

Article citation info:

SKRUCH P, DŁUGOSZ M, MITKOWSKI W. Mathematical methods for verification of microprocessor-based PID controllers for improving their reliability. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2015; 17 (3): 327–333, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2015.3.1>.

Paweł SKRUCH  
Marek DŁUGOSZ  
Wojciech MITKOWSKI

## MATHEMATICAL METHODS FOR VERIFICATION OF MICROPROCESSOR-BASED PID CONTROLLERS FOR IMPROVING THEIR RELIABILITY

### MATEMATYCZNE METODY TESTOWANIA MIKROPROCESOROWYCH REGULATORÓW PID UMOŻLIWIAJĄCE ZWIĘKSZENIE ICH NIEZAWODNOŚCI\*

*Proportional-Integral-Derivative (PID) control is the most common control algorithm used in industry. The extensive use of electronics and software has resulted in the situation where the digital PID controller using a microprocessor as well as its software implementation replaces existing pneumatic, mechanical and electromechanical solutions. The reliability of the software system is assured by detection and removal of errors that can lead to failures. The paper presents mathematical methods for verification and testing of microprocessor-based PID controllers that can be used to increase the reliability of the system. The presented methodology explores the concept of testing with a model as an oracle.*

**Keywords:** controller, PID, testing, reliability.

*Regulator PID (regulator proporcjonalno-calkująco-różniczkujący) jest najbardziej rozpowszechnionym i najczęściej stosowanym typem regulatora w przemyśle. Intensywny rozwój elektroniki i informatyki spowodował, że cyfrowe regulatory PID budowane na bazie mikroprocesora z odpowiednim oprogramowaniem zastąpiły dotychczasowe rozwiązania pneumatyczne, mechaniczne i elektromechaniczne. Zagwarantowanie niezawodności układu elektronicznego z oprogramowaniem polega między innymi na wykrywaniu i usuwaniu błędów, które mogą prowadzić do awarii. W pracy przedstawiono matematyczne metody weryfikacji mikroprocesorowych regulatorów PID mające na celu wykrycie błędów w systemie i w konsekwencji zwiększenie jego niezawodności poprzez zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia awarii. Metody testowania opierają się na tak zwanym podejściu modelowym, to znaczy, wykorzystują model systemu jako wzorzec zachowania.*

**Słowa kluczowe:** regulator, PID, testowanie, niezawodność.

#### 1. Introduction

Proportional-Integral-Derivative (PID) control is the most common control algorithm used in industry. It has been in use for over a century in various forms: as a purely mechanical device, as a pneumatic device and as an electronic device.

Modern digital PID controller is a system that can be considered as a combination of computer hardware and software designed to perform a dedicated control function. The control is implemented on a custom hardware platform, which is often designed and configured for the particular application. Such systems are called embedded systems [29, 30]. Embedded systems may be observed in common devices employed in everyday living (e.g., coffee machines, washing machines, cell phones) as well as in sophisticated engineering systems (e.g. cars [4, 29], planes, spacecrafts).

PID controllers are also often safety critical systems. Due to the area of application, the PID controller must have high reliability as unexpected failures can be fatal. Ensuring the reliability of embedded software systems based on the detection and removal of errors that can lead to system failure. The process to verify that the system meets the specified requirements is referred to as testing. Testing is also the process of trying to discover every conceivable fault or weakness in a work product [12, 14].

The most common errors that can lead to improper operation of control devices equipped with the software include functional errors in the code, arithmetic errors associated with the use of fixed-point arithmetic, communication and task management errors, lack of robustness to different types of disturbances and work outside the scope of the variability of input signals.

(\*) Tekst artykułu w polskiej wersji językowej dostępny w elektronicznym wydaniu kwartalnika na stronie [www.ein.org.pl](http://www.ein.org.pl)

There are several facts that show clearly possible consequences of poorly tested systems. On February 25, 1991, an Iraqi Scud hit the barracks in Dhahran in Saudi Arabia, killing 28 soldiers from the US Army. This accident was caused by software error in the system's clock [24]. The PATRIOT missile battery has been in operation for 100 hours, by which time the system's internal clock had drifted by one third of a second. For a target moving as fast as Scud, this was equivalent to a position error of 600 meters. Another example is connected with Therac-25 radiation therapy machine that was produced by Atomic Energy of Canada Limited and CGR of France. The machine was involved with at least six known accidents between 1985 and 1987, in which patients were given massive overdoses of radiation, which were in some cases on the order of hundreds of grays [18]. At least five patients died of the overdoses. These accidents were caused by errors in software control application. One of the most infamous computer bugs in history was found during flight 501 that took place on June 4, 1996. This was the first, and unsuccessful, test flight of the European Ariane 5 expendable launch system. Due to an error in the software design (inadequate protection from integer overflow), the rocket veered off its flight path 37 seconds after launch and was destroyed by its automated self-destruct system [19]. As it was an unmanned flight, there were no victims, but the breakup caused the loss of four Cluster mission spacecraft, resulting in a loss of more than \$370 million.

There are two basic classes of software testing: black box testing and white box testing. Black box testing is testing that ignores the internal mechanism of a system or component and focuses solely on the outputs generated in response to selected inputs and execution conditions. White box testing is testing that takes into account the internal mechanism of a system or component.

Black box testing is also called functional testing [2, 3] or specification-based testing. The specification for control systems can be very often presented in the form of models. Test cases should be then generated systematically out of the models [29, 30]. The most popular black box testing techniques include boundary value analysis, equivalence partitioning, decision table testing, state transition testing and use case testing (see e.g. [3, 22]).

Boundary values analysis is a testing technique in which tests are designed to include boundary values of input functions to stimulate the system. The idea comes from the boundary, which is the area where testing is likely to yield defects. Equivalence partitioning is a technique that divides the input data into groups that are expected to exhibit similar behavior, so they can be likely to be processed in the same way. The groups are called equivalence partitions (or classes) and can be also identified for outputs, interval values and parameters. Decision tables are a good way to capture system requirements that contain logical conditions. State transition testing is much used within the embedded software industry and technical automation where the system behavior can be represented using state diagrams. Tests can be also specified from use cases or business scenarios. A use case is a sequence of steps that describe the interactions between an actor (a user of the system) and the system.

White box testing (also called structure-based testing) is based on an identified structure of the software or system. The structure can be considered as the code itself (i.e., statements, decisions or branches), a call tree (a diagram in which modules call other modules), a menu structure, business process or web page structure. Test cases designed with the help of white box testing techniques take into account such input values to cover relevant instruction in the code (instruction testing), decisions (decision testing), conditions, etc.

It should be emphasized that most of the presented techniques and methods are seldom applicable in testing software systems where the dynamics cannot be neglected [20, 27]. The dynamical systems are modeled by difference or differential equations and have usually infinitely many states. There is a need for another approach that will han-

dle continuous aspects of the system (see e.g. [6, 17]). This is because of testing dynamics aspects of such systems requires tests that utilize time continuous input signals and time continuous output signals (even when the system is digitally processed). The process of selecting just a few of the many possible scenarios to be tested is a difficult and challenging task and currently is most often based on qualitative best engineering judgment. Some results [5, 11, 15, 28] developed for hybrid systems can be also applicable to dynamical systems and to fractional-order systems (see e.g. [21]) which recently are of interest to many scientists and engineers.

The paper is organized as follows. In the next section, modeling concepts of the functionality realized by the PID controller are introduced. These concepts are explored further in the next sections and are the base for creating test artifacts such as: test oracle (Section 3), notation of tests (Section 4), implementation of a test comparator (Section 5), test coverage (Section 6) and test generation (Sections 7 and 8). Experimental results are given in Section 9. Conclusions are in Section 10.

## 2. Mathematical description of the PID controller

An embedded PID controller is a system that can be considered as a combination of computer hardware and software designed to perform a dedicated control function. The PID controller (Fig. 1) works in a closed-loop system and attempts to minimize the error  $e(t)$  by adjusting the control input  $u(t)$ . The error is calculated as the difference between a measured process output  $y(t)$  and a desired set point  $y_{sp}(t)$ . The control signal is a result of the following calculation

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

where  $K$  is proportional gain,  $T_i$  is integral time,  $T_d$  is derivative time. The control signal is thus a sum of three terms: the P-term (which is proportional to the error), the I-term (which is proportional to the integral of the error), and D-term (which is proportional to the derivative of the error).

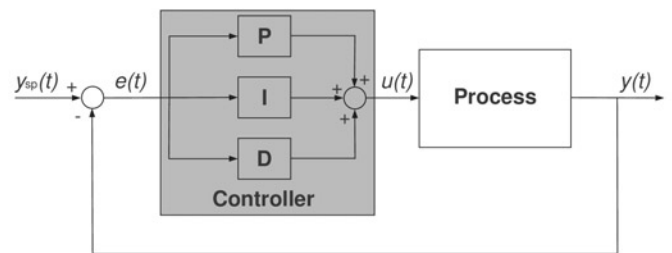


Fig. 1. Block diagram of the closed-loop system with the PID controller

Introduce the notation  $w_1(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$  and  $w_2(t) = \dot{w}_1(t)$  the equation (1) can be written as:

$$u(t) = K w_2(t) + \frac{K}{T_i} w_1(t) + K T_d \dot{w}_2(t), \quad (2)$$

or, equivalently, in matrix notation as:

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{w}(t) + \mathbf{F}u(t), \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}, \quad (3)$$

where  $\mathbf{w}(t) = [w_1(t) \quad w_2(t)]^T \in W \subset \mathbb{R}^2$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(T_d T_d)^{-1} & -T_d^{-1} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ (K T_d)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

The physical and implementation constraints imposed by computer system resources lead to the assumption that the space  $W$  is bounded. The assumption means that the space  $W$  is contained in a circle of finite radius.

### 3. Concept of testing with a model as an oracle

The formulas (1) and (3) specify mathematically the system's behavior in clear and unambiguous form. It can be used in computer simulations in an early phase of development to validate the system concept, calibrate parameters and optimize the system performance. In the next phase, the physical system is designed (i.e., hardware and software) that shall meet the specified requirements in the form of the equations (1), (3). Testing process shall be considered as the last phase in the development process that allows verifying that the physical system behavior is identical to that observed during computer simulations. If the tests fail then the system needs to be redesigned. The physical system that is being tested for the correct operation is often referred as system under test (SUT).

The term test oracle describes a source to determine expected results to compare with the actual result of the SUT [1]. The role of such source in the model-based approach is often played by the model (see Fig. 2). The approach stipulates that the same input is applied to both the SUT and to the model. The input signal is physical in case of the SUT (e.g., voltage, current or resistance) and virtual in case of the model; from logical point of view both signals are equivalent. The judgment whether the result of a test is in conformance with the model is delegated to a test comparator. The test comparator is usually a tool that compares the actual output produced by the SUT with the expected output produced by the model.

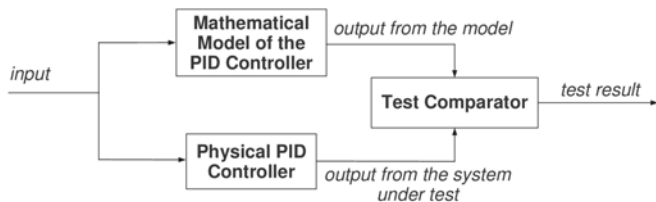


Fig. 2. Concept of testing with a model as an oracle

### 4. Notation of tests

One of the fundamental tasks of software testing is the creation of test cases. A test case can be considered as a set of inputs, execution preconditions and expected outcomes developed for a particular objective, such as to exercise a particular program path or to verify compliance with a specific requirement [13].

Adapting this definition to the SUT modeling concepts (1), a single test case  $T_{\text{case}}^{(j)}$  can be defined as:

$$T_{\text{case}}^{(j)} = \{T^{(j)}, e^{(j)}(\cdot), u^{(j)}(\cdot)\} \quad (5)$$

where  $j=1,2,\dots,N, N \geq 1$  is a label to indicate different test cases,  $e^{(j)} : [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}$  is an input function,  $u^{(j)} : [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}$  is an expected output function,  $T^{(j)}$  stands for test execution time. Notation (5) and the model (1) play the key role in the test selection method presented in Section 8.

When the system model is described by the equation (3), then a single test case  $T_{\text{case}}^{(j)}$  can be presented in the form

$$T_{\text{case}}^{(j)} = \{T^{(j)}, u^{(j)}(\cdot), w^{(j)}(\cdot)\} \quad (6)$$

where  $u^{(j)} : [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}$  is an input function unlike the notation (5) and  $w^{(j)} : [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  is an expected output function. Notation (6) with the model (3) are the base for the test selection method presented in Section 7.

A collection of one or more test cases forms a test suite  $T_{\text{suite}}$ , where:

$$T_{\text{suite}} = \{T_{\text{case}}^{(1)}, T_{\text{case}}^{(2)}, \dots, T_{\text{case}}^{(N)}\}. \quad (7)$$

### 5. Implementation of a test comparator

The test comparator can be considered as a tool that implements a mechanism for determining whether a test passes or fails [14]. In the concept illustrated on Fig. 2, this tool compares the actual output produced by the SUT with the expected output produced by the model (1) or (3).

A possible practical realization of the comparison function for a given test case (5) is presented below:

$$z(T_{\text{case}}^{(j)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \forall_{t \in [0, T^{(j)}]} |u^{(j)}(t) - u_s^{(j)}(t)| < \varepsilon |u^{(j)}(t)|, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (8)$$

where  $z$  denotes the test result, that is,  $z=0$  when the test passes,  $z=1$  when the test fails,  $\varepsilon > 0$  is the tolerance range,  $u_s^{(j)}(\cdot)$  stands for the output produced by the SUT.

In the similar way, the comparison function can be defined for notation (6):

$$z(T_{\text{case}}^{(j)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \forall_{t \in [0, T^{(j)}]} \|w^{(j)}(t) - w_s^{(j)}(t)\| < \varepsilon \|w^{(j)}(t)\|, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

where  $w_s^{(j)}(\cdot)$  is the output produced by the SUT.

### 6. Calculation of test coverage

The degree to which a given test suite  $T_{\text{suite}}$  addresses all specified requirements for a given system is determined by a test coverage measure [13]. The most obvious quantification of the system's behavior exercised by the test suite is computed by dividing the number of the system states explored by the test suite by the cardinality of the entire state space. However, the formula has limited usefulness for dynamical systems (and PID controller belongs to this class of systems) because the state space for such systems contains usually infinite number of states.

In following part of this section it is presented a method for calculation of test coverage that was taken from the paper [25]. The method described therein has been adapted to the model (3). The test coverage  $C_h(T_{\text{suite}})$  of the test suite  $T_{\text{suite}}$  can be defined as follows:

$$C_h(T_{\text{suite}}) = \frac{|\bigcup_{j=1}^{j=N} V_h(T_{\text{case}}^{(j)})|}{|W_h|} \quad (10)$$

where:

$$W_h = \{i = [i_1, i_2]^T \in \mathbb{Z}^2 : \exists w \in W, w \in G_h(i)\} \quad (11)$$

is the transformed state space created from the system state space  $W$ ,

$$G_h(i) = \left\{ w \in \mathbb{R}^2 : w = [w_1, w_2]^T, \frac{w_k}{h_k} = i_k, k = 1, 2 \right\}$$

denotes a partition with the size  $h = [h_1, h_2]^T, h_1, h_2 > 0$ ,  $\left\lceil \frac{w_k}{h_k} \right\rceil$  is the largest integer greater than  $\frac{w_k}{h_k}$ ,

$$V_h(T_{\text{case}}^{(j)}) = \{i \in W_h : \exists t \in [0, T^{(j)}], w^{(j)} \in G_h(i)\} \quad (13)$$

is a set of states of the transformed state space covered by the test case  $T_{\text{case}}^{(j)}$ . It should be noticed that the sum

$$V_h(T_{\text{suite}}) = \bigcup_{j=1}^N V_h(T_{\text{case}}^{(j)}) \quad (14)$$

will contain the information about the states covered by the test suite  $T_{\text{suite}}$ .

In the example presented on Fig. 3, bounded two-dimensional internal state space  $W$  (the area embraced by the bold solid line) has been transformed to the space

$$W_h = \{i = [i_1, i_2]^T \in \mathbb{Z}^2, i_1 = 0, 1, \dots, 8, i_2 = 0, 1, \dots, 4\} \setminus \{[0, 0]^T, [1, 0]^T, [8, 0]^T, [0, 1]^T, [0, 4]^T, [7, 5]^T, [8, 4]^T\}. \quad (15)$$

that consists of 45 elements  $G_h(i) = [i_1, i_1 + 1) \times [i_2, i_2 + 1)$  with the size of  $1 \times 1$ . Fig. 3 contains also system trajectories related to two exemplified test cases:  $T_{\text{case}}^{(1)}$  and  $T_{\text{case}}^{(2)}$ . 10 grid boxes are visited by the system trajectory belonging to the first test case, 9—to the second test case. The test suite  $T_{\text{suite}} = \{T_{\text{case}}^{(1)}, T_{\text{case}}^{(2)}\}$  consisting of these test cases covered in total 17 grid boxes what implies the test coverage at level  $C_h(T_{\text{suite}}) = \frac{17}{45} \approx 0.45(45\%)$ .

### 7. A test selection method for conformance testing

In this section, an algorithm for generating test cases is presented. The algorithm uses the modeling concept (3) of the SUT to generate test cases and calculate test coverage according to the method presented in the previous section. It explores transformed state space by using input signals that steer the system from an initial state to a final state. The selection and completeness of test cases is quantified by the coverage metric (10). The main idea of the presented strategy is to check that the functional specification in the form of the equation (3) is correctly implemented, which is variously referred to in the literature as conformance testing [14], correctness testing [16] or functional testing [13].

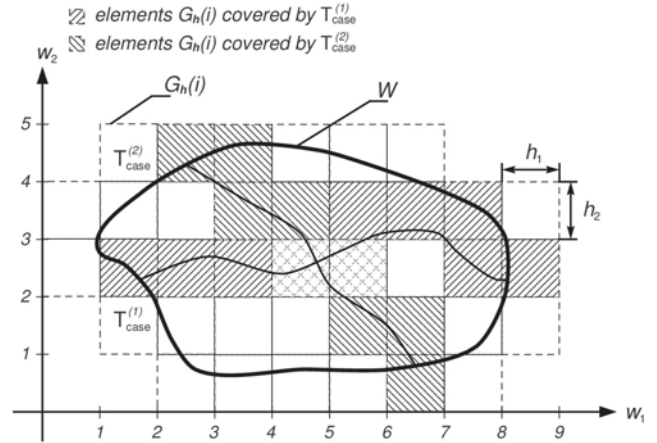


Fig. 3. Illustration of the test coverage for the state space  $W$

### Algorithm 1

- 1°: Set the parameters:  $h = [h_1, h_2]^T, h_1, h_2 > 0, \delta \in (0, 1), T > 0$
- 2°:  $T_{\text{suite}} := \emptyset, V_h(T_{\text{suite}}) := \emptyset, C_h(T_{\text{suite}}) := 0, j := 1$
- 3°: **while**  $C_h(T_{\text{suite}}) < \delta$  **do**
- 4°: Find  $w_a \in G_h(i_a)$  where  $i_a \in W_h \setminus V_h(T_{\text{suite}})$
- 5°: Calculate the control function  $u(\cdot)$  that steers the system from the zero initial state to the final state  $w_a$
- 6°: Calculate the trajectory  $w(t) = \int_0^T e^{(t-\tau)E} F u(\tau) d\tau$  by solving the equation (3)
- 7°:  $T_{\text{case}}^{(j)} = \{T^{(j)}, u^{(j)}(\cdot), w^{(j)}(\cdot)\}$  where  $T^{(j)} \cdot T, u^{(j)}(\cdot) := u(\cdot), w^{(j)}(\cdot) := w(\cdot)$
- 8°:  $T_{\text{suite}} := T_{\text{suite}} \cup T_{\text{case}}^{(j)}$
- 9°: Calculate  $V_h(T_{\text{suite}})$  and  $C_h(T_{\text{suite}})$
- 10°:  $j := j + 1$
- 11°: **end while**

**Remark 1.** The size  $h = [h_1, h_2]^T$  of the partition can be chosen according to the formula

$$h_i \frac{\max_{t \geq 0} |w_i(t)|}{10}, i = 1, 2. \quad (16)$$

For safety critical systems there would be recommended to decrease the granulation of the partitions  $h_i$ . However, it should be clear that too small granulation significantly increases the number of test cases and overall testing effort.

**Remark 2.** The system (3) is controllable as the rank of the controllability matrix is equal to the size of the system, that is,  $\text{rank}[E \ E F] = 2$  (see e.g. [20]). This means that there exist generally many different controls which steer the system from the zero initial state to the final state  $w_a$  at time  $T > 0$ . For example, minimum energy control [20] is probably the easiest computable control steering the system to a desired state under the assumption that the constraints posed on the system are not violated.

### 8. A test selection method for negative testing

In this section, the test selection problem is formulated as an optimization problem. Representative test cases are constructed during optimization procedure using the model (1). The test selection is combined with the test execution and these two activities are conducted at the same time. The main advantage of the approach is focus on



error prone situations that leads to drastically reduced number of representative test cases.

The problem is to find a test case  $T_{\text{case}} = \{T, e(\cdot), u(\cdot)\}$  which is a result of the optimization procedure

$$\max_{e \in E_{\text{ad}}} J(e) = \max_{e \in E_{\text{ad}}} \int_0^T (u(t) - u_s(t))^2 dt \quad (17)$$

where  $E_{\text{ad}}$  stands for the set of admissible error functions. The set  $E_{\text{ad}}$  can be correlated with physical and implementation constraints imposed by computer system resources.

**Algorithm 2**

- 1°: Set the parameters:  $E_{\text{ad}}$  and  $T > 0$
- 2°: Run the optimization procedure for the problem (16) to obtain the solution  $e^* \in E_{\text{ad}}$
- 3°: Calculate the control signal  $u^*(\cdot)$  using the equation (1) for the error signal  $e^*(\cdot)$
- 4°:  $T_{\text{case}} := \{T, e^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ .

**9. Experimental results**

In order to evaluate the efficiency and usability of the presented algorithms as well as their ability to find faults they were applied to the real system. The faults in the form of incorrect parameters of the PID controller have been deliberately introduced to the system implementation. For better illustration of the results the parameters have been modified by 20% from the correct values. In practice, these faults can be caused by the use of fixed-point arithmetic; they can also result from errors in the identification procedure and can be a direct consequence of programmer error. Introduction of incorrect parameters values to the control system can result in different time to reach the steady state than expected, larger overshoot in the system and in the worst case in instability of the closed-loop system. Good control quality depends strongly on the correct settings what is especially important in optimal control problems [7] applicable, for example, for electric motors [8] and internal combustion engines [26].

Consider the model (1) of the PID controller with the following parameters

$$K=3.60, T_i=1.81, T_d=0.45. \quad (18)$$

Next, the functionality described by the equation (1) has been implemented in software, which runs in a microprocessor on the embedded hardware platform, however with incorrect values of the parameters, that is

$$\tilde{K} = 2.88, \tilde{T}_i = 2.17, \tilde{T}_d = 0.36. \quad (19)$$

The entire system has been tested with the help of the algorithm 1 which has been implemented and executed for the following input parameters:  $h=[0.3,0.2]^T, \delta=0.7, T=20$  [s],  $|w_1(t)| \leq 1.5, |w_2(t)| \leq 1.0$  (system implementation constraints). The test suite that guarantees the coverage level higher than  $\delta$  consists of 10 test cases. Elements of the generated test cases of the form of (6) are graphically presented in Figs. 4 and 5. Comparison of the actual trajectory obtained from the SUT with the expected trajectory is shown in Fig. 6. The output from the SUT for the first test case is not within the tolerance range  $\varepsilon=0.1$  relative to the expected output, therefore the test case is qualified as fail. This proves existence of the fault in the system.

Consider the following set of admissible error functions:

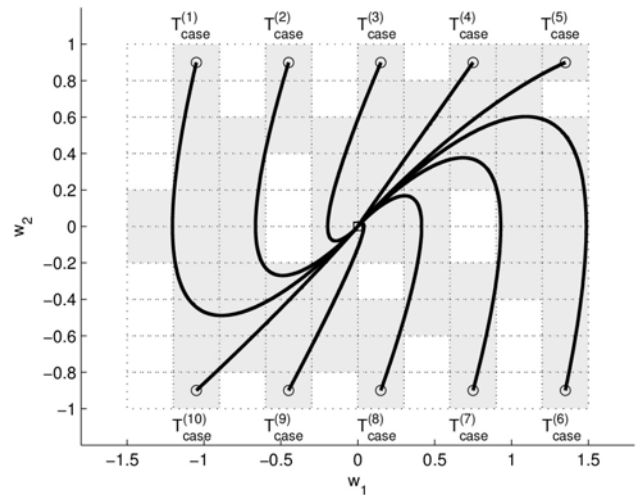


Fig. 4. Trajectories  $w^{(j)}, j=1,2,\dots,10$  and elements (gray rectangles) of the transformed state space  $W_h$  covered by the test cases  $T_{\text{case}}^{(j)}$ . The model trajectories start in  $\square$  and end in  $\circ$

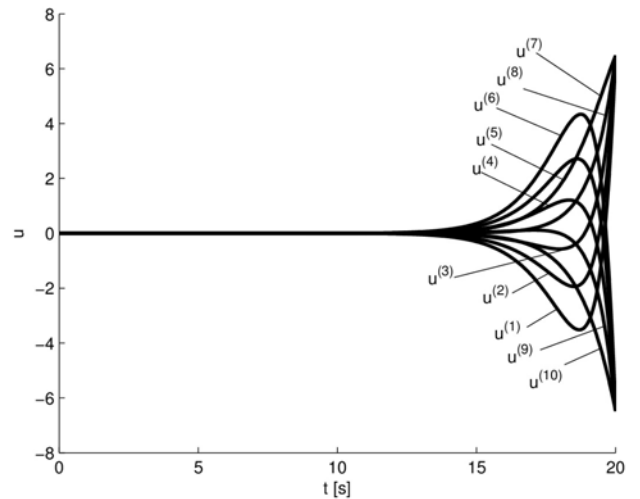


Fig. 5. Input functions for the test cases  $T_{\text{case}}^{(j)}, j=1,2,\dots,10$

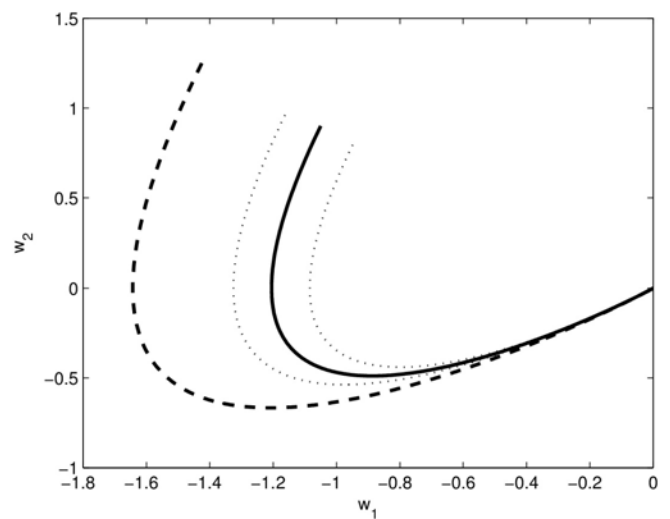


Fig. 6. The comparison of the output function  $w_s^{(1)}$  produced by the tested PID system (dotted line) with the expected output function  $w^{(1)}$  (solid line) produced by the model. The limits of tolerance of 10% are marked on the drawing by a thin dotted line

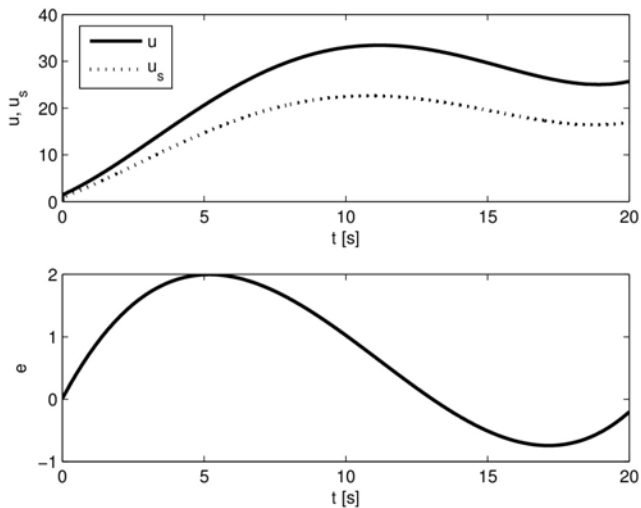


Fig. 7. The elements of the test case generated with the help of the algorithm 2

$$E_{ad} = \{e \in PC([0, T], \mathbb{R}) : e(t) = \alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3, \alpha_i \in \mathbb{R}, |e(t)| \leq 2, i = 0, 1, 2, 3\} \quad (20)$$

that can be used in the optimization procedure (algorithm 2) to find such test cases that maximize the difference (17) between the outputs produced by the tested system and its model within the time \$T\$. The implementation of the algorithm with the Nelder-Mead simplex (direct method) [23] leads to the following local optimal solution:

$$e(t) = 0.0032t^3 - 0.1072t^2 + 0.8534t + 0.0089. \quad (21)$$

Elements of the generated test cases of the form of (5) are graphically presented in Fig. 7. The figure includes also for comparison purposes the actual trajectory obtained from the tested system.

The main advantage of the testing method based on the algorithm 2 is a significant reduction of test cases, which the search is done us-

ing the optimization procedure. The algorithm focuses on error prone situations. As a result, the time and cost associated with the testing of the system can be significantly reduced. Since the effort put into testing is, according to estimates [2], from 30 up to 90 percentage of the overall effort in the projects, the benefits coming from even a very small reduction of this factor can be very profitable. It should be also noted that the algorithm 2 performs the search for test cases while using the physical system and its mathematical representation. Thus, to start the process of testing both the model and the real system are required for. Moreover, the formulation described in the algorithm 2 takes the form of a functional optimization problem, which may appear difficult to solve as it requires transformation to a value optimization problem.

## 10. Conclusions

The paper has presented two different methods for testing embedded PID controllers to provide required quality of the system, assure compliance with safety standards and eliminate errors at the stage of system design. Elimination of errors in the early stages of product development can increase system reliability and reduce the risk of failures during the operational phase. All elements of the testing process (i.e., concept of testing, notation of test cases, implementation of a test comparator, test coverage, selection of test cases) have been formulated and described in using the appropriate mathematical notation. The key role in the presented approach plays the mathematical model that represents intended behavior of the designed system. In this way it was possible to develop methods for testing systems where the dynamics plays an important role and where classical testing techniques cannot be applied to.

The presented approach can be easily generalized to other microprocessor-based control systems. Controllers with dynamic compensator [27], electric motor controllers [7, 8], controllers of internal combustion engines, neural networks controllers [9] and fuzzy logic controllers [10] are examples of the systems that can be verified using the algorithms described in this paper.

## References

1. Adrion W, Brandstad J, Cherniabsky J. Validation, verification and testing of computer software. *Computing Survey* 1982; 14(2): 159-192, <http://dx.doi.org/10.1145/356876.356879>.
2. Beizer B. *Software Testing Techniques*, 2nd ed. Boston: Van Nostrand Reinhold, 1990.
3. Beizer B. *Black-Box Testing: Techniques for Functional Testing of Software and Systems*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
4. Chłopek Z, Biedrzycki J, Lasocki J, Wójcik P. Assessment of the impact of dynamic states of an internal combustion engine on its operational properties. *Eksploracja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2015; 17(1): 35-41, <http://dx.doi.org/10.17531/ein.2015.1.5>.
5. Dang T. Model-based testing of hybrid systems. In: *Model-Based Testing for Embedded Systems*. Boca Raton: CRC Press 2011; 383-423, <http://dx.doi.org/10.1201/b11321-15>.
6. Dang T, Nahhal T. Coverage-guided test generation for continuous and hybrid systems. *Formal Methods in System Design* 2009; 34(2): 183-213, <http://dx.doi.org/10.1007/s10703-009-0066-0>.
7. Długosz M. Problemy optymalizacyjne układów napędowych robotyki. *Przegląd Elektrotechniczny – Electrical Review* 2011; 87(9a): 238-242.
8. Długosz M, Lerch T. Komputerowa identyfikacja parametrów silnika prądu stałego. *Przegląd Elektrotechniczny – Electrical Review* 2010; 85(2): 34-38.
9. Długosz R, Kolasa W, Pedrycz M, Szulc M. Parallel programmable asynchronous neighborhood mechanism for Kohonen SOM implemented in CMOS technology. *IEEE Transactions on Neural Networks* 2011; 22(12): 2091-2104, <http://dx.doi.org/10.1109/TNN.2011.2169809>.
10. Długosz R, Pedrycz W. Łukasiewicz fuzzy logic networks and their ultra low power hardware implementation. *Neurocomputing* 2010; 73(7-9): 1222-1234, <http://dx.doi.org/10.1016/j.neucom.2009.11.027>.
11. Esposito J. Automated test trajectory for hybrid systems. *Proceedings of the 35th Southeastern Symposium on System Theory* 2003; 441-444, <http://dx.doi.org/10.1109/SSST.2003.1194609>.
12. IEEE Std 1012-2004. IEEE standard for software verification and validation, 2004.
13. IEEE Std 61012-1990. IEEE standard glossary of software engineering terminology, 1990.
14. ISTQB International Software Testing Qualification Board. Standard glossary of terms used in software testing, version 2.1, 2010.

15. Julius A, Fainekos G, Anand M, Lee I, Pappas G. Robust test generation and coverage for hybrid systems. Proceedings of the 10th International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC), Pisa 2007; 329-342, [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71493-4\\_27](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-71493-4_27).
16. Kaner C, Faulk J, Nguyen H. Testing Computer Software, 2nd ed. New York: John Willey & Sons, 1995.
17. LaValle S, Kuffner J. Rapidly-exploring random trees: progress and prospects. In: Algorithmic and Computational Robotics: New Directions 2001; 293-308.
18. Leveson N, Turner S. An investigation of the Therac-25 accidents. IEEE Computer 1993; 27(7): 18-41; <http://dx.doi.org/10.1109/MC.1993.274940>.
19. Lions J. ARIANE 5. Flight 501 failure. Ariane 501 Inquiry Board Report, Paris, 1996.
20. Mitkowski W. Stabilizacja systemów dynamicznych. Warszawa: WNT, 1991.
21. Mitkowski W, Skruch P. Fractional-order models of the supercapacitors in the form of RC ladder networks. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences 2013; 61(3): 581-587, <http://dx.doi.org/10.2478/bpasts-2013-0059>.
22. Myers G. The Art of Software Testing, 2nd ed. New York: John Willey & Sons, 2004.
23. Nelder J, Mead R. A simplex method for function minimization. The Computer Journal 1965; 7(4): 308-313, <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>.
24. Skeel R. Roundoff error and the Patriot missile. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) News 1992; 25(4): 11.
25. Skruch P. A coverage metric to evaluate tests for continuous-time dynamic systems. Central European Journal of Engineering 2011; 1(2): 174-180, <http://dx.doi.org/10.2478/s13531-011-0015-8>.
26. Skruch P. An educational tool for teaching vehicle electronic system architecture. International Journal of Electrical Engineering Education 2011; 48(2): 174-183, <http://dx.doi.org/10.7227/IJEEE.48.2.5>.
27. Skruch P. Feedback stabilization of a class of nonlinear second-order systems. Nonlinear Dynamics 2010; 59(4): 681-692, <http://dx.doi.org/10.1007/s11071-009-9570-4>.
28. Tabuada P. Verification and Control of Hybrid Systems. Dordrech: Springer, 2009, <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-0224-5>.
29. Zander-Nowicka J. Model-based testing of real-time embedded systems in the automotive domain. PhD thesis. Berlin: Fraunhofer IRB Verlag, 2009.
30. Zander J, Schieferdecker I, Mosterman P. (Eds) Model-Based Testing for Embedded Systems. Boca Raton: CRC Press, 2012.

---

**Paweł SKRUCH**

**Marek DŁUGOSZ**

**Wojciech MITKOWSKI**

Department of Automatics and Biomedical Engineering

AGH University of Science and Technology

Al. A. Mickiewicza 30/B1, 30-059 Kraków, Poland

E-mails: [pawel.skruch@agh.edu.pl](mailto:pawel.skruch@agh.edu.pl), [mdlugosz@agh.edu.pl](mailto:mdlugosz@agh.edu.pl),

[wojciech.mitkowski@agh.edu.pl](mailto:wojciech.mitkowski@agh.edu.pl)

---

**Dr inż. Paweł Skruch**

**Dr inż. Marek Długosz**

**Prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski**

Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej

Akademia Górniczo-Hutnicza

Al. A. Mickiewicza 30/B1, 30-059 Kraków, Polska

E-mail: [pawel.skruch@agh.edu.pl](mailto:pawel.skruch@agh.edu.pl), [mdlugosz@agh.edu.pl](mailto:mdlugosz@agh.edu.pl), [wojciech.mitkowski@agh.edu.pl](mailto:wojciech.mitkowski@agh.edu.pl)

**Matematyczne metody testowania mikroprocesorowych regulatorów PID umożliwiające zwiększenie ich niezawodności**

**Słowa kluczowe:** regulator, PID, testowanie, niezawodność

**Streszczenie:** Regulator PID (regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący) jest najbardziej rozpowszechnionym i najczęściej stosowanym typem regulatora w przemyśle. Intensywny rozwój elektroniki i informatyki spowodował, że cyfrowe regulatory PID budowane na bazie mikroprocesora z odpowiednim oprogramowaniem zastąpiły dotychczasowe rozwiązania pneumatyczne, mechaniczne i elektromechaniczne. Zagwarantowanie niezawodności układu elektronicznego z oprogramowaniem polega między innymi na wykrywaniu i usuwaniu błędów, które mogą prowadzić do awarii. W pracy przedstawiono matematyczne metody weryfikacji mikroprocesorowych regulatorów PID mające na celu wykrycie błędów w systemie i w konsekwencji zwiększenie jego niezawodności poprzez zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia awarii. Metody testowania opierają się na tak zwanym podejściu modelowym, to znaczy, wykorzystują model systemu jako wzorzec zachowania.

## **1. Wprowadzenie**

Regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID) jest najbardziej rozpowszechnionym i najczęściej stosowanym typem regulatora w przemyśle. Regulator PID jest stosowany od blisko stu lat w różnych formach: jako urządzenie czysto mechaniczne, pneumatyczne, elektromechaniczne, a ostatnio także jako urządzenie cyfrowe. Współczesny cyfrowy regulator PID jest specjalizowanym układem elektronicznym wyposażonym w oprogramowanie realizujące określoną funkcję sterowania. Realizacja sterowania odbywa się z reguły na niestandardowej platformie sprzętowej, która jest bardzo często skonstruowana i skonfigurowana na potrzeby danego przypadku. Regulatory PID są też często systemami krytycznymi ze względu na bezpieczeństwo. Tego typu systemy określa się mianem systemów wbudowanych [29, 30]. Systemy wbudowane są obecne we wszystkich dziedzinach począwszy od skomplikowanych urządzeń badawczych, poprzez aparaturę pomiarową, sterowniki stosowane w motoryzacji [4, 29] i lotnictwie aż do popularnego sprzętu gospodarstwa domowego. Ze względu na obszary zastosowań, regulator PID musi charakteryzować się dużą niezawodnością określoną np. poprzez prawdopodobieństwo wystąpienia awarii. Zagwarantowanie niezawodności elektronicznego regulatora PID polega między innymi na wykrywaniu i usuwaniu błędów, które mogą prowadzić do awarii systemu. Proces sprawdzania układu w celu zweryfikowania czy spełnia on wyspecyfikowane wymagania określa się mianem testowania. Testowanie to również działanie zmierzające do wykrywania błędów w układzie [12, 14].



Do najczęściej spotykanych błędów, które mogą przyczynić się do nieprawidłowej pracy urządzeń sterujących wyposażonych w oprogramowanie należy zaliczyć błędy funkcjonalne związane z niewłaściwą implementacją, błędy arytmetyczne i związane z zastosowaniem arytmetyki stałoprzecinkowej, błędy związane z komunikacją oraz z zarządzaniem zadaniami, brak odporności systemu na zakłócenia i pracę poza zakresem zmienności sygnałów wejściowych.

Istnieje wiele udokumentowanych przypadków, które pokazują, że konsekwencje wynikające z błędów w oprogramowaniu w systemach sterujących mogą być bardzo poważne. Jednym z takich przypadków jest tragedia w koszarach w Dhahranie w Arabii Saudyjskiej, w której 25 lutego 1991 roku uderzyła iracka rakietą typu SCUD zabijając 28 amerykańskich żołnierzy. Ten wypadek był spowodowany błędem w systemie obrony przeciwlotniczej PATRIOT [24]. Do obliczania celu pocisku był wykorzystywany zegar, który liczył czas w zmiennej całkowitej. Zmienna ta w celu dalszych obliczeń była rzutowana na liczbę zmiennoprzecinkową. Liczby zmiennoprzecinkowe mają taką własność, że małe liczby są zapamiętywane z dużą dokładnością, a wielkie liczby z niewielką dokładnością. Bateria rakiet PATRIOT pracowała nieprzerwalnie przez 100 godzin co spowodowało, że błąd zegara wynosił około 1/3 sekundy. Błąd ten przy prędkościach pocisków balistycznych spowodował błąd obliczenia celu pocisku o około 600 metrów. Inny przypadek jest związany z maszyną do radioterapii Therac-25, która została wyprodukowana przez kanadyjską firmę Atomic Energy i francuską CGR. Między 1985 a 1987 rokiem odnotowano przynajmniej 6 przypadków, w których pacjentom podano za dużą dawkę promieniowania w efekcie czego 5 pacjentów zmarło w wyniku choroby popromiennej [18]. Wypadki te były spowodowane błędami w oprogramowaniu sterującym pracą maszyny. Niewątpliwie najbardziej spektakularny efekt błędu komputerowego w historii miał miejsce w czasie lotu testowego europejskiej rakiety Ariane 5. Po 37 sekundach lotu rakietę zesła z kursu i została zniszczona przez system autodestrukcji [19]. Błąd był spowodowany brakiem zabezpieczenia w oprogramowaniu podczas rzutowania 64-bitowej zmiennej zmiennoprzecinkowej na 16-bitową zmienną całkowitą. Jako, że był to lot bezzałogowy nie było ofiar śmiertelnych, ale katastrofa spowodowała straty szacowane na 370 milionów dolarów.

Testy dzieli się generalnie na dwa typy: „białej skrzynki” i „czarnej skrzynki”. Testy czarnoskrzynkowe to takie, w których tworzenie przypadków testowych opiera się na założeniach funkcjonalnych jakie powinien spełniać układ zgodnie z wymaganiami. Testy białoskrzynkowe to takie, w których tworzenie przypadków testowych opiera się na budowie wewnętrznej programu, który realizuje określone funkcje układu.

Techniki czarnoskrzynkowe zwane są również technikami opartymi na specyfikacji [2, 3]. Specyfikacja dla układów automatyki to przede wszystkim modele matematyczne. Przypadki testowe powinny być zatem wytwarzane systematycznie na podstawie modeli [29, 30]. Do najważniejszych technik czarnoskrzynkowych zalicza się analizę wartości brzegowych, podział na klasy równoważności, testowanie w oparciu o tablicę decyzyjną, testowanie przejść pomiędzy stanami, testowanie w oparciu o przypadki użycia (zob. np. [3, 22]).

Technika projektowania przypadków testowych w oparciu o analizę wartości brzegowych polega na wykorzystaniu wartości brzegowych funkcji sterujących do stymulacji systemu. U podstaw tej metody leży przypuszczenie, że na brzegu przestrzeni sterowania system może zachowywać się nieprawidłowo. Podział na klasy równoważności jest techniką polegającą na podziale przestrzeni sterowania lub przestrzeni wyjścia na podzbiory, dla których zakłada się na podstawie specyfikacji, że zachowanie układu będzie takie samo lub podobne. Podzbiory te nazywa się klasami równoważności. Można je wyznaczyć w oparciu o wartości wejścia i wyjścia układu, parametry układu oraz jego własności. Zbudowanie tak zwanej tablicy decyzyjnej, czyli tabelarycznego ujęcia wszystkich warunków, jakie mogą

zdarzyć się w systemie wraz z działaniami, jakie należy podjąć, pomaga w testowaniu układów sterowanych zdarzeniami i opisywanych warunkami logicznymi. Testowanie przejść pomiędzy stanami sprawdza się w układach, które opisuje się za pomocą tak zwanych maszyn stanów. Taka forma opisu jest bardzo często stosowana w układach wbudowanych i automatyce. Typowym przykładem takiego opisu są wszelkiego rodzaju automaty, czyli iteracyjne modele zachowania się systemu oparte o tablicę dyskretnych przejść między stanami. Testy mogą być też tworzone w oparciu o przypadki użycia. Przypadek użycia jest sekwencją prostych kroków określających interakcję pomiędzy wymuszeniem w systemie a samym systemem.

Techniki projektowania przypadków testowych w oparciu o analizę programu realizującego określony algorytm lub określoną funkcję regulacji określa się mianem technik białoskrzynkowych. Podstawą takich technik jest poprawne zidentyfikowanie struktury oprogramowania lub systemu. Przykładowo, taką strukturą jest kod, tzn. instrukcje, decyzje i rozgałęzienia, może nią być także drzewo wywołań, czyli diagram, w którym moduły wołają inne moduły, strukturą może być także struktura menu, struktura panelu sterującego, itp. Konstruując przypadki testowe bierze się pod uwagę takie wartości wejściowe, aby uzyskać wykonanie odpowiednich instrukcji w kodzie (testowanie instrukcji), decyzji (testowanie decyzyjne), warunków, itp.

Należy podkreślić, że większość z przedstawionych technik i metod testowania nie zbyt dobrze się sprawdza w przypadku układów, w których dynamika odgrywa istotną rolę i której nie można zaniedbać [20, 27]. Jeżeli chcemy przetestować czy zbudowany układ charakteryzują się określoną dynamiką musimy posłużyć się już bardziej rozbudowanym aparatem matematycznym i metodami (zob. np. [6, 17]), które pozwalają na sprawdzenie własności dynamicznych takich jak czas narastania, szybkość zmierniania do stanu ustalonego, itd. Niestety na chwilę obecną jest niewiele opracowań, które dotyczą testowania systemów dynamicznych. Przez systemy dynamiczne rozumiemy tutaj układy opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub cząstkowymi, lub też układy opisane równaniami różnicowymi. Pewne rezultaty dotyczące testowania systemów hybrydowych, które można próbować zastosować do systemów czysto dynamicznych są przedmiotem prac [5, 11, 15, 28]. Podobne zagadnienia będą również dotyczyć, ostatnio zyskujących na popularności, układów niecałkowitego rzędu (zob. np. [21]).

Struktura niniejszej pracy jest następująca. W rozdziale 2 został przedstawiony matematyczny opis regulatora PID. Opis ten stanowi jednocześnie definicję wymagań funkcjonalnych dla konstruowanego fizycznego urządzenia. Koncepcja testowania oparta na modelu systemu jako wzorcowi zachowania jest tematem rozdziału 3. Kolejne rozdziały pracy opisują za pomocą odpowiedniego aparatu matematycznego najważniejsze elementy występujące w procesie testowania, tj. notację testów (rozdział 4), sposób określania wyników testów (rozdział 5) i pokrycie testowe (rozdział 6). Algorytmy wyboru przypadków testowych zostały opisane w rozdziałach 7 i 8. Przedstawione algorytmy oparte są o tak zwane testy zgodności i testy negatywne. Rozdział 9 zawiera przykład ilustrujący poruszane w pracy zagadnienia. Rozdział 10 zawiera podsumowanie.

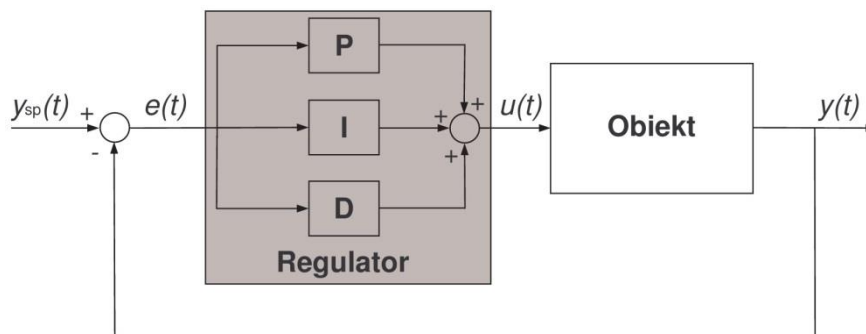
## **2. Matematyczny opis regulatora PID**

Mikroprocesorowy regulator PID jest systemem elektronicznym wyposażonym w oprogramowanie realizujące określoną funkcję sterowania. Regulator PID pracuje w pętli sprzężenia zwrotnego (rys. 1) i działa w taki sposób, aby zredukować uchyb  $e(t)$  poprzez odpowiednie dostosowanie sygnału sterującego  $u(t)$  podawanego na wejście regulowanego obiektu. Uchyb jest obliczany jako różnica pomiędzy wartością zmiennej wyjściowej obiektu  $y(t)$  a pożądaną wartością zadaną  $y_{sp}(t)$ . Sygnał sterujący jest wynikiem wyliczenia

zawierającego trzy oddzielne człony: proporcjonalny „P”, całkujący „I” oraz różniczkujący „D”, to znaczy

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (1)$$

gdzie  $K$  oznacza wzmacnienie członu proporcjonalnego,  $T_i$  jest czasem całkowania dla członu całkującego,  $T_d$  oznacza czas różniczkowania dla członu różniczkującego.



Rys. 1. Schemat blokowy zamkniętego układu sterowania z regulatorem PID

Wprowadzając nowe oznaczenia  $w_1(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$  oraz  $w_2(t) = \dot{w}_1(t)$  równanie (1) będzie można zapisać w postaci

$$u(t) = Kw_2(t) + \frac{K}{T_i}w_1(t) + KT_d\dot{w}_2(t), \quad (2)$$

lub równoważnie w notacji macierzowej

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{w}(t) + \mathbf{F}u(t), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{0}, \quad (3)$$

przy czym  $\mathbf{w}(t) = [w_1(t) \quad w_2(t)]^T \in W \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(T_i T_d)^{-1} & -T_d^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ (KT_d)^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

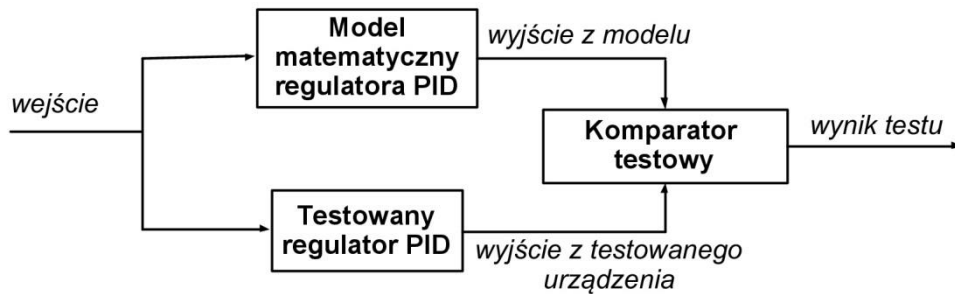
Ograniczenia fizyczne oraz ograniczenia wynikające z zasobów systemowych komputera prowadzą do założenia, że zbiór  $W$  musi być ograniczony. Oznacza to, że zbiór  $W$  może być zawarty w pewnym okręgu o skończonym promieniu.

### 3. Koncepcja testowania w oparciu o model systemu jako wzorzec zachowania

Równania (1) i (3) opisują model matematyczny regulatora PID i jednocześnie określają podstawowe wymagania funkcjonalne dla konstruowanego urządzenia. Dalsze czynności inżynierskie polegają na zaprojektowaniu i zbudowaniu fizycznego urządzenia, które będzie implementować funkcję regulacji określoną przez równania (1) i (3). W kolejnej fazie, zbudowany układ jest poddawany testowaniu w celu wykrycia błędów w systemie. Proces testowania można przeprowadzić w oparciu o model systemu (1) lub (3), który stanowi w tym wypadku wzorzec zachowania.

Koncepcja testowania przedstawiona na rys. 2 wykorzystuje model w mechanizmie wyznaczania przewidywanych wyników ('wyjście z modelu') do porównania z wynikami

podawanymi przez testowany system ('wyjście z testowanego urządzenia') w reakcji na jednakowe wymuszenie ('wejście') [1]. Sygnał wymuszający podawany na model jest sygnałem wirtualnym, a sygnał podawany na testowany system jest sygnałem fizycznym (np. napięciowym, prądowym, rezystancyjnym) – logicznie oba te sygnały są równoważne. Porównywanie wyników jest realizowane przez urządzenie zwane komparatorem testowym. Rezultat tego porównania reprezentuje funkcja, która przyjmuje wartości binarne, tj. „wynik testu = 0” (tzw. test pozytywny) jeżeli wyjście z testowego urządzenia pokrywa się z wyjściem z modelu w zakresie przyjętej tolerancji, i „wynik testu = 1” (tzw. test negatywny) w przeciwnym przypadku.



Rys. 2. Koncepcja testowania oparta o model systemu jako wzorzec zachowania

#### 4. Notacja testów

Głównym elementem w procesie testowania jest tworzenie tak zwanych przypadków testowych. Przypadek testowy to zbiór wejść, warunków wykonania oraz oczekiwanych wyników utworzony aby zweryfikować określone wymagania [13].

Dla wymagań określonych przez model (1) przypadek testowy można opisać wykorzystując następującą notację matematyczną

$$T_{\text{case}}^{(j)} = \{T^{(j)}, e^{(j)}(\cdot), u^{(j)}(\cdot)\}, \quad (5)$$

gdzie  $T_{\text{case}}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N \geq 1$  jest oznaczeniem przypadku testowego,  $e^{(j)}: [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}$  oznacza funkcję wejścia,  $u^{(j)}: [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}$  oznacza oczekiwaną funkcję wyjścia,  $T^{(j)}$  jest czasem, w którym wykonuje się dany przypadek testowy. Notacja (5) oraz model (1) będą później, w rozdziale 8 pracy, wykorzystane w metodzie wyboru przypadków testowych opartej na testowaniu negatywnym.

Dla wymagań określonych przez model (3) przypadek testowy można opisać za pomocą następującej notacji

$$T_{\text{case}}^{(j)} = \{T^{(j)}, u^{(j)}(\cdot), w^{(j)}(\cdot)\}, \quad (6)$$

gdzie  $u^{(j)}: [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}$  oznacza funkcję wejścia w odróżnieniu od notacji (5), a  $w^{(j)}: [0, T^{(j)}] \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest oczekiwaną funkcją wyjścia. Notacja (6) oraz model (3) będą wykorzystane w rozdziale 7 w metodzie wyboru przypadków testowych opartej na testowaniu zgodności.

Zbiór składający się z jednego lub więcej przypadków testowych będziemy oznaczać jako  $T_{\text{suite}}$ , przy czym

$$T_{\text{suite}} = \{T_{\text{case}}^{(1)}, T_{\text{case}}^{(2)}, \dots, T_{\text{case}}^{(N)}\}. \quad (7)$$

#### 5. Komparator testowy



Komparator testowy to narzędzie, które dla danego przypadku testowego porównuje rzeczywiste rezultaty wygenerowane przez testowane urządzenie z oczekiwanymi rezultatami [14]. Oczekiwane rezultaty w koncepcji przedstawionej na rys. 2 są uzyskiwane z modelu systemu określonego przez równania (1) lub (3).

Przykładowa realizacja komparatora testowego dla wymagań określonych przez model (1) oraz dla notacji (5) może wyglądać następująco

$$z(T_{\text{case}}^{(j)}) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \forall_{t \in [0, T^{(j)}]} |u^{(j)}(t) - u_s^{(j)}(t)| < \varepsilon |u^{(j)}(t)|, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (8)$$

gdzie  $z$  oznacza wynik testu, tj.  $z = 0$  dla testu pozytywnego,  $z = 1$  dla testu negatywnego,  $\varepsilon > 0$  jest przyjętą wartością tolerancji,  $u_s^{(j)}(\cdot)$  jest funkcją wyjściową uzyskaną z testowanego urządzenia.

Dla modelu (3) oraz notacji (6) komparator testowy może działać według następującego schematu

$$z(T_{\text{case}}^{(j)}) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \forall_{t \in [0, T^{(j)}]} \|\mathbf{w}^{(j)}(t) - \mathbf{w}_s^{(j)}(t)\| < \varepsilon \|\mathbf{w}^{(j)}(t)\|, \\ 1 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases} \quad (9)$$

przy czym  $\mathbf{w}_s^{(j)}(\cdot)$  jest funkcją wyjściową wygenerowaną przez testowane urządzenie.

## 6. Pokrycie testowe

Niewątpliwie bardzo ważnym elementem w procesie testowania jest określenie tak zwanego pokrycia strukturalnego, czyli miary wskazującej jaki odsetek wybranych elementów jest „pokryty” (wykonany, osiągnięty) podczas wykonywania zestawu przypadków testowych [13]. Określenie dobrych technik pomiaru pokrycia strukturalnego w przypadku układów dynamicznych, a do takich należy niewątpliwie regulator PID, jest zadaniem niełatwym. Naturalnym wyborem wydaje się pomiar pokrycia stanów sytemu. W przypadku systemów dynamicznych przestrzeń stanów jest jednak zbiorem o nieskończonej liczbie elementów i zbudowanie przypadków testowych, które przechodzą przez wszystkie stany systemu może okazać się niemożliwe do realizacji.

W dalszej części pracy zostanie opisany sposób wyliczania pokrycia testowego dla ciągłych systemów dynamicznych, który został zaczerpnięty z pracy [25]. Opisana tam metoda odnosi się do modelu (3). Pokrycie testowe  $C_h(T_{\text{suite}})$  dla danego zestawu przypadków testowych  $T_{\text{suite}}$  definiuje się w następujący sposób

$$C_h(T_{\text{suite}}) = \frac{|\cup_{j=1}^N V_h(T_{\text{case}}^{(j)})|}{|W_h|}, \quad (10)$$

gdzie

$$W_h = \{\mathbf{i} = [i_1, i_2]^T \in \mathbb{Z}^2: \exists_{\mathbf{w} \in W} \mathbf{w} \in G_h(\mathbf{i})\} \quad (11)$$

jest zbiorem uzyskanym z przestrzeni stanów  $W$  poprzez jej podział na prostokątne elementy

$$G_h(\mathbf{i}) = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2: \mathbf{w} = [w_1, w_2]^T, \left[ \frac{w_k}{h_k} \right] = i_k, k = 1, 2 \right\} \quad (12)$$

o wielkości określonej przez wektor  $\mathbf{h} = [h_1, h_2]^T$ ,  $h_1, h_2 > 0$ .  $\lfloor \frac{w_k}{h_k} \rfloor$  we wzorze (12) oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż  $\frac{w_k}{h_k}$ . Wówczas zbiór określony jako

$$V_{\mathbf{h}}(T_{\text{case}}^{(j)}) = \{ \mathbf{i} \in W_{\mathbf{h}} : \exists_{t \in [0, T^{(j)}]} \mathbf{w}^{(j)} \in G_{\mathbf{h}}(\mathbf{i}) \} \quad (13)$$

będzie podzbiorem  $W_{\mathbf{h}}$  zawierającym elementy, które są pokrywane przez dany przypadek testowy  $T_{\text{case}}^{(j)}$ . Podobnie, zbiór

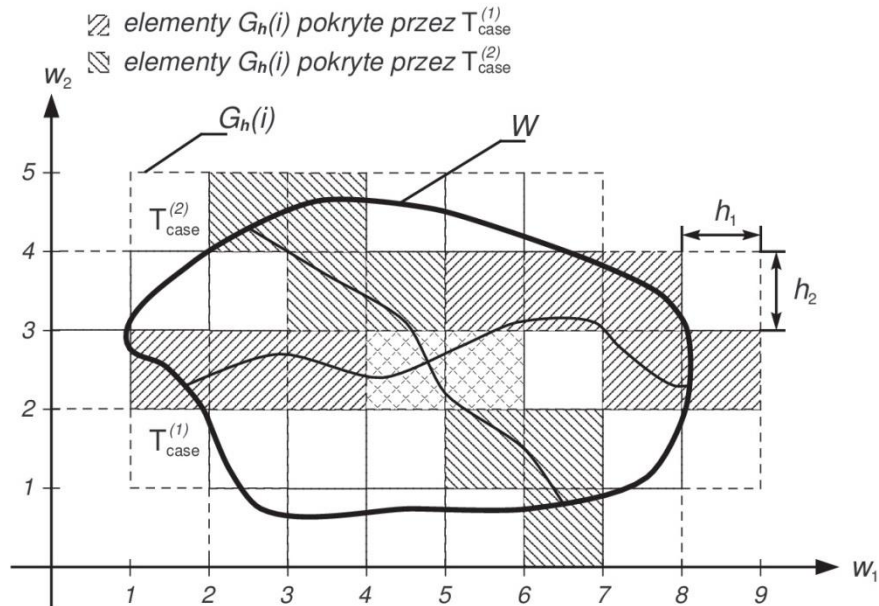
$$V_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}}) = \bigcup_{j=1}^{j=N} V_{\mathbf{h}}(T_{\text{case}}^{(j)}) \quad (14)$$

będzie obejmować te elementy ze zbioru  $W_{\mathbf{h}}$ , które są pokrywane przez cały zestaw przypadków testowych  $T_{\text{suite}}$ .

Rys. 3 zawiera graficzną ilustrację obliczania pokrycia testowego za pomocą zaprezentowanej metody. Przestrzeń stanu  $W$  (obszar zawarty wewnątrz zamkniętej krzywej zaznaczonej na rysunku pogrubioną linią) został podzielony na 45 prostokątnych elementów  $G_{\mathbf{h}}(\mathbf{i}) = [i_1, i_1 + 1) \times [i_2, i_2 + 1)$  o wymiarach  $1 \times 1$

$$W_{\mathbf{h}} = \{ \mathbf{i} = [i_1, i_2]^T \in \mathbb{Z}^2, i_1 = 0, 1, \dots, 8, i_2 = 0, 1, \dots, 4 \} \setminus \{ [0, 0]^T, [1, 0]^T, [8, 0]^T, [0, 1]^T, [0, 4]^T, [7, 5]^T, [8, 4]^T \}. \quad (15)$$

Rysunek zawiera dodatkowo wykres trajektorii  $\mathbf{w}$  przynależących do dwóch przykładowych przypadków testowych  $T_{\text{case}}^{(1)}$  i  $T_{\text{case}}^{(2)}$ . Z wykresu łatwo można odczytać, że pierwszy przypadek testowy pokrywa 10 elementów ze zbioru  $W_{\mathbf{h}}$ , zaś drugi przypadek testowy – 9 elementów. Zestaw przypadków testowych  $T_{\text{suite}} = \{ T_{\text{case}}^{(1)}, T_{\text{case}}^{(2)} \}$  pokrywa w sumie 17 elementów ze zbioru  $W_{\mathbf{h}}$  co implikuje pokrycie testowe  $C_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}}) = \frac{17}{45} \approx 0.45$  (45 %).



Rys. 3. Ilustracja koncepcji obliczania pokrycia testowego dla przestrzeni stanów  $W$

## 7. Metoda wyboru przypadków testowych oparta na testowaniu zgodności

W tym rozdziale zostanie zaprezentowany algorytm wyboru przypadków testowych oparty na tak zwanym testowaniu zgodności. Testowanie zgodności [14] (w literaturze można również spotkać określenia testowanie poprawności [16] czy też testowanie funkcjonalne [13]) to podejście polegające na weryfikacji zgodności implementacji z odpowiednią specyfikacją (w tym przypadku z modelem matematycznym). Przedstawiony algorytm wykorzystuje model systemu w postaci (3) oraz pokrycie testowe liczone według schematu z rozdziału 6.

### Algorytm 1

- 1°: Określ granulację  $\mathbf{h} = [h_1, h_2]^T$ ,  $h_1, h_2 > 0$ , wymaganą wartość pokrycia testowego  $\delta \in (0, 1]$  oraz czas wykonywania testów  $T > 0$ .
- 2°: Podstaw  $T_{\text{suite}} := \emptyset$ ,  $V_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}}) := \emptyset$ ,  $C_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}}) := 0$ ,  $j := 1$ .
- 3°: Jeśli  $C_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}}) < \delta$  przejdź do kroku 4°, w przeciwnym przypadku zakończ obliczenia.
- 4°: Znajdź  $\mathbf{w}_a \in G_{\mathbf{h}}(\mathbf{i}_a)$  gdzie  $\mathbf{i}_a \in W_{\mathbf{h}} \setminus V_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}})$ .
- 5°: Określ funkcję wejścia  $u(\cdot)$  przeprowadzającą system z zerowego punktu początkowego do punktu  $\mathbf{w}_a$ .
- 6°: Oblicz trajektorię systemu  $\mathbf{w}(t) = \int_0^T e^{(t-\tau)E} F u(\tau) d\tau$  poprzez rozwiązanie równania (3).
- 7°: Podstaw  $T^{(j)} := T$ ,  $u^{(j)}(\cdot) := u(\cdot)$ ,  $\mathbf{w}^{(j)}(\cdot) := \mathbf{w}(\cdot)$  i utwórz przypadek testowy  $T_{\text{case}}^{(j)} = \{T^{(j)}, u^{(j)}(\cdot), \mathbf{w}^{(j)}(\cdot)\}$ .
- 8°: Podstaw  $T_{\text{suite}} := T_{\text{suite}} \cup T_{\text{case}}^{(j)}$ .
- 9°: Oblicz  $V_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}})$  oraz  $C_{\mathbf{h}}(T_{\text{suite}})$ .
- 10°: Podstaw  $j := j + 1$  i przejdź do kroku 3°.

**Uwaga 1.** Wielkość granulacji  $\mathbf{h} = [h_1, h_2]^T$  można określić za pomocą następującej formuły

$$h_i \leq \frac{\max_{t \geq 0} |w_i(t)|}{10}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

W przypadku systemów krytycznych ze względu na bezpieczeństwo można rozważać mniejsze wartości  $h_i$ . Należy jednak pamiętać, że zmniejszenie granulacji podziału przestrzeni stanu  $W$  będzie wiązało się z większym nakładem obliczeniowym.

**Uwaga 2.** System określony przez równanie (3) jest sterowalny gdyż  $\text{rank}[E \quad EF] = 2$  (zob. warunek sterowalności np. w pracy [20]). Oznacza to, że istnieje sterowanie, które przeprowadzi system w skończonym czasie  $T$  z zerowego punktu początkowego do dowolnego punktu  $\mathbf{w}_a$ . Jednym z takich sterowań jest sterowanie minimalno-energetyczne [zob. 20], które można wyliczyć w sposób analityczny.

## 8. Metoda wyboru przypadków testowych oparta na testowaniu negatywnym

Testowanie negatywne to takie, którego celem jest pokazanie, że system nie działa. W tym rozdziale zagadnienie testowania negatywnego zostanie sformułowane jako problem optymalizacyjny. Przypadki testowe będą konstruowane w oparciu o model (1) podczas procedury optymalizacyjnej o charakterze iteracyjnym. Takie podejście pozwala na znaczne

zredukowanie ilości wymaganych testów oraz pozwoli skoncentrować się na sytuacjach, które mogą prowadzić do awarii całego systemu.

Zagadnienie testowania negatywnego można sformułować jako poszukiwania przypadku testowego  $T_{\text{case}} = \{T, e(\cdot), u(\cdot)\}$  będącego wynikiem następującego problemu optymalizacyjnego

$$\max_{e \in E_{\text{ad}}} J(e) = \max_{e \in E_{\text{ad}}} \int_0^T (u(t) - u_s(t))^2 dt, \quad (17)$$

gdzie  $E_{\text{ad}}$  oznacza zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Zbiór  $E_{\text{ad}}$  może być określony przez ograniczenia fizyczne i ograniczone nałożone przez zasoby systemowe komputera.

### Algorytm 2

1°: Określ zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $E_{\text{ad}}$  oraz czas wykonywania testów  $T > 0$ .

2°: Rozwiąż problem optymalizacyjny (16) w celu uzyskania rozwiązania optymalnego  $e^* \in E_{\text{ad}}$  w sensie zdefiniowanego wskaźnika jakości.

3°: Oblicz oczekiwaną funkcję wyjściową  $u^*(\cdot)$  za pomocą równania (1) dla wejścia  $e^*(\cdot)$ .

4°: Utwórz przypadek testowy  $T_{\text{case}} = \{T, e^*(\cdot), u^*(\cdot)\}$ .

## 9. Eksperymenty badawcze

Eksperymenty badawcze polegały na sprawdzeniu czy przedstawione w pracy algorytm są w stanie wykryć usterki w rzeczywistym systemie. Usterki te w postaci nieprawidłowych wartości parametrów regulatora PID zostały celowo wprowadzone do implementacji regulatora na platformie mikroprocesorowej. W celu lepszej ilustracji uzyskanych wyników wprowadzono wartości parametrów różniących się od właściwych nastaw o 20%. Błędy te mogą być skutkiem zastosowania arytmetyki stałoprzecinkowej, mogą one też wynikać z błędów podczas procedury identyfikacyjnej jak być bezpośrednim następstwem błędu programisty. Wprowadzenie niewłaściwych wartości parametrów do układu regulacji może skutkować tym, że system nie będzie dochodzić do stanu ustalonego w zakładanym czasie, w układzie wystąpią większe przeregulowania, a w najbardziej niekorzystnym przypadku system zamknięty nie będzie stabilny. Dobrą jakość regulacji osiąga się bowiem dopiero przy właściwym doborze nastaw co jest szczególnie istotne w zagadnieniach sterowania optymalnego [7] mających zastosowanie np. w silnikach elektrycznych [8] i spalinowych [26].

Rozważmy model regulatora PID określony przez równanie (1) z następującymi parametrami

$$K = 3.60, \quad T_i = 1.81, \quad T_d = 0.45. \quad (18)$$

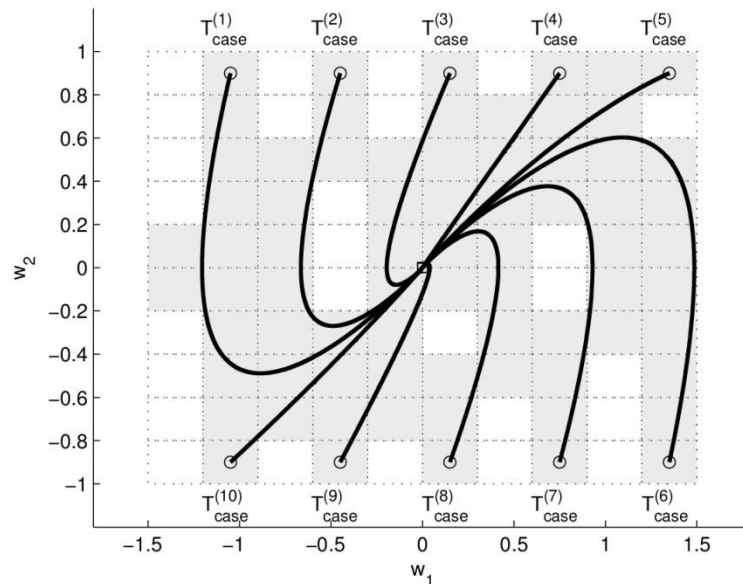
W oparciu o ten model budujemy mikroprocesorowy regulator PID implementujący funkcję regulacji daną wzorem (1), ale z błędnymi parametrami, to znaczy

$$\tilde{K} = 2.88, \quad \tilde{T}_i = 2.17, \quad \tilde{T}_d = 0.36. \quad (19)$$

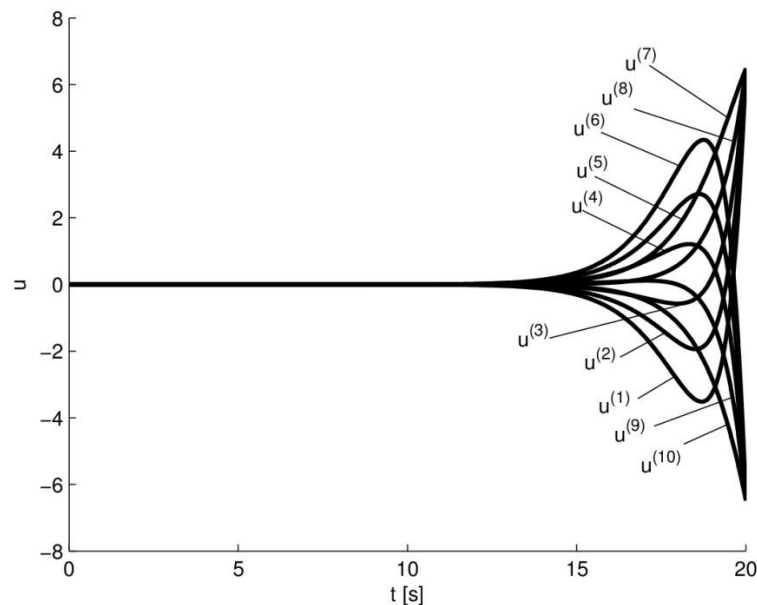
Następnie, korzystamy z algorytmu 1 przyjmując następujące założenia:  $\mathbf{h} = [0.3, 0.2]^T$ ,  $\delta = 0.7$ ,  $T = 20$  [s],  $|w_1(t)| \leq 1.5$ ,  $|w_2(t)| \leq 1.0$ . W rezultacie dostajemy zestaw 10



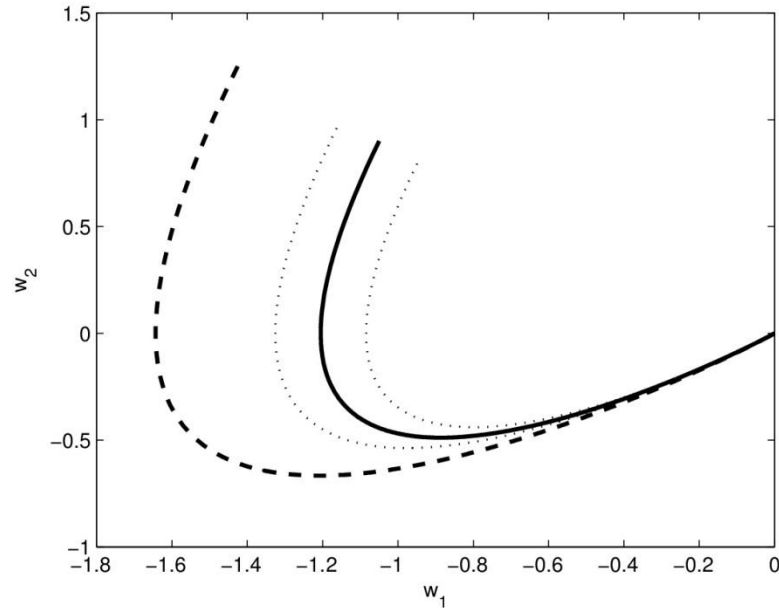
przypadków testowych, który zapewnia pokrycie testowe na poziomie co najmniej 0.7. Elementy składowe wygenerowanych przypadków testowych w postaci (6) są graficznie zilustrowane na rys. 4 i 5. Porównanie rzeczywistej trajektorii uzyskanej z testowanego urządzenia z oczekiwaną trajektorią jest przedstawione na rys. 6. Dla przyjętej wartości tolerancji  $\varepsilon = 0.1$  wynik z wykonania pierwszego przypadku testowego jest negatywny, co potwierdza istnienie błędu w systemie.



Rys. 4. Trajektorie systemu  $\mathbf{w}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 10$  oraz elementy (szare prostokąty) zbioru  $W_h$  pokryte przez przypadki testowe  $T_{\text{case}}^{(j)}$ . Trajektorie startują w punktach oznaczonych przez  $\square$  i kończą się w  $\circ$



Rys. 5. Funkcje wejściowe dla przypadków testowych  $T_{\text{case}}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 10$



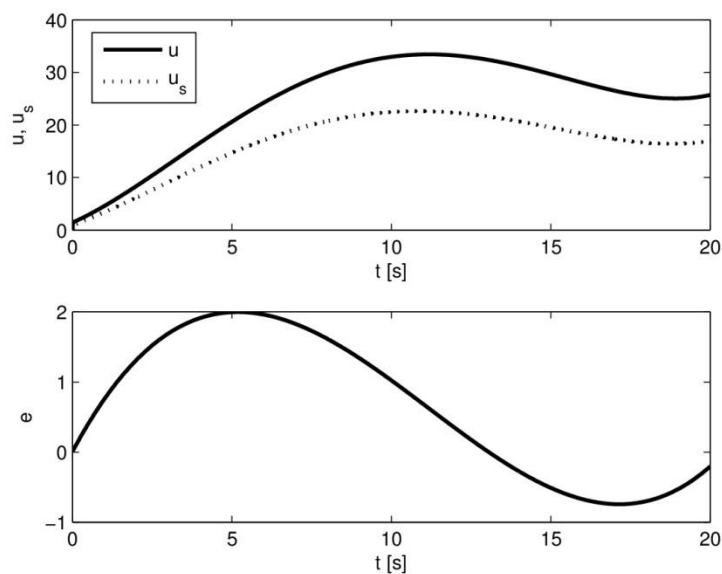
Rys. 6. Porównanie rzeczywistej trajektorii  $w_s^{(1)}$  uzyskanej z testowanego regulatora PID (linia przerywana) z oczekiwaną trajektorią  $w^{(1)}$  (linia ciągła). Granice 10% tolerancji są zaznaczone na rysunku linią kropkową.

Procedura optymalizacyjna dla algorytmu 2 została przeprowadzona na następującym zbiorze dopuszczalnych funkcji wejściowych

$$E_{ad} = \{e \in PC([0, T], \mathbb{R}) : e(t) = \alpha_0 t^3 + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3, \alpha_i \in \mathbb{R}, |e(t)| \leq 2, i = 0, 1, 2, 3\}. \quad (20)$$

Wyznaczanie ekstremum dla zdefiniowanego wskaźnika jakości (zob. wzór (17)) zostało przeprowadzone w oparciu o sympleksową metodę spadku określaną metodą Nelder-Meada [23], w efekcie której otrzymano następujące rozwiązanie

$$e(t) = 0.0032t^3 - 0.1072t^2 + 0.8534t + 0.0089. \quad (21)$$



Rys. 7. Elementy składowe przypadku testowego wygenerowanego w oparciu o algorytm 2

Elementy składowe wygenerowanego przypadku testowego w postaci (5) są graficznie zilustrowane na rys. 7. Rysunek ten zawiera również dla porównania rzeczywistą trajektorię uzyskaną z testowanego urządzenia.

Główną zaletą metody testowania negatywnego opartej o algorytm 2 jest znaczna redukcja przypadków testowych, których poszukiwanie odbywa się z wykorzystaniem procedury optymalizacyjnej. Algorytm skupia się tylko na takich przebiegach wejściowych do układu regulacji, które prowadzą do błędnych zdarzeń w systemie. W konsekwencji można w znacznym stopniu ograniczyć czas i koszty związane z testowaniem układu. Ponieważ nakład pracy związany z testowaniem i weryfikacją układu to według szacunków [2] od 30 do 90% całościowego nakładu pracy w projekcie, korzyści płynące ze zmniejszeniem tego czynnika nawet w stopniu minimalnym mogą być bardzo opłacalne. Należy także podkreślić, że algorytm 2 przeprowadza poszukiwanie przypadków testowych przy jednoczesnym wykorzystaniu rzeczywistego układu i jego matematycznej reprezentacji. Zatem aby rozpocząć proces testowania potrzebny jest zarówno model i układ rzeczywisty. Trudności w implementacji mogą również wynikać z faktu, że w procedurze optymalizacyjnej poszukujemy najlepszego rozwiązania w zbiorze funkcji, a nie w zbiorze wartości.

## 10. Podsumowanie

W pracy zostały zaprezentowane różne metody, za pomocą których można weryfikować mikroprocesorowe regulatory PID w celu zapewniania wymaganej jakości systemu, zgodności z normami bezpieczeństwa, a przede wszystkim w celu wyeliminowania błędów jeszcze na etapie projektowania systemu. Eliminacja błędów we wczesnych fazach powstawania produktu pozwala zwiększyć niezawodność systemu i zmniejszyć ryzyko powstania awarii na etapie eksploatacji. Wszystkie elementy procesu testowania (tj. koncepcja, notacja testów, pokrycie testowe, określanie wyniku testu, wybór przypadków testowych) zostały sformułowane i opisane w pracy za pomocą odpowiedniej notacji matematycznej. Kluczową rolę w zaprezentowanej koncepcji odgrywa model matematyczny systemu, który jest traktowany jako wzorzec zachowania. W ten sposób możliwe było opracowanie metod testowania dla systemów, w których dynamika odgrywa istotną rolę i do których nie można zastosować klasycznych technik testowania.

Przedstawione w pracy matematyczne metody weryfikacji regulatorów PID można łatwo uogólnić na inne przypadki mikroprocesorowych układów regulacji. Regulatory z kompensatorem dynamicznym [27], regulatory silników elektrycznych [7, 8] i spalinowych, specjalizowane układy regulacji zbudowane w oparciu o sieci neuronowe [9] i logikę rozmytą [10] mogą być weryfikowane i testowane przy wykorzystaniu opisanych algorytmów.

## Literatura

1. Adrion W, Brandstad J, Cherniabsky J. Validation, verification and testing of computer software. *Computing Survey* 1982; 14(2): 159-192.
2. Beizer B. *Software Testing Techniques*, 2nd ed. Boston: Van Nostrand Reinhold, 1990.
3. Beizer B. *Black-Box Testing: Techniques for Functional Testing of Software and Systems*. New York: John Willey & Sons, 1995.

4. Chłopek Z, Biedrzycki J, Lasocki J, Wójcik P. Ocena wpływu stanów dynamicznych silnika spalinowego na jego własności użytkowe. *Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability* 2015; 17(1): 35-41.
5. Dang T. Model-based testing of hybrid systems. In: *Model-Based Testing for Embedded Systems*. Boca Raton: CRC Press 2011; 383-423.
6. Dang T, Nahhal T. Coverage-guided test generation for continuous and hybrid systems. *Formal Methods in System Design* 2009; 34(2): 183-213.
7. Długosz M. Problemy optymalizacyjne układów napędowych robotyki. *Przegląd Elektrotechniczny – Electrical Review* 2011; 87(9a): 238-242.
8. Długosz M, Lerch T. Komputerowa identyfikacja parametrów silnika prądu stałego. *Przegląd Elektrotechniczny – Electrical Review* 2010; 85(2): 34-38.
9. Długosz R, Kolasa W, Pedrycz M, Szulc M. Parallel programmable asynchronous neighborhood mechanism for Kohonen SOM implemented in CMOS technology. *IEEE Transactions on Neural Networks* 2011; 22(12): 2091-2104.
10. Długosz R, Pedrycz W. Łukasiewicz fuzzy logic networks and their ultra low power hardware implementation. *Neurocomputing* 2010; 73(7-9): 1222-1234.
11. Esposito J. Automated test trajectory for hybrid systems. *Proceedings of the 35th Southeastern Symposium on System Theory* 2003; 441-444.
12. IEEE Std 1012-2004. IEEE standard for software verification and validation, 2004.
13. IEEE Std 61012-1990. IEEE standard glossary of software engineering terminology, 1990.
14. ISTQB International Software Testing Qualification Board. Standard glossary of terms used in software testing, version 2.1, 2010.
15. Julius A, Fainekos G, Anand M, Lee I, Pappas G. Robust test generation and coverage for hybrid systems. *Proceedings of the 10th International Conference on Hybrid Systems: Computation and Control (HSCC)*, Pisa 2007; 329-342.
16. Kaner C, Faulk J, Nguyen H. *Testing Computer Software*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.



17. LaValle S, Kuffner J. Rapidly-exploring random trees: progress and prospects. In: Algorithmic and Computational Robotics: New Directions 2001; 293-308.
18. Leveson N, Turner S. An investigation of the Therac-25 accidents. IEEE Computer 1993; 27(7): 18-41.
19. Lions J. ARIANE 5. Flight 501 failure. Ariane 501 Inquiry Board Report, Paris, 1996.
20. Mitkowski W. Stabilizacja systemów dynamicznych. Warszawa: WNT, 1991.
21. Mitkowski W, Skruch P. Fractional-order models of the supercapacitors in the form of RC ladder networks. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences 2013; 61(3): 581-587.
22. Myers G. The Art of Software Testing, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 2004.
23. Nelder J, Mead R. A simplex method for function minimization. The Computer Journal 1965; 7(4): 308-313.
24. Skeel R. Roundoff error and the Patriot missile. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) News 1992; 25(4): 11.
25. Skruch P. A coverage metric to evaluate tests for continuous-time dynamic systems. Central European Journal of Engineering 2011; 1(2): 174-180.
26. Skruch P. An educational tool for teaching vehicle electronic system architecture. International Journal of Electrical Engineering Education 2011; 48(2): 174-183.
27. Skruch P: Feedback stabilization of a class of nonlinear second-order systems. Nonlinear Dynamics 2010; 59(4): 681-692.
28. Tabuada P. Verification and Control of Hybrid Systems. Dordrech: Springer, 2009.
29. Zander-Nowicka J. Model-based testing of real-time embedded systems in the automotive domain. PhD thesis. Berlin: Fraunhofer IRB Verlag, 2009.
30. Zander J, Schieferdecker I, Mosterman P. (Eds) Model-Based Testing for Embedded Systems. Boca Raton: CRC Press, 2012.