. McPherson JW. Reliability physics and engineering. New York: Springer, 2010.
10. Narayan V. Effective Maintenance Management. New York: Industrial Press Inc., 2012.

11. Pham H. Handbook of Engineering Statistics. London: Springer-Verlag 2006.
12. Rasuo B., Duknic G. Optimization of the aircraft general overhaul process. Aircraft engineering and aerospace technology 2013; 85 (5): 343-354.
13. Restel F. The Markov reliability and safety model of the railway transportation system. Safety and reliability: methodology and applications: proceedings of the European Safety and Reliability Conference, ESREL 2014, 14-18 September, 2015, Wrocław, Poland. CRC Press/Balkema: 303-311.
14. Risken H. The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications. Berlin Heildenberg: Springer Verlag, 1984.
15. Tan CM, Singh P. Time evolution degradation physics in high power white LEDs under high temperature-humidity conditions. IEEE Transactions on Device and Materials Reliability 2014; 14(2): 742-750.
16. Ułanowicz L. Modelling of a process, which causes adhesive seizing (tacking) in precise pairs of hydraulic control devices. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2016; 18 (4): 492-500.
17. Valis D, Koucky M, Zak L. On approaches for non-direct determination of system deterioration. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2012; 1:33-41.
18. Wang P, Tang Y, Baeb SJ, He Y. Bayesian analysis of two-phase degradation data based on change-point Wiener process. Reliability Engineering & System Safety 2018; 170: 244-256.
19. Wang YS, Zhang CH, Zhang SF, Chen X, Tan YY. Optimal design of constant stress accelerated degradation test plan with multiple stresses and multiple degradation measures. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability 2015; 229(1): 83-93.
20. Woch M. Reliability analysis of the PZL-130 Orlik TC-II aircraft structural component under real operating conditions. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2017; 19 (2): 287–295.
21. Zurek J, Tomaszek H, Zieja M. Analysis of structural component's lifetime distribution considered from the aspect of the wearing with the characteristic function applied. Safety, reliability and risk analysis: Beyond the horizon. Amsterdam: Balkema 2014, 2597-2602.