8. Open problems. The notion of weak projectibility introduced in § 2 is different from projectibility since δ_ω, the ωth stable ordinal, is weakly projectible, but not projectible, to ω. We would like to know whether the ordinal $|(\alpha/\beta)|$ in Theorem 5.1(a) is similarly different from the least ordinal γ such that $\{\gamma\}$ is not p.o.r. in parameters less than α. (It is always less than or equal to that ordinal.) The equality of these ordinals would imply, for example, that $|\Delta_1^1|$ is the least ordinal σ such that for all $a \in \mathrm{POR}$, $\{a\}(\sigma) \simeq 1 \rightarrow \exists\tau < \sigma \cdot \{a\}(\tau) \simeq 1$, a nice characterization and parallel to those given in [2] for $|\Pi_1^1|$ and $|\Sigma_1^1|$.

A related question is whether for any β and any $\alpha > \beta$ absolutely projectible to β, $\{\sigma\colon \{\sigma\}$ is p.o.r. in parameters less than $\beta\}$ is all of α. It is easy to see that this set will be cofinal in α, whereas $\{\sigma\colon \sigma$ is p.o.r. in parameters less than $\beta\}$ is always bounded below α.

Another problem is whether or not $|\alpha/\beta|$ (or $|(\alpha/\beta)|$) equals the closure ordinal of the class of (weakly) $\Sigma_1 - \alpha$ operators over β. Recall that $|\Sigma_1^0| = |\Delta_1^0| = \omega$.

References

[1] P. Aczel and W. Richter, *Inductive definitions and analogues of large cardinals*, Proc. Conf. Math. Logic London 70, Springer Lecture Notes #225.

[2] D. Cenzer, *Ordinal recursion and inductive definitions*, Generalized Recursion Theory Oslo 72, Amsterdam, to appear.

[3] H. Friedman and R. B. Jensen, *Note on admissible ordinals*, Syntax and Semantics of Infinitary Languages, (1968), pp. 77–85.

[4] W. Richter, *Recursively Mahlo ordinals and inductive definitions*, Logic Colloquium 69 (1971), pp. 273–288.

[5] G. Sacks, *Metarecursion theory*, Sets, Models, and Recursion Theory (1967), pp. 243–263.

[6] C. Spector, *Recursive well-orderings*, J. Symb. Logic 20 (1955), pp. 151–163.

UNIVERSITY OF FLORIDA

Reçu par la Rédaction le 6. 2. 1973

Langages à valeurs réelles et applications

par

Jean-Louis Krivine (Paris)

Résumé. Dans cet article, on définit les notions de formules et de modèles de langages dans lesquelles les valeurs de vérité sont prises dans $\boldsymbol{R}$, et non, comme d'habitude, dans $\{0, 1\}$. Il y a beaucoup de possibilités pour définir ces notions, possibilités qui correspondent aux divers choix pour les "connecteurs propositionnels". On étudie l'une d'elles ici, qui semble particulièrement intéressante. Un certain nombre de théorèmes classiques du calcul des prédicats peuvent être démontrés, avec des modifications convenables, pour ces langages: théorème de Herbrand, interpolation, définissabilité. On en donne ensuite des applications à la théorie des espaces normés (en particulier les espaces L^p); certaines d'entre elles sont énoncées dans [5].

Table des matières

I. Définitions générales

On suppose connues les notions de formules et de langages du premier ordre et de modèles d'une théorie du premier ordre. Nous utiliserons la terminologie courante sur ce sujet (voir par exemple [4], ou [8]).

On considère un langage $\mathfrak{L}$, avec symboles de relation et de fonction, ne comportant pas le symbole $=$; on supposera toujours que $\mathfrak{L}$ possède au moins un symbole de constante, et un symbole de relation à un argument distingué que l'on note N. On désigne par Λ (resp. Λ_0) l'ensemble des formules atomiques (resp. atomiques closes) de $\mathfrak{L}$. Les termes de $\mathfrak{L}$ sont définis comme d'habitude.

On définit maintenant, mais pas de la façon habituelle, les notions de modèle et de formule du langage $\mathfrak{L}$.

Un *modèle* $\mathcal{M}$ *de* $\mathfrak{L}$ est, par définition, constitué par: un ensemble non vide (l'ensemble de base du modèle) noté $|\mathcal{M}|$; pour chaque symbole de fonction f de $\mathfrak{L}$, à k arguments, une application $\bar{f}$: $|\mathcal{M}|^k \to |\mathcal{M}|$ (en particulier, pour $k = 0$, on se donne, pour chaque symbole de constante c de $\mathfrak{L}$, un élément $\bar{c}$ de $|\mathcal{M}|$), pour chaque symbole de relation R de $\mathfrak{L}$, à k arguments, une application $\bar{R}$: $|\mathcal{M}|^k \to \boldsymbol{R}$.

Un *sous-modèle* $\mathcal{N}$ du modèle $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{L}$ est par définition un modèle de $\mathfrak{L}$ dont l'ensemble de base est une partie $|\mathcal{N}|$ de $|\mathcal{M}|$ close pour les fonctions $\bar{f}$ (si $a_1, \ldots, a_k \in |\mathcal{N}|$ alors $\bar{f}(a_1, \ldots, a_k) \in |\mathcal{N}|$); de plus, la valeur du symbole de fonction f (resp. du symbole de relation R) de $\mathfrak{L}$ dans $\mathcal{N}$ doit être la restriction de $\bar{f}$ (resp. $\bar{R}$) à $|\mathcal{N}|^k$. Si $\mathcal{N}$ est un sous-modèle de $\mathcal{M}$, on dira aussi que $\mathcal{M}$ *est une extension de* $\mathcal{N}$.

Une *expression sans quantificateur de* $\mathfrak{L}$ (en abrégé, expression de $\mathfrak{L}$) est, par définition, une expression de la forme

$$\lambda_1 A_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k A_k(x_1, \ldots, x_n) + \lambda,$$

où $A_1, \ldots, A_k$ sont des formules atomiques de $\mathfrak{L}$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda \in \boldsymbol{R}$.

Elle est dite *homogène* si $\lambda = 0$, close si $A_1, \ldots, A_k$ sont des formules atomiques closes. Autrement dit, l'ensemble des expressions sans quantificateurs est l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ sur $\boldsymbol{R}$ dont une base est $\Lambda \cup \{1\}$; l'ensemble des expressions homogènes est le sous-espace de base Λ, l'ensemble des expressions closes est le sous-espace de base $\Lambda_0 \cup \{1\}$.

Une *formule sans quantificateur de* $\mathfrak{L}$ est, par définition, ce que l'on obtient en mettant le symbole $\geqslant 0$ après une expression sans quantificateurs. Elle s'écrit donc $F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, où $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}$; elle est dite homogène (resp. close) si F est homogène (resp. close).

Si $F, G \in \mathcal{S}$, la formule $F - G \geqslant 0$ sera aussi écrite $F \geqslant G$ ou encore $G \leqslant F$.

Une *formule de* $\mathfrak{L}$ est, par définition, ce que l'on obtient en mettant un certain nombre de quantificateurs devant une formule sans quantificateurs. Elle s'écrit donc

$$Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m (F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0)$$

où $F \in \mathcal{S}$, $m \leqslant n$, et chaque Q_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ est $\exists$ ou $\forall$. Les variables libres de cette formule sont $x_{m+1}, \ldots, x_n$. La formule est dite *close* si $m = n$, et *universelle* si tous les Q_i sont $\forall$. Elle est dite *homogène* si $F(x_1, \ldots, x_n)$ l'est.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathfrak{L}$; on désigne par $\mathfrak{L}_{\mathcal{M}}$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathfrak{L}$ chaque élément de $|\mathcal{M}|$ comme symbole de constante (en supposant, évidemment, qu'aucun élément de $|\mathcal{M}|$ n'est symbole de $\mathfrak{L}$).

$\mathcal{M}$ peut alors être considéré, de façon canonique, comme un modèle de $\mathfrak{L}_{\mathcal{M}}$. Une expression sans quantificateur (resp. formule) de $\mathfrak{L}_{\mathcal{M}}$ sera aussi appelée *expression* (resp. *formule*) *de* $\mathfrak{L}$ *à paramètres dans* $\mathcal{M}$. L'expression close avec paramètres obtenue en substituant a_1 à $x_1, \ldots, a_n$ à x_n dans $F(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}$ sera notée $F(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|)$.

A chaque expression close $F(a_1, \ldots, a_n)$ à paramètres dans le modèle $\mathcal{M}$ est alors associé un nombre réel, appelé valeur *de l'expression considérée dans le modèle* $\mathcal{M}$ et noté $F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$:

On a en effet

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \lambda_1 R_1(t_1^1, \ldots, t_{k_1}^1) + \ldots + \lambda_p R_p(t_1^p, \ldots, t_{k_p}^p) + \lambda$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda \in \boldsymbol{R}$, R_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ étant un symbole de relation à k_i arguments, $t_1^i, \ldots, t_{k_i}^i$ étant des termes clos à paramètres dans $\mathcal{M}$; ces termes prenant respectivement les valeurs $\overline{t_1^i}, \ldots, \overline{t_{k_i}^i}$ dans $\mathcal{M}$, la valeur cherchée $F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ est, par définition le nombre réel $\lambda_1 \bar{R}_1(\overline{t_1^1}, \ldots, \overline{t_{k_1}^1}) + \ldots$ $\ldots + \lambda_p \bar{R}_p(\overline{t_1^p}, \ldots, \overline{t_{k_p}^p}) + \lambda$.

On dira que la formule sans quantificateur $F(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$ (close à paramètres dans $\mathcal{M}$) *est satisfaite dans* $\mathcal{M}$, si l'on a $F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$. On définit alors, de façon évidente, la notion de satisfaction de la formule close

$$Q_1 x_1 \ldots Q_m x_m [F(x_1, \ldots, x_m, a_{m+1}, \ldots, a_n) \geqslant 0]$$

à paramètres dans le modèle $\mathcal{M}$. En particulier, on a ainsi défini la notion de satisfaction d'une formule close de $\mathfrak{L}$ (sans paramètre) dans le modèle $\mathcal{M}$.

Un ensemble de formules closes de $\mathfrak{L}$ sera aussi appelé un système *d'axiomes* dans le langage $\mathfrak{L}$. Si toutes ces formules sont universelles (resp. homogènes) on a un système d'axiomes universels (resp. homogènes).

Un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{L}$ qui satisfait toutes les formules d'un système d'axiomes $\mathcal{A}$ est appelé modèle de $\mathcal{A}$ (ce qu'on note $\mathcal{M} \models \mathcal{A}$).

Si tout modèle de $\mathcal{A}$ satisfait la formule close F, on dit que F est conséquence de $\mathcal{A}$, ce qu'on note $\mathcal{A} \vdash F$.

On appelle *langage de* $\mathcal{A}$, et on désigne par $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ le langage dont les symboles de relation et de fonction sont ceux qui apparaissent dans les formules de $\mathcal{A}$.

Un système d'axiomes universels $\mathcal{A}$ est dit *convexe* si

quelle que soit la formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n [F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0]$ de $\mathcal{A}$, et les variables distinctes $y_1, \ldots, y_n$, la formule

$$\forall y_1 \ldots \forall y_n [F(y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0]$$

est aussi dans $\mathcal{A}$,

quelles que soient les formules

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m [F(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0], \qquad \forall y_1 \ldots \forall y_n [G(y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0]$$

de $\mathcal{A}$ $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ étant des variables distinctes) et les réels $\varrho, \sigma \geqslant 0$, la formule

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \forall y_1 \ldots \forall y_n [\varrho F(x_1, \ldots, x_m) + \sigma G(y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0]$$

est aussi dans $\mathcal{A}$.

$\mathcal{B}$ étant un ensemble quelconque de formules closes universelles, soit $\mathcal{B}'$ le plus petit ensemble convexe de formules closes universelles contenant $\mathcal{B}$. Il est clair que tout modèle de $\mathcal{B}$ satisfait aussi $\mathcal{B}'$. L'ensemble des conséquences universelles d'un système d'axiomes quelconque est donc convexe.

Un système d'axiomes $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ est dit *borné* si:

la formule $\forall x[N(x) \geqslant 0]$ est dans $\mathcal{A}$,

pour chaque symbole de fonction f de $\mathcal{L}$, à k arguments, il existe un réel $M_f \geqslant 0$ tel que la formule

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k[Nf(x_1, \ldots, x_k) \leqslant M_f(1+Nx_1+\ldots+Nx_k)]$$

soit dans $\mathcal{A}$,

pour chaque symbole de relation R de $\mathcal{L}$, à k arguments, il existe un réel $M_R \geqslant 0$ tel que les formules

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k[R(x_1, \ldots, x_k) \leqslant M_R(1+Nx_1+\ldots+Nx_k)]$$

et

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k[-R(x_1, \ldots, x_k) \leqslant M_R(1+Nx_1+\ldots+Nx_k)]$$

soient toutes deux dans $\mathcal{A}$.

Un *modèle canonique du langage* $\mathcal{L}$ est, par définition, un modèle $\mathcal{M}$ tel que: $|\mathcal{M}|$ est l'ensemble des termes clos de $\mathcal{L}$, et les symboles de fonctions de $\mathcal{L}$ prennent, dans $\mathcal{M}$, leur valeur naturelle sur $|\mathcal{M}|$. Autrement dit, si f est symbole de fonction à k arguments et $t_1, \ldots, t_k \in |\mathcal{M}|$, $\bar{f}(t_1, \ldots, t_k)$ est le terme $f(t_1, \ldots, t_k) \in |\mathcal{M}|$.

La donnée d'un modèle canonique de $\mathcal{L}$ n'est donc pas autre chose que celle d'une application $\delta\colon A_0 \to \boldsymbol{R}$; le modèle canonique associé à une telle application δ est celui dans lequel, pour chaque symbole de relation R à k arguments et $t_1, \ldots, t_k \in |\mathcal{M}|$ on a $\bar{R}(t_1, \ldots, t_k) = \delta(Rt_1 \ldots t_k)$.

II. Le théorème de Herbrand

Dans ce paragraphe, on démontre un résultat analogue au théorème de Herbrand pour le calcul des prédicats classiques (théorème 1). Il sera très utilisé dans toute la suite.

Théorème II.1. *Soit $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universels de $\mathcal{L}$, convexe et borné. Si $\mathcal{A}$ n'a pas de modèle, il existe une formule*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k[F(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0]$$

de $\mathcal{A}$ et des termes clos $t_1, \ldots, t_k$ de $\mathcal{L}$ tels que $F(t_1, \ldots, t_k) = -1$ (égalité entre éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$).

Lemme II.1. *Soient $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de l'espace $\boldsymbol{R}^X$ des fonctions réelles sur l'ensemble X, la fonction constante 1 étant dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$ un cone convexe de $\mathcal{E}$, G une partie de $\mathcal{E}$ telle que $G \cup \{1\}$ engendre $\mathcal{E}$. On suppose que, pour tout $g \in G$, il existe un réel $M_g \geqslant 0$ tel que $M_g \pm g \in \mathcal{C}$. Si $-1 \notin \mathcal{C}$, il existe une forme linéaire $T\colon \mathcal{E} \to \boldsymbol{R}$ telle que $T(1) = 1$ et $T(f) \geqslant 0$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.*

Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des formes linéaires U dont le domaine est un sous-espace $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tel que $1 \in \mathcal{F}$, satisfaisant $U(1) = 1$ et $U(f) \geqslant 0$ pour tout $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$. $\mathcal{X}$ est non-vide puisque $-1 \notin \mathcal{C}$. On ordonne $\mathcal{X}$ en posant $U \leqslant U'$ si et seulement si U' est un prolongement de U. Il est clair qu'on peut appliquer le théorème de Zorn à cet ensemble ordonné, et on a donc un élément maximal U_0 de $\mathcal{X}$ de domaine $\mathcal{F}_0$. Si $\mathcal{F}_0 = \mathcal{E}$ on a le résultat cherché. Sinon, $G \not\subset \mathcal{F}_0$ (car $1 \in \mathcal{F}_0$ et $G \cup \{1\}$ engendre $\mathcal{E}$) d'où $g_0 \in G$, $g_0 \notin \mathcal{F}_0$. Soit $\mathcal{F}_1 = \{f+\lambda g_0;\ f \in \mathcal{F}_0,\ \lambda \in \boldsymbol{R}\}$ le sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{F}_0$ et g_0. Comme $g_0 \notin \mathcal{F}_0$, chaque élément de $\mathcal{F}_1$ s'écrit d'une seule façon sous la forme $f+\lambda g_0$ ($f \in \mathcal{F}_0, \lambda \in \boldsymbol{R}$).

L'ensemble $\{U_0(f);\ f \in \mathcal{F}_0, g_0 - f \in \mathcal{C}\} = A$ est une partie de $\boldsymbol{R}$ qui est non vide et majorée: en effet $g_0 + M_{g_0} \in \mathcal{C}$ par hypothèse, donc $-M_{g_0} \in A$. D'autre part, $M_{g_0} - g_0 \in \mathcal{C}$; donc, si $g_0 - f \in \mathcal{C}$ on a $M_{g_0} - f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}_0$. Par hypothèse sur U_0, on a $U_0(M_{g_0} - f) \geqslant 0$, donc $U_0(f) \leqslant M_{g_0}$; cela montre que M_{g_0} est un majorant de A. On pose $\theta = \sup A$, et on définit un prolongement U_1 de U_0, de domaine $\mathcal{F}_1$ en posant $U_1(f+\lambda g_0) = U_0(f)+\lambda\theta$. On aura la contradiction cherchée en montrant que U_1 est $\geqslant 0$ sur $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{C}$ (puisqu'alors $U_1 \in \mathcal{X}$ et est un majorant strict de U_0).

Soit $h \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{C}$, $h = f+\lambda g_0$ ($f \in \mathcal{F}_0, \lambda \in \boldsymbol{R}$) tel que $U_1(h) < 0$. On a $\lambda \neq 0$ (sinon $h \in \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{C}$ et $U_0(h) < 0$ ce qui contredit la définition de U_0). En remplaçant h par $h/|\lambda|$, on voit qu'on peut supposer que $\lambda = \pm 1$.

Si $\lambda = 1$, on a $U_1(f+g_0) < 0$, soit $U_0(-f) > \theta$ et $g_0 + f \in \mathcal{C}$ ce qui contredit la définition de θ.

Si $\lambda = -1$ on a $U_1(f-g_0) < 0$, soit $U_0(f) < \theta$ et $f - g_0 \in \mathcal{C}$. D'après la définition de θ, il existe $f' \in \mathcal{F}_0$ telle que $g_0 - f' \in \mathcal{C}$ et $U_0(f) < U_0(f') \leqslant \theta$. On a $f - f' = (f-g_0)+(g_0-f') \in \mathcal{C}$, donc $f-f' \in \mathcal{F}_0 \cap \mathcal{C}$. Par définition de U_0, on a $U_0(f-f') \geqslant 0$, donc $U_0(f) \geqslant U_0(f')$ ce qui est une contradiction c.q.f.d.

Démonstration du théorème II.1. On applique le lemme précédent en prenant pour $\mathcal{E}$ l'espace $\mathcal{S}_0$ des expressions closes sans quantificateur de $\mathcal{L}$, dont une base sur $\boldsymbol{R}$ est $A_0 \cup \{1\}$, et pour G l'ensemble A_0. On peut considérer $\mathcal{E}$ comme un espace de fonctions (affines) sur $X = \boldsymbol{R}^{A_0}$: si $\delta \in \boldsymbol{R}^{A_0}$ et $F \in \mathcal{E}$, $F = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_k A_k + \lambda$ ($A_1, \ldots, A_k \in A_0$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda \in \boldsymbol{R}$), $F(\delta)$ est $\lambda_1 \delta A_1 + \ldots + \lambda_k \delta A_k + \lambda$ (valeur de l'expression F dans le modèle canonique associé à δ).

On prend pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des expressions de la forme $F(t_1, \ldots, t_k)$ où $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes clos quelconques de $\mathcal{L}$, l'expression $F(x_1, \ldots, x_k)$ étant telle que la formule $\forall x_1 \ldots \forall x_k[F(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0]$ soit dans $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ étant un système d'axiomes universels convexe, il est clair que $\mathcal{C}$ est un cone convexe de $\mathcal{E}$.

Pour chaque terme clos t de $\mathcal{L}$, il existe un réel $M_t \geqslant 0$ tel que $M_t - N(t) \in \mathcal{C}$: on le montre par induction sur la longueur de t. Si t est un symbole de constante, la formule $M_t - N(t) \geqslant 0$ est dans $\mathcal{A}$ pour un réel $M_t \geqslant 0$ (puisque $\mathcal{A}$ est borné); donc $M_t - N(t) \in \mathcal{C}$ par définitions de $\mathcal{C}$. Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ (f étant un symbole de fonction de $\mathcal{L}$, à n arguments), par hypothèse d'induction on a $M_{t_1} - N(t_1) \in \mathcal{C}, \ldots, M_{t_n} - N(t_n) \in \mathcal{C}$ pour certains réels $M_{t_1}, \ldots, M_{t_n} \geqslant 0$. D'autre part, on a dans $\mathcal{A}$ la formule

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [N(fx_1 \ldots x_n) \leqslant M_f(1 + Nx_1 + \ldots + Nx_n)]$$

(puisque $\mathcal{A}$ est borné). Donc $M_f(1+Nt_1+\ldots+Nt_n) - Nt \in \mathcal{C}$. Par addition, on a

$$M_f(1+Nt_1+\ldots+Nt_n) - Nt + M_f(Mt_1 - Nt_1) + \ldots + M_f(Mt_n - Nt_n) \in \mathcal{C}$$

soit $M_t - Nt \in \mathcal{C}$ avec $M_t = M_f[1 + M_{t_1} + \ldots + M_{t_n}]$.

Pour chaque $A \in \Lambda_0$, il existe un réel $M_A \geqslant 0$ tel que $M_A \pm A \in \mathcal{C}$: on a en effet $A = Rt_1 \ldots t_n$, R étant un symbole de relation de $\mathcal{L}$ à n arguments et $t_1, \ldots, t_n$ des termes clos. Or on a dans $\mathcal{A}$ les formules

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [Rx_1 \ldots x_n \leqslant M_R(1+Nx_1+\ldots+Nx_n)]$$

et

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n [-Rx_1 \ldots x_n \leqslant M_R(1+Nx_1+\ldots+Nx_n)] .$$

Donc $M_R(1+Nt_1+\ldots+Nt_n) \pm R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{C}$ et par suite

$$M_A \pm R(t_1,\ldots,t_n) \in \mathcal{C} \quad \text{avec} \quad M_A = M_R(1+M_{t_1}+\ldots+M_{t_n}) .$$

Il en résulte que le lemme 1 s'applique. Si $-1 \in \mathcal{C}$, la conclusion du théorème est vérifiée. Sinon, d'après le lemme 1, il existe une forme linéaire T: $\mathcal{E} \to \boldsymbol{R}$, qui est $\geqslant 0$ sur $\mathcal{C}$ et telle que $T(1) = 1$. Soit δ la restriction de T à Λ_0 et $\mathcal{M}$ le modèle canonique de $\mathcal{L}$ associé à δ. Il est clair que, pour toute $F \in \mathcal{E}$ on a $T(F) = F^{\mathcal{M}}$. On obtient la contradiction cherchée en montrant que $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{A}$ (par hypothèse, $\mathcal{A}$ n'a pas de modèle). Or, si $\forall x_1 \ldots \forall x_k [F(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0]$ est une forme de $\mathcal{A}$, et $t_1, \ldots, t_k \in |\mathcal{M}|$, alors $F(t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{C}$, donc $T(F(t_1, \ldots, t_k)) \geqslant 0$, autrement dit $F^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_k) \geqslant 0$. c.q.f.d.

On utilisera le plus souvent le théorème 1 sous la forme suivante:

THÉORÈME II.2. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux ensembles de formules closes universelles de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ étant convexe et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ borné. Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'a pas de modèle, il existe dans $\mathcal{A}$ une formule $\forall x_1 \ldots \forall x_k [F(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0]$, et des termes clos $t_1, \ldots, t_k$ de $\mathcal{L}$ tels que $\mathcal{B} \vdash F(t_1, \ldots, t_k) \leqslant -1$.*

Soit $\mathcal{B}'$ le plus petit ensemble convexe de formules closes universelles de $\mathcal{L}$ contenant $\mathcal{B}$, et soit $\mathcal{A}'$ l'ensemble des formules

(i) $$\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l [F(x_1,\ldots,x_k) + G(y_1,\ldots,y_l) \geqslant 0]$$

lorsque la formule $\forall x_1 \ldots \forall x_k[F(x_1,\ldots,x_k)\geqslant 0]$ décrit $\mathcal{A}$, et la formule $\forall y_1\ldots\forall y_l[G(y_1,\ldots,y_l)\geqslant 0]$ décrit $\mathcal{B}'$. Il est clair que $\mathcal{A}'$ est un ensemble convexe, borné, qui n'a pas de modèle (il contient $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$). D'après le théorème 1, il existe donc une formule de $\mathcal{A}'$, soit (i), et des termes clos $t_1,\ldots,t_k,u_1,\ldots,u_l$ de $\mathcal{L}$ tels que $F(t_1,\ldots,t_k)+G(u_1,\ldots,u_l) = -1$. Comme tout modèle de $\mathcal{B}$ satisfait $\mathcal{B}'$, et que $\mathcal{B}' \vdash G(u_1,\ldots,u_l)\geqslant 0$, on voit que tout modèle de $\mathcal{B}$ satisfait $F(t_1,\ldots,t_k)\leqslant -1$. c.q.f.d.

THÉORÈME II.3 (compacité). *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble borné de formules closes universelles dont tout sous-ensemble fini a un modèle. Alors $\mathcal{A}$ a un modèle.*

Soit $\mathcal{A}^*$ l'ensemble des conséquences universelles des parties finies de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}^*$ est convexe et contient $\mathcal{A}$, donc est borné. Si $\mathcal{A}$ n'a pas de modèle, $\mathcal{A}^*$ n'en a pas non plus. Il existe donc (th. 1.) une formule $\forall x_1\ldots\forall x_k[F(x_1,\ldots,x_k)\geqslant 0]$ de $\mathcal{A}^*$ et des termes clos $t_1,\ldots,t_k$ de $\mathcal{L}$ tels que $F(t_1,\ldots,t_k) = -1$. La formule $F(t_1,\ldots,t_k)\geqslant 0$ est conséquence d'une partie finie de $\mathcal{A}$ (par définition de $\mathcal{A}^*$) qui ne peut donc avoir de modèle. c.q.f.d.

III. Le théorème d'interpolation

Dans cette partie, on montre l'analogue du théorème d'interpolation de Craig et du théorème de définissabilité de Beth pour les langages à valeurs réelles. Ces résultats ne seront pas utilisés dans la suite.

Etant donné un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$, on désigne par $\mathcal{M}'$ le modèle canonique qui donne la même valeur réelle à chaque expression atomique close de $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire à chaque élément de Λ_0). Il en résulte que chaque expression close sans quantificateur de $\mathcal{L}$ a la même valeur réelle dans $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Par suite *chaque formule universelle qui est vraie dans $\mathcal{M}$ est aussi vraie dans $\mathcal{M}'$. $\mathcal{M}'$ sera appelé le modèle canonique associé à $\mathcal{M}$.*

LEMME III.1. *Soient $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universels de $\mathcal{L}$, $F(x_1,\ldots,x_k)$ une expression sans quantificateur de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, $t_1,\ldots,t_k$ des termes distincts, clos de $\mathcal{L}$, commençant par un symbole de fonction qui n'est pas dans $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{A}\vdash F(t_1,\ldots,t_k)\geqslant 0$, alors $\mathcal{A}\vdash\forall x_1\ldots\forall x_k[F(x_1,\ldots,x_k)\geqslant 0]$.*

On ajoute au langage $\mathcal{L}$ de nouveaux symboles de constantes $c_1,\ldots,c_k$, et on a à démontrer que $\mathcal{A}\vdash F(c_1,\ldots,c_k)\geqslant 0$. Soit t_1 l'un des termes de longueur maximum parmi $t_1,t_2,\ldots,t_k$. En raisonnant par récurrence sur k, on voit qu'il suffit de montrer que $\mathcal{A}\vdash F(c_1,t_2,\ldots,t_k)\geqslant 0$. Supposons alors qu'il existe un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ et de la formule $F(c_1,t_2,\ldots,t_k)$

$\leqslant -\varepsilon$, ε étant un réel >0. Le modèle canonique $\mathcal{M}'$ associé à $\mathcal{M}$ satisfait aussi ces formules.

On a $t_1 = f(u_1, \ldots, u_m)$, où f est un symbole de fonction à m arguments qui n'est pas dans $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$, $u_1, \ldots, u_m$ des termes clos de $\mathfrak{L}$. On définit un modèle $\mathcal{M}''$ de la façon suivante: il a même ensemble de base et même interprétation pour les symboles de relation que $\mathcal{M}'$. Son interprétation pour les symboles de fonction est aussi la même que celle de $\mathcal{M}'$ sauf pour f dont on change la valeur pour le seul n-uplet $(u_1, \ldots, u_m)$: dans $\mathcal{M}''$, on pose $\bar{f}(u_1, \ldots, u_m) = c_1$ (alors que dans $\mathcal{M}'$, on a $\bar{f}(u_1, \ldots, u_m) = f(u_1, \ldots, u_m)$).

Les valeurs des termes $t_2, \ldots, t_k$ sont inchangées: car $t_2, \ldots, t_k$ ont une longueur au plus égale à celle de t_1, donc t_1 n'est pas un sous-terme de $t_2, \ldots, t_k$. Par contre t_1 prend la valeur c_1 dans $\mathcal{M}''$. Il en résulte que $\mathcal{M}''$ satisfait la formule $F(t_1, t_2, \ldots, t_k) \leqslant -\varepsilon$. D'autre part $\mathcal{M}''$ satisfait $\mathcal{A}$, puisque f n'est pas dans le langage de $\mathcal{A}$. Cela contredit le fait que $\mathcal{A} \vdash F(t_1, \ldots, t_k) \geqslant 0$. c.q.f.d.

LEMME III.2. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux systèmes d'axiomes universels tels que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ soit borné et n'ait pas de modèle. Il existe alors une expression sans quantificateur $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{B})$, et des termes clos $\xi_1, \ldots, \xi_n$ (commençant par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) - \mathfrak{L}(\mathcal{B})$) $\eta_1, \ldots, \eta_m$ (commençant par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{B}) - \mathfrak{L}(\mathcal{A})$) du langage $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ tels que:*

$$\mathcal{A} \vdash F(\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n) \geqslant 0 ,$$

$$\mathcal{B} \vdash F(\eta_1, \ldots, \eta_m, \xi_1, \ldots, \xi_n) \leqslant -1 .$$

D'après le théorème II.2., il existe une expression $G(z_1, \ldots, z_k)$ sans quantificateur de $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ et des termes clos $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ tels que

$$\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_k [G(z_1, \ldots, z_k) \geqslant 0] ,$$

$$\mathcal{B} \vdash G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \leqslant -1 .$$

On remarque d'abord que tous les symboles de relation qui apparaissent dans G sont dans $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{B})$: ils sont tous dans $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ d'après la définition de $G(z_1, \ldots, z_k)$. D'autre part, on peut écrire:

$$G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = \lambda_1 R_1(w_1^1, \ldots, w_{n_1}^1) + \ldots + \lambda_p R_p(w_1^p, \ldots, w_{n_p}^p) + \lambda$$

($\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda \in \boldsymbol{R}$, et les w_i^j sont des termes clos de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$). Supposons que R_1, par exemple, ne soit pas dans $\mathfrak{L}(\mathcal{B})$ (et que $\lambda_1 \neq 0$).

On considère un modèle $\mathcal{M}$ quelconque de $\mathcal{B}$ (s'il n'en existe pas, le résultat à démontrer est trivial). Alors $\mathcal{M} \models G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \leqslant -1$ quelle que soit la valeur donnée au symbole de relation R_1: on a une contradiction en donnant à R_1 une valeur constante suffisamment grande en valeur absolue et du signe de λ_1.

On a donc $\mathcal{A} \vdash G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \geqslant 0$; $\mathcal{B} \vdash G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) \leqslant -1$, et on peut écrire $G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = H(v_1, \ldots, v_q)$ où $H(x_1, \ldots, x_q)$ est l'expression $\lambda_1 R_1(x_1^1, \ldots, x_{n_1}^1) + \ldots + \lambda_p R_p(x_1^p, \ldots, x_{n_p}^p) + \lambda$, écrite dans $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{B})$, et $v_1, \ldots, v_q$ des termes clos (à savoir $w_1^1, \ldots, w_{n_p}^p$) de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$.

Or chaque terme clos v de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ peut s'écrire sous la forme $v = \sigma(\tau_1, \ldots, \tau_l)$, où $\sigma(x_1, \ldots, x_l)$ est un terme de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ et $\tau_1, \ldots, \tau_l$ des termes clos de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ commençant soit par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{B}) - \mathfrak{L}(\mathcal{A})$, soit par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) - \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ (cette propriété se démontre immédiatement par induction sur la longueur du terme v). On écrit donc ainsi:

$$v_1 = \sigma_1(\tau_1^1, \ldots, \tau_{l_1}^1), \ \ldots, \ v_q = \sigma_q(\tau_1^q, \ldots, \tau_{l_q}^q) ,$$

d'où

$$G(\zeta_1, \ldots, \zeta_k) = H[\sigma_1(\tau_1^1, \ldots, \tau_{l_1}^1), \ldots, \sigma_q(\tau_1^q, \ldots, \tau_{l_q}^q)] .$$

On pose

$$F(z_1^1, \ldots, z_{l_1}^1, \ldots, z_1^q, \ldots, z_{l_q}^q) = H[\sigma_1(z_1^1, \ldots, z_{l_1}^1), \ldots, \sigma_q(z_1^q, \ldots, z_{l_q}^q)] .$$

F est écrite dans le langage $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{B})$. Il suffit alors d'appeler $x_1, \ldots, x_m$ les variables z_i^j telles que τ_i^j commence par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{B}) - \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ et $\eta_1, \ldots, \eta_m$ les τ_i^j correspondants; $y_1, \ldots, y_n$ les variables z_i^j telles que τ_i^j commence par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) - \mathfrak{L}(\mathcal{B})$, et $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les σ_i^j correspondants. L'expression $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ et les termes $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ ont bien les propriété voulues. c.q.f.d.

LEMME III.3. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux systèmes d'axiomes universels tels que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ soit borné et n'ait pas de modèle. Il existe alors une expression sans quantificateur $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ du langage $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{L}(\mathcal{B})$, des termes $t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ (commençant par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) - (\mathfrak{L}(\mathcal{B}))$, des termes $u_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, u_m(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathfrak{L}(\mathcal{B})$ (commençant par un symbole de $\mathfrak{L}(\mathcal{B}) - (\mathfrak{L}(\mathcal{A}))$ et des termes clos $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ de $\mathfrak{L}(\mathcal{A}) \cup \mathfrak{L}(\mathcal{B})$ tels que*

$$\xi_1 = t_1(\eta_1, \ldots, \eta_m) , \ \ldots, \ \xi_n = t_n(\eta_1, \ldots, \eta_m) ,$$

$$\eta_1 = u_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) , \ \ldots, \ \eta_m = u_m(\xi_1, \ldots, \xi_n) ,$$

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_m [F(x_1, \ldots, x_m, t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_m)) \geqslant 0] ,$$

$$\mathcal{B} \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n [F(u_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, u_m(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n) \leqslant -1] .$$

On considère les termes $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m$, et l'expression $F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ obtenus au moyen du lemme III.2. On appelle $\xi_1, \ldots, \xi_s$ (resp. $\eta_1, \ldots, \eta_r$) tous les sous-termes des termes $\xi_1, \ldots, \xi_n$,

$\eta_1, \ldots, \eta_m$ qui commencent par un symbole de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) - \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (resp. $\mathcal{L}(\mathcal{B}) - \mathcal{L}(\mathcal{A})$). On a donc $r \geqslant m$, $s \geqslant n$; on peut évidemment écrire

$$F(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = F(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s),$$

l'expression du deuxième membre ne faisant simplement pas apparaître les variables $x_{m+1}, \ldots, x_r, y_{n+1}, \ldots, y_s$.

On remarque alors que, si ξ est un terme clos de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B})$, commençant par un symbole de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) - \mathcal{L}(\mathcal{B})$, on a $\xi = t(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$, où $t(x_1, \ldots, x_l)$ est un terme de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ étant des termes clos de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (sous-termes de ξ) commençant par un symbole de $\mathcal{L}(\mathcal{B}) - \mathcal{L}(\mathcal{A})$. De même, si η est un terme clos de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B})$, commençant par un symbole de $\mathcal{L}(\mathcal{B}) - \mathcal{L}(\mathcal{A})$, on a $\eta = u(\tau_1, \ldots, \tau_l)$, où $u(x_1, \ldots, x_l)$ est un terme de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, $\tau_1, \ldots, \tau_l$ des termes clos de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B})$ commençant par un symbole de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) - \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (la démonstration de cette propriété est immédiate par induction sur la longueur des termes ξ, η).

On peut donc écrire

$$\xi_1 = t_1(\eta_1, \ldots, \eta_r), \ \ldots, \ \xi_s = t_s(\eta_1, \ldots, \eta_r),$$

$$\eta_1 = u_1(\xi_1, \ldots, \xi_s), \ \ldots, \ \eta_r = u_r(\xi_1, \ldots, \xi_s)$$

$t_i(x_1, \ldots, x_r)$, $u_j(y_1, \ldots, y_s)$ étant des termes écrits respectivement dans $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

D'après le lemme III.2. on a

$$\mathcal{A} \vdash F(\eta_1, \ldots, \eta_r, \xi_1, \ldots, \xi_s) \geqslant 0,$$

$$\mathcal{B} \vdash F(\eta_1, \ldots, \eta_r, \xi_1, \ldots, \xi_s) \leqslant -1$$

soit $\mathcal{A} \vdash F(\eta_1, \ldots, \eta_r, t_1(\eta_1, \ldots, \eta_r), \ldots, t_s(\eta_1, \ldots, \eta_r)) \geqslant 0$.

Comme $\eta_1, \ldots, \eta_r$ commencent par un symbole qui n'est pas dans $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, on peut appliquer le lemme III.1., d'où

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_r F(x_1, \ldots, x_r, t_1(x_1, \ldots, x_r), \ldots, t_s(x_1, \ldots, x_r)) \geqslant 0.$$

On a de même

$$\mathcal{B} \vdash F(u_1(\xi_1, \ldots, \xi_s), \ldots, u_r(\xi_1, \ldots, \xi_s), \xi_1, \ldots, \xi_s) \leqslant -1$$

donc, d'après le lemme III.1.

$$\mathcal{B} \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_s F(u_1(y_1, \ldots, y_s), \ldots, u_r(y_1, \ldots, y_s), y_1, \ldots, y_s) \leqslant -1.$$

c.q.f.d.

Théorème III.1 (théorème d'interpolation). *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux systèmes d'axiomes universels tels que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ soit borné et n'ait pas de modèle.*

Il existe alors un expression sans quantificateur $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B})$, des termes $t_1(x_1), \ldots, t_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, des termes $u_1, u_2(y_1), \ldots, u_i(y_1, \ldots, y_{i-1}), \ldots, u_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ (u_1 est un symbole de constante) tels que:

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [F(x_1, \ldots, x_n, t_1(x_1), \ldots, t_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots \\ \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant 0],$$

$$\mathcal{B} \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n [F(u_1, u_2(y_1), \ldots, u_i(y_1, \ldots, y_{i-1}), \ldots \\ \ldots, u_n(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_1, \ldots, y_n) \leqslant -1].$$

On applique le lemme III.3 et on range les termes clos $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ par ordre de longueur décroissante. On suppose que cela donne $\xi_n, \eta_n, \xi_{n-1}, \eta_{n-1}, \ldots, \xi_1, \eta_1$ (c'est toujours possible, en ajoutant, au besoin, de nouveaux termes ξ_i, η_i). On a donc supposé aussi $m = n$. L'expression F s'écrit donc $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. D'après le lemme III.3, on a $\eta_i = u_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$; comme η_i n'est pas plus long que $\xi_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n$, on voit que le terme $u_i(y_1, \ldots, y_n)$ ne peut contenir les variables y_i, $y_{i+1}, \ldots, y_n$ et s'écrit donc $u_i(y_1, \ldots, y_{i-1})$. De même, on a $\xi_i = t_i(\eta_1, \ldots, \eta_n)$; comme ξ_i n'est pas plus long que $\eta_{i+1}, \ldots, \eta_n$, le terme $t_i(x_1, \ldots, x_n)$ ne peut contenir les variables $x_{i+1}, \ldots, x_n$ et s'écrit donc $t_i(x_1, \ldots, x_i)$. Le résultat est alors immédiat d'après le lemme III.3. c.q.f.d.

Théorème III.2. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux systèmes d'axiomes universels, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ étant borné. Pour que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ait un modèle, il faut et il suffit que, pour toute expression sans quantificateur $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B})$, s'il existe des termes $t_1(x_1), \ldots, t_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ tels que*

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [F(x_1, \ldots, x_n, t_1(x_1), \ldots, t_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant 0]$$

alors il existe un modèle de $\mathcal{B}$ qui satisfait la formule

$$\forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n [F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0].$$

La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'a pas de modèle, d'après le théorème III.1, on voit qu'il existe une expression sans quantificateur $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B})$ et des termes $t_1(x_1), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, $u_1, \ldots, u_n(y_1, \ldots, y_{n-1})$ de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$, tels que

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [F(x_1, \ldots, x_n, t_1(x_1), \ldots, t_n(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant 0]$$

et

$$\mathcal{B} \vdash \forall y_1 \ldots \forall y_n [F(u_1, u_2(y_1), \ldots, u_n(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_1, \ldots, y_n) \leqslant -1].$$

Il en résulte que

$$\mathcal{B} \vdash \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n [F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \leqslant -1]$$

et donc aucun modèle de $\mathfrak{B}$ ne satisfait la formule $\forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n [F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geqslant 0]$. c.q.f.d.

Théorème III.3 (de définissabilité). *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble borné de formules closes, universelles et homogènes de $\mathfrak{L}$, comportant le symbole de fonction f à k arguments, et définissant implicitement ce symbole (c'est-à-dire si $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathfrak{L}-\{f\}$, il y a au plus une façon de définir la valeur $\bar{f}$ de f dans $\mathcal{M}$, $\bar{f}\colon |\mathcal{M}|^k \to |\mathcal{M}|$, de façon à satisfaire $\mathcal{A}$). Alors, pour toute expression sans quantificateur homogène $E(z_1, \ldots, z_p)$, comportant le symbole f et définie positive (c'est-à-dire:*

$$\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p [E(z_1, \ldots, z_p) \geqslant 0]) ,$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une expression sans quantificateur homogène $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)$ ne comportant pas le symbole f telle que, dans tout modèle de $\mathcal{A}$, on ait:

$$0 \leqslant E(z_1, \ldots, z_p) - \inf_{x_1} \sup_{y_1} \ldots \inf_{x_n} \sup_{y_n} F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p) \leqslant \varepsilon\big(N(z_1) + \ldots + N(z_p)\big) .$$

Montrons d'abord le

Lemme III.4. *Soient $\mathcal{A}$ un système d'axiomes homogènes universels, et $G(x_1, \ldots, x_n)$ une expression homogène sans quantificateur. Si*

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [G(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \lambda] ,$$

alors $\lambda \leqslant 0$ et on a

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n [G(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0] .$$

Etant donnés un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{L}$ et un réel $\varrho \geqslant 0$, on désigne par $\varrho\mathcal{M}$ le modèle qui a même ensemble de base et même interprétation pour les symboles de fonction que $\mathcal{M}$, et dans lequel l'interprétation de chaque symbole de relation R est $\varrho\bar{R}$ ($\bar{R}$ étant l'interprétation de R dans $\mathcal{M}$). Comme $\mathcal{A}$ est homogène, il est clair que, si $\mathcal{M}$ satisfait $\mathcal{A}$, alors $\varrho\mathcal{M}$ satisfait aussi $\mathcal{A}$.

En prenant $\varrho = 0$ on obtient un modèle dans lequel tous les symboles de relation ont la valeur constante 0; dans ce modèle G prend la valeur 0, ce qui montre que $\lambda \leqslant 0$.

Soient $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{A}$ et $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ tels que $G^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) < 0$ s'il en existe. On choisit $\varrho > 0$ assez grand pour que $\varrho G^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \lambda - 1$.

Alors le modèle $\varrho\mathcal{M}$ satisfait la formule $G(a_1, \ldots, a_n) \leqslant \lambda - 1$, ce qui contredit l'hypothèse, puisque $\varrho\mathcal{M} \models \mathcal{A}$. c.q.f.d.

Le système d'axiomes $\mathcal{A}$ étant borné, il existe un réel $M > 0$ tel que $\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p [E(z_1, \ldots, z_p) \leqslant M(1 + Nz_1 + \ldots + Nz_p)]$ (voir la démonstration du théorème II.1). D'après le lemme précédent, on a donc

$$\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p [E(z_1, \ldots, z_p) \leqslant M(Nz_1 + \ldots + Nz_p)] .$$

Par ailleurs, puisque $\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p [E(z_1, \ldots, z_p) \geqslant 0]$, on peut supposer que

$$\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p [E(z_1, \ldots, z_p) \geqslant Nz_1 + \ldots + Nz_p]$$

(en remplaçant $E(z_1, \ldots, z_p)$ par $E(z_1, \ldots, z_p) + Nz_1 + \ldots + Nz_p$).

Soit $\mathfrak{L}'$ le langage obtenu en changeant le symbole f dans $\mathfrak{L}$ en un nouveau symbole de fonction f' à k arguments qui n'est pas dans $\mathfrak{L}$.

Par cette substitution $\mathcal{A}$ devient $\mathcal{A}'$, $E(z_1, \ldots, z_p)$ devient $E'(z_1, \ldots, z_p)$. On ajoute aux langages $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$ p nouveaux symboles de constante $c_1, \ldots, c_p$. Par hypothèse l'ensemble des formules: $\mathcal{A}, E(c_1, \ldots, c_p) \geqslant 1 + \varepsilon$, $\mathcal{A}'$, $E'(c_1, \ldots, c_p) \leqslant 1$ n'a pas de modèle. Or cet ensemble est borné: car $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ le sont et

$$\mathcal{A}', E'(c_1, \ldots, c_p) \leqslant 1 \vdash N(c_1) + \ldots + N(c_p) \leqslant 1 ,$$

et donc

$$\mathcal{A}', E'(c_1, \ldots, c_p) \leqslant 1 \vdash N(c_i) \leqslant 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant p) .$$

D'après le théorème III.1 il existe une expression homogène sans quantificateur $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)$ du langage $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$ (c'est-à-dire du langage $\mathfrak{L}-\{f\}$) et un réel r tels que

$$\mathcal{A}, E(c_1, \ldots, c_p) \geqslant 1 + \varepsilon \vdash \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n [F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_p) \geqslant r + 1],$$

$$\mathcal{A}, E(c_1, \ldots, c_p) \leqslant 1 \vdash \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n [F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_p) \leqslant r].$$

Or, si $\mathcal{M}$ est un modèle de $\mathcal{A}$, $\varrho\mathcal{M}$ est aussi un modèle de $\mathcal{A}$, pour tout réel $\varrho \geqslant 0$. On en déduit:

$$\mathcal{A}, \varrho E(c_1, \ldots, c_p) \geqslant 1 + \varepsilon \vdash \forall x_1 \exists y_1 \ldots \forall x_n \exists y_n [\varrho F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_p) \geqslant r + 1],$$

$$\mathcal{A}, \varrho E(x_1, \ldots, x_p) \leqslant 1 \vdash \exists x_1 \forall y_1 \ldots \exists x_n \forall y_n [\varrho F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_p) \leqslant r].$$

On pose

$$\Phi(c_1, \ldots, c_p) = \inf_{x_1} \sup_{y_1} \ldots \inf_{x_n} \sup_{y_n} F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, c_1, \ldots, c_p).$$

$\Phi(c_1, \ldots, c_p)$ prend une valeur réelle ou $\pm\infty$ dans chaque modèle de $\mathfrak{L} \cup \{c_1, \ldots, c_p\}$. D'après ce qui précède, on a:

$\varrho\Phi(c_1, \ldots, c_p) \geqslant r + 1$ dans tout modèle de $\mathcal{A}$, $\varrho E(c_1, \ldots, c_p) \geqslant 1 + \varepsilon$,

$\varrho\Phi(c_1, \ldots, c_p) \leqslant r$ dans tout modèle de $\mathcal{A}$, $\varrho E(c_1, \ldots, c_p) \leqslant 1$.

Pour $\varrho = 0$, on en déduit $r \geqslant 0$. On voit de plus que, dans tout modèle de $\mathcal{A}$ on a

$$rE(c_1, \ldots, c_p) \geqslant \Phi(c_1, \ldots, c_p) \geqslant \frac{r+1}{1+\varepsilon} E(c_1, \ldots, c_p) .$$

Si $r = 0$, on en déduit $E(c_1, \ldots, c_p) = \Phi(c_1, \ldots, c_p) = 0$ dans tout modèle de $\mathcal{A}$. Si $r > 0$, on a

$$E(c_1, \ldots, c_p) \geqslant \frac{1}{r}\Phi(c_1, \ldots, c_p) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} E(c_1, \ldots, c_p) .$$

Donc

$$0 \leqslant E(c_1, \ldots, c_p) - \frac{1}{r}\Phi(c_1, \ldots, c_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} E(c_1, \ldots, c_p)$$

dans tout modèle de $\mathcal{A}$. Comme

$$\mathcal{A} \vdash E(c_1, \ldots, c_p) \leqslant M(Nc_1 + \ldots + Nc_p) ,$$

on voit que, dans tout modèle de $\mathcal{A}$, on a

$$0 \leqslant E(c_1, \ldots, c_p) - \frac{1}{r}\Phi(c_1, \ldots, c_p) \leqslant \varepsilon M(Nc_1 + \ldots + Nc_p)$$

ce qui montre que l'expression $\frac{1}{r} F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)$ remplit les conditions de l'énoncé du théorème. c.q.d.f.

IV. Modèles standards

Formules universelles généralisées. Soit C une partie convexe fermée de $\boldsymbol{R}^n$; on sait que C est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés, autrement dit, qu'il existe $n+1$ familles de réels: $(\lambda_1^i)_{i \in I}, \ldots, (\lambda_n^i)_{i \in I}, (\lambda^i)_{i \in I}$ telles que

$$C = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \boldsymbol{R}^n;\ \lambda_1^i \xi_1 + \ldots + \lambda_n^i \xi_n + \lambda^i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \in I\} .$$

Considérons un langage $\mathfrak{L}$, et $A_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_m)$ des expressions sans quantificateur de $\mathfrak{L}$. L'ensemble $\mathcal{A}$ de formules universelles closes

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m [\lambda_1^i A_1(x_1, \ldots, x_m) + \ldots + \lambda_n^i A_n(x_1, \ldots, x_m) + \lambda^i \geqslant 0] \qquad (i \in I)$$

sera écrit en abrégé

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m\, C[A_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_m)]$$

et sera appelé alors une formule universelle (close) généralisée. Un modèle $\mathcal{M}$ d'une telle formule est, par définition, un modèle de $\mathcal{A}$; cela revient à dire que, quels que soient $a_1, \ldots, a_m \in |\mathcal{M}|$, le n-uplet de réels:

$$[A_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_m), \ldots, A_n^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_m)] \quad \text{est dans le convexe } C .$$

Soit Φ une fonction concave de $\boldsymbol{R}_+^{n-1}$ dans $\boldsymbol{R}_+$: autrement dit Φ est continue et

$$\Phi\big(\tfrac{1}{2}(\xi_1 + \eta_1), \ldots, \tfrac{1}{2}(\xi_{n-1} + \eta_{n-1})\big) \geqslant \tfrac{1}{2}\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) + \tfrac{1}{2}\Phi(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$$

quels que soient $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \in \boldsymbol{R}_+$ ($\boldsymbol{R}_+$ est l'ensemble des réels $\geqslant 0$). On définit un convexe C de $\boldsymbol{R}^n$ par la condition: $\xi_1 \geqslant 0$ et ... et $\xi_{n-1} \geqslant 0$ et $|\xi_n| \leqslant \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Dans ce cas la formule universelle généralisée $\forall x_1 \ldots \forall x_m\, C[A_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_m)]$ sera écrite

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m [A_1(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0 \wedge \\ \wedge |A_n(x_1, \ldots, x_m)| \leqslant \Phi\big(A_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, A_{n-1}(x_1, \ldots, x_m)\big)]$$

ou même, en abrégé:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m \big[|A_n(x_1, \ldots, x_m)| \leqslant \Phi\big(A_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, A_{n-1}(x_1, \ldots, x_m)\big)\big] .$$

D'autres abréviations du même genre, évidentes par elles-mêmes, seront utilisées éventuellement; par exemple $\forall x_1 \ldots \forall x_m [A_1(x_1, \ldots, x_m) = A_2(x_1, \ldots, x_m)]$ est une formule universelle généralisée qui représente l'ensemble des deux formules

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m [A_1(x_1, \ldots, x_m) \leqslant A_2(x_1, \ldots, x_m)] ,$$

$$\forall x_1 \ldots \forall x_m [A_2(x_1, \ldots, x_m) \leqslant A_1(x_1, \ldots, x_m)] .$$

Systèmes d'axiomes réguliers. Dans toute la suite on suppose que le langage $\mathfrak{L}$ a un symbole de constante distingué, noté 0, et un symbole de relation à deux arguments distingué noté D. $N(x)$ est maintenant, par définition, l'expression $D(0, x)$. Un système d'axiomes universels $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{L}$ est dit *régulier* s'il est borné, s'il contient les formules suivantes:

(1) $\quad \forall x \forall y \big(D(x, y) \geqslant 0\big), \quad \forall x \big(D(x, x) = 0\big), \quad \forall x \forall y [D(x, y) = D(y, x)]$

et si tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ a la propriété suivante: quels que soient $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in |\mathcal{M}|$ le symbole de relation R à k arguments de $\mathfrak{L}$, le symbole de fonction f à k arguments de $\mathfrak{L}$, si

$$\mathcal{M} \models D(a_1, b_1) = D(a_2, b_2) = \ldots = D(a_k, b_k) = 0 ,$$

alors

$$\mathcal{M} \models R(a_1, \ldots, a_k) = R(b_1, \ldots, b_k) \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \models D\big(f(a_1, \ldots, a_k), f(b_1, \ldots, b_k)\big) = 0 .$$

Lemme IV.1. *Soient $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universels régulier de $\mathfrak{L}$, $t(x_1, \ldots, x_n)$ un terme de $\mathfrak{L}$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ une expression sans quantificateur de $\mathfrak{L}$. Si $\mathcal{M} \models \mathcal{A}$ et si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in |\mathcal{M}|$ sont tels que $D(a_1, b_1) = \ldots$ $\ldots = D(a_n, b_n) = 0$, alors on a dans $\mathcal{M}$:*

$$D\big(t(a_1, \ldots, a_n), t(b_1, \ldots, b_n)\big) = 0 \quad \text{et} \quad F(a_1, \ldots, a_n) = F(b_1, \ldots, b_n)\,.$$

On montre la première propriété par induction sur la longueur de t: on écrit $t = f(u_1, \ldots, u_k)$. Par hypothèse d'induction, on a

$$D\big(u_i(a_1, \ldots, a_n), u_i(b_1, \ldots, b_n)\big) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)\,.$$

Comme $\mathcal{A}$ est régulier, on a donc

$$D\big[f\big(u_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, u_k(a_1, \ldots, a_n)\big), f\big(u_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, u_k(b_1, \ldots, b_n)\big)\big] = 0$$

soit $D[t(a_1, \ldots, a_n), t(b_1, \ldots, b_n)] = 0$.

Lorsque $F(x_1, \ldots, x_n)$ est atomique, c'est-à-dire s'écrit $R(t_1, \ldots, t_k)$ on a

$$D\big(t_i(a_1, \ldots, a_n), t_i(b_1, \ldots, b_n)\big) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant k)$$

d'après ce qu'on vient de montrer. Donc

$$R\big(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n)\big) = R\big(t_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, t_k(b_1, \ldots, b_n)\big)$$

puisque $\mathcal{A}$ est régulier.

Le résultat général est alors immédiat, puisque $F(x_1, \ldots, x_n)$ s'écrit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i R_i(t_1^i, \ldots, t_{k_i}^i) + \lambda$. c.q.f.d.

Theoreme IV.1. *Soient $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universel régulier de $\mathfrak{L}$, $t(x_1, \ldots, x_n)$ un terme de $\mathfrak{L}$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ une expression sans quantificateur de $\mathfrak{L}$, K, ε deux réels > 0. Alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in |\mathcal{M}|$ tels que*

$$N(a_1), \ldots, N(a_n), N(b_1), \ldots, N(b_n) \leqslant K \quad \text{et} \quad D(a_1, b_1), \ldots, D(a_n, b_n) \leqslant \eta$$

on ait dans $\mathcal{M}$:

$$D\big(t(a_1, \ldots, a_n), t(b_1, \ldots, b_n)\big) < \varepsilon \quad \text{et} \quad |F(a_1, \ldots, a_n) - F(b_1, \ldots, b_n)| < \varepsilon\,.$$

On raisonne par l'absurde. On ajoute au langage $\mathfrak{L}$ les nouveaux symboles de constante $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ et on considère le système d'axiomes universel borné:

$$\mathcal{A},\ N(c_1) \leqslant K,\ \ldots,\ N(c_n) \leqslant K, \quad N(d_1) \leqslant K,\ \ldots,\ N(d_n) \leqslant K,$$

$$D(c_1, d_1) \leqslant \frac{1}{p},\ \ldots,\ D(c_n, d_n) \leqslant \frac{1}{p}, \quad D\big(t(c_1, \ldots, c_n), t(d_1, \ldots, d_n)\big) \geqslant \varepsilon$$

(p décrivant l'ensemble des entiers $\geqslant 1$). D'après le lemme IV.1 cet ensemble n'a pas de modèle. Or, par hypothèse, tout sous-ensemble fini en a un, ce qui contredit le théorème II.3. On fait la même démonstration pour la deuxième partie du théorème, en remplaçant la formule $D\big(t(c_1, \ldots, c_n), t(d_1, \ldots, d_n)\big) \geqslant \varepsilon$ par

$$|F(c_1, \ldots, c_n) - F(d_1, \ldots, d_n)| \geqslant \varepsilon\,. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Exemple de système d'axiomes réguliers. Pour que $\mathcal{A}$ soit régulier il suffit qu'il soit borné et contienne les formules suivantes:

Les formules (1).

Pour chaque symbole de relation R à n arguments, la formule généralisée:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n [|R(x_1, \ldots, x_n) - R(y_1, \ldots, y_n)|$$
$$\leqslant \Phi_R(Dx_1y_1, \ldots, Dx_ny_n, Nx_1, \ldots, Nx_n, Ny_1, \ldots, Ny_n)]$$

où $\Phi_R\colon \boldsymbol{R}_+^{3n} \to \boldsymbol{R}_+$ est une fonction concave telle que $\Phi(0, \ldots, 0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$ quels que soient $\eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \boldsymbol{R}_+$.

Pour chaque symbole de fonction f à n arguments, la formule généralisée:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n [D(fx_1 \ldots x_n, fy_1 \ldots y_n)$$
$$\leqslant \Phi_f(Dx_1y_1, \ldots, Dx_ny_n, Nx_1, \ldots, Nx_n, Ny_1, \ldots, Ny_n)]$$

où $\Phi_f\colon \boldsymbol{R}_+^{3n} \to \boldsymbol{R}_+$ a les mêmes propriétés.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathfrak{L}$; une suite $(a_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ d'éléments de $|\mathcal{M}|$ est dite *bornée* si on a $N(a_n) \leqslant K$ pour tout n (K réel $\geqslant 0$). On dit qu'elle converge vers $a \in |\mathcal{M}|$ si $D(a_n, a) \to 0$ quand $n \to \infty$. On dit que c'est une suite de Cauchy si elle est bornée et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \boldsymbol{N}$ tel que $D(a_m, a_n) \leqslant \varepsilon$ quels que soient $m, n \geqslant p$. Le modèle $\mathcal{M}$ est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{M}$ converge.

Un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{L}$ est dit *standard* s'il a les propriétés suivantes:

il satisfait les formules (1):

$$\forall x \forall y \big(D(x, y) \geqslant 0\big); \quad \forall x \big(D(x, x) = 0\big); \quad \forall x [D(x, y) = D(y, x)]\,,$$

il est complet,

si $a, b \in |\mathcal{M}|$ et $D(a, b) = 0$ alors $a = b$.

Théorème IV.2. *Soit $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universel régulier. À chaque modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est canoniquement associé un modèle $\mathcal{M}'$ standard qui satisfait les mêmes formules universelles closes de $\mathfrak{L}$ que $\mathcal{M}$.*

On définit sur $|\mathcal{M}|$ une relation binaire $\sim$ en posant $a \sim b$ $\Leftrightarrow D(a, b) = 0$. Comme $\mathcal{A}$ contient les formules (1) cette relation est reflexive et symétrique. D'autre part, comme $\mathcal{A}$ est régulier, si $a_1, a_2, b_1, b_2 \in |\mathcal{M}|$ sont tels que $D(a_1, b_1) = D(a_2, b_2) = 0$, alors $D(a_1, a_2) = D(b_1, b_2)$. Donc, avec $a_1 = a$, $a_2 = c$, $b_1 = b_2 = b$, on voit que $a \sim b$ et $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

$\sim$ est donc une relation d'équivalence; si R est un symbole de relation de $\mathfrak{L}$ à n arguments, f un symbole de fonction de $\mathfrak{L}$ à n arguments, alors les fonctions $\bar{R}$: $|\mathcal{M}|^n \to \boldsymbol{R}$, $\bar{f}$: $|\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$ sont compatibles avec cette relation d'équivalence (par définition du fait que $\mathcal{A}$ est régulier). On peut donc définir le modèle $\mathcal{M}^*$, quotient de $\mathcal{M}$ par cette relation d'équivalence. $\mathcal{M}^*$ a évidemment les propriétés suivantes:

si $u, v \in \mathcal{M}^*$ et $D(u, v) = 0$ dans $\mathcal{M}^*$, alors $u = v$,

$\mathcal{M}^*$ satisfait les mêmes formules universelles closes de $\mathfrak{L}$ que $\mathcal{M}$,

si $\mathcal{M}$ est complet, $\mathcal{M}^*$ l'est aussi.

Il ne reste donc plus qu'à construire un modèle $\mathcal{M}_1$ de $\mathfrak{L}$, complet et satisfaisant les mêmes formules universelles closes de $\mathfrak{L}$ que $\mathcal{M}$. Le modèle $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_1^*$ aura alors les propriétés voulues.

On prend pour $|\mathcal{M}_1|$ l'ensemble des suites de Cauchy d'éléments de $\mathcal{M}$. Si f est un symbole de fonction de $\mathfrak{L}$ à k arguments, et $s_1, \ldots, s_k \in |\mathcal{M}_1|$, $f(s_1, \ldots, s_k)$ est la suite s définie par $s(n) = f\big(s_1(n), \ldots, s_k(n)\big)$.

Cette suite est bien de Cauchy: en effet, il existe un réel $K > 0$ tel que $N\big(s_i(n)\big) \leqslant K$ dans $\mathcal{M}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $n \in N$) puisque toute suite de Cauchy est bornée par définition. D'après le théorème IV.1, il existe $\eta > 0$ tel que

$$D\Big(f\big(s_1(m), \ldots, s_k(m)\big), f\big(s_1(n), \ldots, s_k(n)\big)\Big) < \varepsilon \quad \text{dès que } D\big(s_i(m), s_i(n)\big) \leqslant \eta$$

$(1 \leqslant i \leqslant k)$. Or cela est réalisé si $m, n \geqslant p$ pour un certain entier p, puisque chacune des s_i est une suite de Cauchy. D'autre part la suite $s(n)$ est bornée dans $\mathcal{M}$, puisque $\mathcal{A}$ est borné, donc contient la formule

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k[N(fx_1 \ldots x_k) \leqslant M_f(1 + Nx_1 + \ldots + Nx_k)],$$

on a donc

$$Ns(n) = Nf\big(s_1(n), \ldots, s_k(n)\big) \leqslant M_f\big(1 + Ns_1(n) + \ldots + Ns_k(n)\big) \leqslant M_f(1 + kK).$$

Si R est un symbole de relation de $\mathfrak{L}$ à k arguments, on définit $R(s_1, \ldots, s_k)^{\mathcal{M}_1} = \lim\limits_{n\to\infty} R\big(s_1(n), \ldots, s_k(n)\big)^{\mathcal{M}}$: cette limite existe car la suite $R\big(s_1(n), \ldots, s_k(n)\big)^{\mathcal{M}}$ est une suite de Cauchy de réels (même démonstration). Pour chaque expression $F(x_1, \ldots, x_k)$ de $\mathfrak{L}$, sans quantificateur, on a donc

$$F(s_1, \ldots, s_k)^{\mathcal{M}_1} = \lim_{n\to\infty} F\big(s_1(n), \ldots, s_k(n)\big)^{\mathcal{M}}.$$

Donc si $\forall x_1 \ldots \forall x_k[F(x_1, \ldots, x_k) \geqslant 0]$ est une formule universelle close vraie dans $\mathcal{M}$ elle est aussi vraie dans $\mathcal{M}_1$. En particulier $\mathcal{M}_1$ satisfait $\mathcal{A}$.

Par ailleurs on a un isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{M}_1$ (à chaque $a \in |\mathcal{M}|$, associer la suite constante égale à a) et on peut donc considérer que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$.

Donc toute formule universelle vraie dans $\mathcal{M}_1$ est vraie dans $\mathcal{M}$.

Chaque point s de $|\mathcal{M}_1|$ est limite d'une suite d'éléments de $|\mathcal{M}|$ à savoir la suite $\big(s(n)\big)_{n\in N}$: en effet $D\big(s(n), s\big) = \lim\limits_{m\to\infty} D\big(s(n), s(m)\big) < \varepsilon$ pour n assez grand puisque la suite s est de Cauchy.

Soit alors s_n une suite de Cauchy d'éléments de $|\mathcal{M}_1|$. On a donc $N(s_n) \leqslant K$ pour tout n, ou encore $\lim\limits_{m\to\infty} N\big(s_n(m)\big) \leqslant K$.

D'autre part $s_n(m)$ converge vers s_n dans $\mathcal{M}_1$. Par suite on peut choisir un entier m_n tel que $N\big(s_n(m_n)\big) \leqslant 2K$, $D\big(s_n(m_n), s_n\big) \leqslant 1/n$.

On pose $a_n = s_n(m_n)$. Comme $\mathcal{M}_1 \models \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est régulier, il existe $\eta > 0$ tel que $D(a_n, s_n) \leqslant \eta$, $D(a_p, s_p) \leqslant \eta \Rightarrow |D(a_n, a_p) - D(s_n, s_p)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$.

Donc, si $n, p \geqslant 1/\eta$, on a $|D(a_n, a_p) - D(s_n, s_p)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Or il existe un entier q tel que $n, p \geqslant q \Rightarrow D(s_n, s_p) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Donc si $n, p \geqslant q, 1/\eta$ on a $D(a_n, a_p) \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que $(a_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}$. Par définition de $\mathcal{M}_1$, elle converge donc vers $s \in |\mathcal{M}_1|$. Mais $D(a_n, s_n) \leqslant 1/n$, donc $D(a_n, s_n) \leqslant \eta$ pour n assez grand; $D(a_n, s)$ est aussi $\leqslant \eta$ pour n assez grand puisque a_n tend vers s, et donc $D(s, s_n) \leqslant \varepsilon$ pour n assez grand. Cela montre que s_n tend vers s et donc que $\mathcal{M}_1$ est complet. c.q.f.d.

Théorème IV.3. *Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux systèmes d'axiomes universels, $\mathcal{A}$ étant convexe et $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ régulier. Si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'a pas de modèle standard, il existe une formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n[F(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0]$ de $\mathcal{A}$ et des termes clos $t_1, \ldots, t_n$ de $\mathfrak{L}$ tels que $\mathcal{B} \vdash F(t_1, \ldots, t_n) \leqslant -1$.*

En effet, d'après le théorème IV.2, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'a pas de modèle du tout, et il suffit d'appliquer le théorème II.2.

Théorème IV.4 (définissabilité). *Soit $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universels de $\mathfrak{L}$, régulier, homogène, comportant le symbole de fonction f à k arguments, et définissant implicitement ce symbole dans tous les modèles standards (c'est-à-dire: si $\mathcal{M}$ est un modèle standard de $\mathfrak{L} - \{f\}$, il y a au plus une façon de définir la valeur $\bar{f}$ de f dans $\mathcal{M}$, $\bar{f}$: $|\mathcal{M}|^k \to |\mathcal{M}|$, de façon à satisfaire $\mathcal{A}$). Alors, pour toute expression sans quantificateur homogène $E(z_1, \ldots, z_p)$, comportant le symbole f et définie positive (c'est-à-dire:*

$$\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p[E(z_1, \ldots, z_p) \geqslant 0])$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une expression sans quantificateur homogène $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p)$ ne comportant pas le symbole f telle que, *dans tout modèle de* $\mathcal{A}$, *on ait*:

$$0 \leqslant E(z_1, \ldots, z_p) - \inf_{x_1}\sup_{y_1} \ldots \inf_{x_n}\sup_{y_n} F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p) \leqslant \varepsilon(Nz_1 + \ldots + Nz_p) .$$

Comme dans la démonstration du théorème III.3, on peut supposer que $\mathcal{A} \vdash \forall z_1 \ldots \forall z_p[E(z_1, \ldots, z_p) \geqslant Nz_1 + \ldots + Nz_p]$. On ajoute au langage les symboles de constante $c_1, \ldots, c_p$ et on voit de même que l'ensemble $\mathcal{A}, E(c_1, \ldots, c_p) \geqslant 1+\varepsilon, \mathcal{A}', E'(c_1, \ldots, c_p) \leqslant 1$ n'a pas de modèle standard. Comme cet ensemble est régulier, il n'a pas de modèle du tout (théorème IV.2). On termine alors la démonstration comme pour le théorème III.3.

V. Homomorphismes de modèles

Un ensemble Δ de couples d'expressions sans quantificateur de $\mathfrak{L}$ sera appelée une caractéristique d'homomorphismes (dans le langage $\mathfrak{L}$) si, pour tout couple $(F, F^*) \in \Delta$, F et F^* ont les mêmes variables libres $(F = F(x_1, \ldots, x_n), F^* = F^*(x_1, \ldots, x_n))$ et s'il existe un couple $(F, F') \in \Delta$ tel que F soit l'expression $N(x)$. Δ sera dite contractante si le couple $(D(x, y), D(x, y)) \in \Delta$.

$\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ étant deux modèles de $\mathfrak{L}$, une application $\varphi\colon |\mathcal{M}| \to |\mathcal{M}'|$ sera appelée un Δ-homomorphisme si, quels que soit le couple

$$\big(F(x_1, \ldots, x_n), F^*(x_1, \ldots, x_n)\big) \in \Delta \quad \text{et} \quad a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$$

on a $F^{\mathcal{M}'}(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) \leqslant F^{*\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$; φ est dit contractant si $D^{\mathcal{M}'}(\varphi a_1, \varphi a_2) \leqslant D^{\mathcal{M}}(a_1, a_2)$ quels que soient $a_1, a_2 \in |\mathcal{M}|$. Il est clair que, si Δ est contractante, tout Δ-homomorphisme est contractant.

On fixe une fois pour toutes une énumération $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ des variables de $\mathfrak{L}$. On désignera alors par $\overline{\Delta}$ l'ensemble des couples $\big(F(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), F^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})\big)$, $i_1 \ldots, i_n$ étant des entiers $\geqslant 1$ et

$$\big(F(x_1, \ldots, x_n), F^*(x_1, \ldots, x_n)\big) \in \Delta .$$

Δ sera dite *homogène* si F, F^* sont homogènes quels que soit $(F, F^*) \in \Delta$.

THÉORÈME V.1. *Soit* $\mathcal{A}$ *un système d'axiomes régulier universel.* $\mathcal{M}$ *un modèle d'un langage* $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{A})$ *et* Δ *une caractéristique d'homomorphisme dans le langage* $\mathfrak{L}$. *Pour qu'il existe un modèle standard* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{A}$, *et un* Δ-*homomorphisme* $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{M}$ *satisfasse toutes les formules*

$$(1) \qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n[\varrho_1 F_1^*(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varrho_k F_k^*(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \lambda]$$

où $\varrho_1, \ldots, \varrho_k \in \boldsymbol{R}_+$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $(F_1, F_1)^*, \ldots, (F_k, F_k^*) \in \overline{\Delta}$ *sont tels que*

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n[\varrho_1 F_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \varrho_k F_k(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \lambda] .$$

Si, de plus, $\mathcal{A}$ *et* Δ *sont homogènes on peut ne considérer que les formules* (1) *dans lesquelles* $\lambda = 0$.

Il est immédiat que la condition est nécessaire.

Pour chaque $a \in |\mathcal{M}|$ on ajoute au langage $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$ un nouveau symbole de constante $\underline{a}$. On est ramené alors à trouver un modèle standard de l'ensemble des formules: $\mathcal{A}, F(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \leqslant F^{*\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ (le couple $(F(x_1, \ldots, x_n), F^*(x_1, \ldots, x_n))$ décrivant Δ, et $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$).

Cet ensemble est borné: car l'une des expressions F étant $N(x)$, il contient en particulier une formule de la forme $N(\underline{a}) \leqslant \lambda$, pour chaque nouvelle constante $\underline{a}$. Cet ensemble de formules est donc régulier, puisque $\mathcal{A}$ l'est.

D'après le théorème IV.3, s'il n'a pas de modèle standard, il existe des éléments

$$\big(F_1(x_1, \ldots, x_n), F_1^*(x_1, \ldots, x_n)\big), \ldots, \big(F_k(x_1, \ldots, x_n), F_k^*(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

de Δ, $\varrho_1, \ldots, \varrho_k \in \boldsymbol{R}_+$ et $a_1, \ldots, a_p \in |\mathcal{M}|$ tels que

$$\mathcal{A} \vdash \varrho_1 F_1(\underline{a}_{i_1^1}, \ldots, \underline{a}_{i_n^1}) + \ldots + \varrho_k F_k(\underline{a}_{i_1^k}, \ldots, \underline{a}_{i_n^k}) \geqslant \lambda$$

avec

$$\lambda = \varrho_1 F_1^{*\mathcal{M}}(a_{i_1^1}, \ldots, a_{i_n^1}) + \ldots + \varrho_k F_k^{*\mathcal{M}}(a_{i_1^k}, \ldots, a_{i_n^k}) + 1$$

$i_1^1, \ldots, i_n^1, \ldots, i_1^k, \ldots, i_n^k$ étant des entiers compris entre 1 et p.

Comme les symboles de constante $\underline{a}$ ne sont pas dans le langage $\mathfrak{L}(\mathcal{A})$, on a

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_p[\varrho_1 F_1(x_{i_1^1}, \ldots, x_{i_n^1}) + \ldots + \varrho_k F_k(x_{i_1^k}, \ldots, x_{i_n^k}) \geqslant \lambda] .$$

On pose

$$F_j(x_{i_1^j}, \ldots, x_{i_n^j}) = G_j(x_1, \ldots, x_p) , \qquad F_j^*(x_{i_1^j}, \ldots, x_{i_n^j}) = G_j^*(x_1, \ldots, x_p) .$$

Alors $(G_j, G_j^*) \in \overline{\Delta}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ et on a

$$\mathcal{A} \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_p[\varrho_1 G_1(x_1, \ldots, x_p) + \ldots + \varrho_k G_k(x_1, \ldots, x_p) \geqslant \lambda] .$$

Or, d'après la définition de λ, il est clair que $\mathcal{M}$ ne satisfait pas la formule $\varrho_1 G_1^*(a_1, \ldots, a_p) + \ldots + \varrho_k G_k^*(a_1, \ldots, a_p) \geqslant \lambda$ (puisque le premier membre prend la valeur $\lambda - 1$).

Il reste à considérer le cas où $\mathcal{A}, \Delta$ sont homogènes. Le résultat énoncé est évidemment un corollaire du lemme III.4.

Comme corollaire du théorème V.1 notons le

THÉORÈME V.2 (théorème de plongement). *Soient $\mathcal{A}$ un système d'axiomes universel régulier, $\mathcal{M}$ un modèle standard de $\mathfrak{L} \in \mathfrak{L}(\mathcal{A})$. Pour qu'il existe un modèle standard $\mathcal{N}$ de $\mathcal{A}$ qui soit une extension de $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $\mathcal{M}$ satisfasse toutes les conséquences de $\mathcal{A}$ de la forme*

$$\forall x_1 \dots \forall x_n [\varrho_1 A_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \varrho_k A_k(x_1, \dots, x_n) + \\ + \lambda_1 B_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_l B_l(x_1, \dots, x_n) \geqslant \lambda]$$

où $\varrho_1, \dots, \varrho_k \in \boldsymbol{R}_+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda \in \boldsymbol{R}$, $A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_k(x_1, \dots, x_n)$ sont des expressions du type $D(fx_{i_1} \dots x_{i_p}, x_i)$ (f symbole de fonction de $\mathfrak{L}$) et $B_1(x_1, \dots, x_n), \dots, B_l(x_1, \dots, x_n)$ des expressions du type $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ (R symbole de relation de $\mathfrak{L}$).

On prend pour Δ l'ensemble des couples d'expressions de $\mathfrak{L}$ de la forme: $\big(D(fx_1 \dots x_p, y), D(fx_1 \dots x_p, y)\big)$, $\big(R(x_1, \dots, x_p), R(x_1, \dots, x_p)\big)$, $\big(-R(x_1, \dots, x_p), -R(x_1, \dots, x_p)\big)$ (f, R symboles de fonction et de relation de $\mathfrak{L}$).

Un Δ-homomorphisme φ: $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est alors un isomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$: car on a

$$R(\varphi a_1, \dots, \varphi a_p)^{\mathcal{N}} = R(a_1, \dots, a_p)^{\mathcal{M}}$$

et

$$D\big(f(\varphi a_1, \dots, \varphi a_p), \varphi b\big)^{\mathcal{N}} \leqslant D\big(f(a_1, \dots, a_p), b\big)^{\mathcal{M}}$$

quels que soient $a_1, \dots, a_p, b \in |\mathcal{M}|$. En particulier, lorsque $b = f(a_1, \dots, a_p)$ on trouve $f(\varphi a_1, \dots, \varphi a_p) = \varphi f(a_1, \dots, a_p)$. c.q.f.d.

Diagramme, diagramme universel, u-extensions. Si $\mathcal{M}$ est un modèle standard de $\mathfrak{L}$ on appelle *diagramme de $\mathcal{M}$* l'ensemble des formules closes suivantes sans quantificateur à paramètres dans $\mathcal{M}$:

$D(fa_1 \dots a_p, b) \leqslant 0$ pour chaque symbole fonctionnel f de $\mathfrak{L}$, $a_1, \dots, a_p \in |\mathcal{M}|$, $b = f(a_1, \dots, a_p)$ dans $\mathcal{M}$.

$R(a_1, \dots, a_p) = \lambda$ pour chaque symbole de relation de R de $\mathfrak{L}$, $a_1, \dots, a_p \in |\mathcal{M}|$ et $\lambda = R(a_1, \dots, a_p)^{\mathcal{M}}$.

Le diagramme de $\mathcal{M}$ est noté $D_{\mathcal{M}}$. Il est clair que les modèles standards de $D_{\mathcal{M}}$ sont exactement les extensions de $\mathcal{M}$.

On appelle *diagramme universel de $\mathcal{M}$* et on désigne par $U_{\mathcal{M}}$ l'ensemble des formules closes universelles de $\mathfrak{L}$, à paramètres dans $\mathcal{M}$ qui sont satisfaites dans $\mathcal{M}$. Evidemment $U_{\mathcal{M}} \supset D_{\mathcal{M}}$. Les modèles de $U_{\mathcal{M}}$ sont appelés *u-extensions de $\mathcal{M}$*.

Le modèle $\mathcal{M}$ est dit *régulier* si $U_{\mathcal{M}}$ est un système d'axiomes régulier.

THÉORÈME V.3. *Soient $\mathcal{M}$ un modèle régulier de $\mathfrak{L}$, $\mathcal{B}$ un système d'axiomes universel régulier d'un langage $\mathfrak{L}(\mathcal{B}) \supset \mathfrak{L}$, Δ, Γ deux caractéristiques d'homomorphisme dans le langage $\mathfrak{L}$, Γ étant contractante. Alors les conditions* 1, 2 *suivantes sont équivalentes, et la condition* 3 *implique* 1, 2:

1) *Il existe un modèle standard $\mathcal{N}$ de $\mathcal{B}$, une u-extension $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$, un Δ-homomorphisme φ: $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et un Γ-homomorphisme ψ: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}'$ tels que $\psi \circ \varphi$ soit l'identité.*

2) *Quels que soient les couples d'expressions $\big(F_r(x_1, \dots, x_n), F_r^*(x_1, \dots x_n)\big) \in \overline{\Delta}$, $\big(G_s(y_1, \dots, y_p), G_s^*(y_1, \dots, y_p)\big) \in \overline{\Gamma}$, $\varrho_r, \sigma_s, \tau_{ij} \in \boldsymbol{R}_+$ ($1 \leqslant r \leqslant k$, $1 \leqslant s \leqslant l$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$), $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{M}|$ et les termes $t_j(x_1, \dots, x_n)$ ($1 \leqslant j \leqslant p$) de $\mathfrak{L}(\mathcal{B})$ tels que*

$$\text{(i)} \quad \mathcal{B} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \Big[\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r(x_1, \dots, x_n) - \sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s^*\big(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots \\ \dots, t_p(x_1, \dots, x_n)\big) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D\big(x_i, t_j(x_1, \dots, x_n)\big) \geqslant \lambda\Big]$$

alors $\mathcal{M}$ a une u-extension qui satisfait la formule

$$\text{(ii)} \quad \exists y_1 \dots \exists y_p \Big[\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r^*(a_1, \dots, a_n) - \sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s(y_1, \dots, y_p) - \\ - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(a_i, y_j) \geqslant \lambda\Big].$$

3) *Pour chaque formule* (i) *qui est conséquence de $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}$ satisfait la formule:*

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y_1 \dots \exists y_p \Big[\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r^*(x_1, \dots, x_n) - \\ - \sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s(y_1, \dots, y_p) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(x_i, y_j) \geqslant \lambda\Big].$$

Enfin si $\mathcal{B}, \Delta, \Gamma$ sont homogènes, on peut ne considérer, dans les conditions 2, 3 *que les formules* (i) *dans lesquelles $\lambda = 0$.*

La dernière affirmation de l'énoncé résulte immédiatement du lemme III.4. Il est d'autre part évident que $3 \Rightarrow 2$, puisque $\mathcal{M}$ est lui-même une u-extension de $\mathcal{M}$.

$1 \Rightarrow 2$. La condition 1 étant supposée satisfaite, on montre que $\mathcal{M}'$, qui est une u-extension de $\mathcal{M}$ satisfait la formule (ii). On pose

$$b_j = t_j(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n) \in |\mathcal{M}| \quad (1 \leqslant j \leqslant p),$$

et, comme $\mathcal{N} \models \mathcal{B}$ on a:

$$\mathcal{N} \models \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n) - \sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s^*(b_1, \dots, b_p) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(\varphi a_i, b_j) \geqslant \lambda.$$

Or on a

$$F_r(\varphi a_1, \dots, \varphi a_n)^{\mathcal{N}} \leqslant F_r^*(a_1, \dots, a_n)^{\mathcal{M}} \qquad (1 \leqslant r \leqslant k)$$

puisque φ est un Δ-homomorphisme

$$G_s(\psi b_1, \dots, \psi b_p)^{\mathcal{M}'} \leqslant G_s^*(b_1, \dots, b_p)^{\mathcal{N}} \qquad (1 \leqslant s \leqslant l)$$

puisque ψ est un Γ-homomorphisme. Enfin

$$D(\psi \circ \varphi a_i, \psi b_j)^{\mathcal{M}'} \leqslant D(\varphi a_i, b_j)^{\mathcal{N}}$$

puisque ψ est contractante; ou encore

$$D(a_i, \psi b_j)^{\mathcal{M}'} \leqslant D(\varphi a_i, b_j)^{\mathcal{N}}$$

puisque $\psi \circ \varphi$ est l'identité. Il en résulte que, dans $\mathcal{M}'$, on a

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r^*(a_1, \dots, a_n) - \sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s(\psi b_1, \dots, \psi b_p) - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(a_i, \psi b_j) \geqslant \lambda$$

ce qui montre que $\mathcal{M}'$ satisfait la formule (ii).

$2 \Rightarrow 1$. Ajoutons à $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ un nouveau symbole de constante $\underline{a}$ pour chaque $a \in |\mathcal{M}|$; trouver un modèle $\mathcal{N}$ de $\mathcal{B}$ et un Δ-homomorphisme $\varphi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ revient à trouver un modèle $\mathcal{N}'$ de l'ensemble de formules

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{F(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q) \leqslant F^*(a_1, \dots, a_q)^{\mathcal{M}};\ a_1, \dots, a_q \in |\mathcal{M}|,$$
$$\big(F(x_1, \dots, x_q), F^*(x_1, \dots, x_q)\big) \in \Delta\};$$

en effet, la valeur $\varphi(a)$ de l'homomorphisme cherché au point $a \in |\mathcal{M}|$ sera donnée par l'interprétation de $\underline{a}$ dans $\mathcal{M}'$.

On cherche donc, en fin de compte, un modèle $\mathcal{N}'$ de $\mathcal{B}'$ et un Γ-homomorphisme $\psi\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{M}'$, où $\mathcal{M}'$ soit un modèle de $U_{\mathcal{M}}$, tel que $\psi(\underline{a}^{\mathcal{N}'}) = a$ pour chaque $a \in \mathcal{M}$ ($\underline{a}^{\mathcal{N}'}$ étant l'interprétation du symbole de constante $\underline{a}$ dans $\mathcal{N}'$). Comme ψ doit être contractant (puisque Γ l'est par hypothèse) cette dernière condition revient à exiger que $D(a, \psi b)^{\mathcal{M}'} \leqslant D(\underline{a}, b)^{\mathcal{N}'}$.

On cherche donc en fait un Γ'-homomorphisme $\psi\colon \mathcal{N}' \to \mathcal{M}'$, où

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\big(D(\underline{a}, x), D(\underline{a}, x)\big);\ a \in |\mathcal{M}|\}.$$

D'après le théorème V.1, applicable puisque $U_{\mathcal{M}}$ est régulier, il faut et il suffit que $\mathcal{N}'$ satisfasse l'ensemble $\mathcal{A}'$ des formules suivantes:

$$\forall y_1 \dots \forall y_p \Big[\sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s^*(y_1, \dots, y_p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(\underline{a}_i, y_j) \geqslant \lambda\Big]$$

avec $(G_s, G_s^*) \in \overline{\Gamma}$, $\sigma_s, \tau_{ij} \in \boldsymbol{R}_+$ $(1 \leqslant s \leqslant l,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$ et $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tels que

$$U_{\mathcal{M}} \vdash \forall y_1 \dots \forall y_p \Big[\sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s(y_1, \dots, y_p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(a_i, y_j) \geqslant \lambda\Big].$$

Supposons alors la condition 1 du théorème non réalisée; il s'agit de voir que la condition 2 est non réalisée aussi. D'après ce qui précède l'ensemble $\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'$ n'a pas de modèle standard; autrement dit, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ n'a pas de modèle standard, si on pose

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{F(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_q) \leqslant F^*(a_1, \dots, a_q)^{\mathcal{M}};\ a_1, \dots, a_q \in |\mathcal{M}|,$$
$$\big(F(x_1, \dots, x_q), F^*(x_1, \dots, x_q)\big) \in \Delta\}.$$

$\mathcal{B}$ étant régulier, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ l'est aussi: les seuls symboles qui apparaissent dans $\mathcal{A}$ et non dans $\mathcal{B}$ sont les $\underline{a}$; or, dans $\mathcal{A}$, il y a une formule de la forme $N(\underline{a}) \leqslant \mu$ puisque l'un des couples $(F, F^*) \in \Delta$ est tel que F est Nx. On peut alors appliquer le théorème IV.3 et on obtient ainsi des termes $t_j(x_1, \dots, x_n)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ et $a_i \in |\mathcal{M}|$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que

$$\mathcal{B} \vdash \sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s^*\big(t_1(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n), \dots, t_p(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)\big) +$$
$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D\big(\underline{a}_i, t_j(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)\big) - \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r(\underline{a}_{i_1^r}, \dots, \underline{a}_{i_q^r})$$
$$\leqslant -1 + \lambda - \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r F_r^*(a_{i_1^r}, \dots, a_{i_q^r})^{\mathcal{M}}$$

avec $\varrho_r, \sigma_s, \tau_{ij} \in \boldsymbol{R}_+$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $(F_r, F_r^*) \in \Delta$, $(G_s, G_s)^* \in \overline{\Gamma}$, la formule

$$\forall y_1 \dots \forall y_p \Big[\sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s^*(y_1, \dots, y_p) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D(\underline{a}_i, y_j) \geqslant \lambda\Big]$$

étant dans $\mathcal{A}'$.

On pose

$$F_r(x_{i_1^r}, \dots, x_{i_q^r}) = H_r(x_1, \dots, x_n) \qquad (1 \leqslant r \leqslant k).$$

On a alors $(H_r, H_r^*) \in \bar{\bar{\Delta}}$; comme les $\underline{a}_i$ sont des symboles de constante qui n'apparaissent pas dans $\mathcal{B}$, on voit que

$$\mathcal{B} \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \Big[\sum_{1 \leqslant s \leqslant l} \sigma_s G_s^*\big(t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_p(x_1, \dots, x_n)\big) +$$
$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \tau_{ij} D\big(x_i, t_j(x_1, \dots, x_n)\big) - \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r H_r(x_1, \dots, x_n) \leqslant \nu\Big]$$

avec $\nu = -1 + \lambda - \sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \varrho_r H_r^*(a_1, \dots, a_n)^{\mathcal{M}}$.

Or, la formule

$$\forall y_1 \dots \forall y_p\Big[\sum_{1\leqslant s\leqslant l} \sigma_s G_s(y_1, \dots, y_p) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \tau_{ij} D(a_i, y_j) \geqslant \lambda\Big]$$

est conséquence de $U_{\mathcal{M}}$, donc satisfaite dans toute u-extension de $\mathcal{M}$.

D'autre part, dans toute extension de $\mathcal{M}$, on a:

$$\sum_{1\leqslant r\leqslant k} \varrho_r H_r^*(a_1, \dots, a_n) = \sum_{1\leqslant r\leqslant k} \varrho_r H_r^*(a_1, \dots, a_n)^{\mathcal{M}}.$$

Il en résulte que, dans toute u-extension de $\mathcal{M}$ on a

$$\forall y_1 \dots \forall y_p\Big[\sum_{1\leqslant s\leqslant l} \sigma_s G_s(y_1, \dots, y_p) + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \tau_{ij} D(a_i, y_j) - \sum_{1\leqslant r\leqslant k} \varrho_r H_r^*(a_1, \dots, a_n) \geqslant 1+\nu\Big]$$

ce qui contredit la condition 2. c.q.f.d.

VI. Applications aux espaces normés

Tous les espaces vectoriels considérés sont des $\boldsymbol{R}$-espaces vectoriels; p étant un réel $\geqslant 1$, on appellera p-espace de Banach un espace vectoriel E muni d'une application $\Phi\colon E\to \boldsymbol{R}_+$, telle que $\Phi(x)^{1/p}$ soit une norme sur E pour laquelle E est complet.

Axiomes pour les p-espaces de Banach. On désigne par $\mathfrak{L}_0$ le langage qui a un seul symbole de relation D à deux arguments, un symbole de constante 0, un symbole de fonction $+$ à deux arguments, un symbole de fonction λ à un argument pour chaque $\lambda \in \boldsymbol{R}$. L'expression $D(x, 0)$ est notée $N(x)$.

L'ensemble suivant de formules universelles homogènes de $\mathfrak{L}_0$ est appelé système d'axiomes pour les p-espaces de Banach et noté $\mathcal{B}_p$ (p est un réel $\geqslant 1$ fixé):

$$\forall x D(x, x) = 0, \quad \forall x\forall y\big(D(x, y) \geqslant 0\big), \quad \forall x\forall y\big(D(x, y) = D(y, x)\big),$$
$$\forall x\forall y\forall z\big[D(x, z) \leqslant [D(x, y)^{1/p} + D(y, z)^{1/p}]^p\big]$$

(il s'agit d'une formule universelle généralisée; en effet $(\xi^{1/p}+\eta^{1/p})^p$ est une fonction concave de $\boldsymbol{R}_+^2$ dans $\boldsymbol{R}_+$).

$$\forall x\forall y[D(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|^p D(x, y)] \quad (\text{pour chaque } \lambda \in \boldsymbol{R}),$$
$$\forall x\forall y\forall z\big[D\big(x+(y+z), (x+y)+z\big) = 0\big], \quad \forall x[D(x+0, x) = 0],$$
$$\forall x\big[D\big(x+(-x), 0\big) = 0\big], \quad \forall x\forall y[D(x+y, y+x) = 0],$$
$$\forall x\forall y\big[D\big(\lambda(x+y), \lambda x+\lambda y\big) = 0\big] \quad (\text{pour chaque } \lambda \in \boldsymbol{R}),$$
$$\forall x\forall y\big[D\big((\lambda+\mu)x, \lambda x+\mu x\big) = 0\big] \quad (\text{pour chaque } \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}),$$
$$\forall x[D(1\cdot x, x) = 0],$$
$$\forall x\forall y\forall z[D(x, y) = D(x+z, y+z)].$$

Ce système d'axiomes est borné: en effet il y a pour conséquences

$$N0 = 0, \quad N(\lambda x) \leqslant |\lambda|^p N(x), \quad N(x+y) \leqslant 2^p(Nx+Ny)$$

(en effet $N(x+y) = D(x+y, 0) = D(x, -y) \leqslant [(D(x, 0)^{1/p} + D(y, 0)^{1/p}]^p$: cette dernière formule généralisée contient la formule $D(x, -y) \leqslant 2^p\big(D(x, 0)+D(y, 0)\big)$ puisque sur $\boldsymbol{R}_+^2$ on a $(\xi^{1/p}+\eta^{1/p})^p \leqslant 2^p(\xi+\eta)$); et aussi $D(x, y) \leqslant 2^p(Nx+Ny)$ (même démonstration).

Pour vérifier que $\mathcal{B}_p$ est régulier, on considère un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{B}_p$, et on a à montrer que la relation $\sim$ définie sur $|\mathcal{M}|$ par $a\sim b \Leftrightarrow \mathcal{M} \models D(a, b) = 0$ est une relation d'équivalence compatible avec les interprétations dans $\mathcal{M}$ des symboles de $\mathfrak{L}_0$.

Soient alors $a, b, c, d \in |\mathcal{M}|$ tels que $D(a, b) = D(c, d) = 0$; on a à montrer que $D(a, c) = D(b, d)$, ce qui est clair puisque $D(x, y)^{1/p}$ est une semi-distance sur $|\mathcal{M}|$; que $D(\lambda a, \lambda b) = 0$ pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$ ce qui est clair puisque $D(\lambda a, \lambda b) = |\lambda|^p D(a, b)$; que $D(a+c, b+d) = 0$, or

$$\begin{aligned} D(a+c, b+d) &= D\big(a+c-(b+c), b+d-(b+c)\big) \\ &= D(a-b, d-c) \leqslant [D(a-b, 0)^{1/p} + D(d-c, 0)^{1/p}]^p \\ &= [D(a, b)^{1/p} + D(c, d)^{1/p}]^p = 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_p$ est donc régulier. Il est alors clair que les modèles standards de $\mathcal{B}_p$ sont les espaces de Banach sur $\boldsymbol{R}$, l'interprétation de $D(x, y)$ étant $\|x-y\|^p$, celle de $N(x)$ étant $\|x\|^p$; autrement dit les p-espaces de Banach.

Axiomes pour les espaces L^p. On désigne par $\mathfrak{L}_1$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathfrak{L}_0$ un symbole de fonction $\cap$ à deux arguments. Les axiomes suivants, ajoutés à $\mathcal{B}_p$ forment les axiomes de p-espace de Banach réticulé:

$$\forall x[D(x\cap x, x) = 0], \quad \forall y\forall y[D(x\cap y, y\cap x) = 0],$$
$$\forall x\forall y\forall z\big[D\big(x\cap(y\cap z), (x\cap y)\cap z\big) = 0\big],$$
$$\forall x\forall y\forall z\big[D\big((x+z)\cap(y+z), x\cap y+z\big) = 0\big],$$
$$\forall x\forall y\big[D\big(\lambda(x\cap y), \lambda x\cap\lambda y\big) = 0\big] \quad (\text{pour chaque } \lambda \in \boldsymbol{R}_+).$$

Les modèles standards de ce système d'axiomes (qui n'est pas régulier) sont les p-espaces de Banach réticulés.

On note $x \cup y$ le terme $-[(-x) \cap (-y)]$, x^+ le terme $x \cup 0$, x^- le terme $(-x)^+$, et $|x|$ le terme $x^+ + x^-$.

Dans [7], (voir aussi [2]) il est démontré que, si un espace de Banach réticulé E a les propriétés suivantes:

$$\| |x| \| = \|x\| \quad \text{pour tout } x \in E,$$

$$\|x+y\|^p \geqslant \|x\|^p + \|y\|^p \geqslant \|x \cup y\|^p$$

quels que soient $x, y \in E$, $x, y \geqslant 0$, alors il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ tel que E soit isomorphe en tant qu'espace de Banach réticulé, à $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. On dira alors que E est un espace L^p.

Il en résulte que, si on ajoute aux axiomes de p-espace de Banach réticulé les formules suivantes:

$$\forall x \forall y [D(x^+, y^+) \leqslant D(x, y)], \qquad \forall x [N(|x|) = N(x)],$$

$$\forall x \forall y [N(x^+ + y^+) \geqslant N(x^+) + N(y^+)],$$

$$\forall x \forall y [N(x^+) + N(y^+) \geqslant N(x^+ \cup y^+)]$$

on obtient un système d'axiomes homogènes universels $\mathcal{A}_p$ du langage $\mathfrak{L}_1$ dont les modèles standards sont les p-espaces de Banach réticulés qui sont des espaces L^p.

Ce système d'axiomes est borné: en effet, il y a pour conséquence $N(x^+) \leqslant N(x)$, donc $N(x \cap y) = N\big(y - (y-x)^+\big) \leqslant 2^p N y + 2^p N (y-x)^+$.

Ce système d'axiomes est régulier; en effet, il a pour conséquences:

$$\begin{aligned} D(x \cap y, x' \cap y') &= D\big(y - (y-x)^+, y' - (y'-x')^+\big) \\ &\leqslant 2^p D(y, y') + 2^p D\big((y-x)^+, (y'-x')^+\big) \\ &\leqslant 2^p D(y, y') + 2^p D(y-x, y'-x') \\ &= 2^p D(y, y') + 2^p D(y-y', x-x') \\ &\leqslant 2^p D(y, y') + 4^p\big(N(y-y') + N(x-x')\big); \end{aligned}$$

d'où

$$D(x \cap y, x' \cap y') \leqslant 2^p D(y, y') + 4^p [D(y, y') + D(x, x')].$$

Ce système d'axiomes $\mathcal{A}_p$ sera appelé le système d'axiomes universels pour les espaces L^p.

Axiomes pour les espaces L^p munis d'un opérateur de multiplication par une fonction h de L^∞, $\|h\|_\infty \leqslant 1$. On désigne par $\mathfrak{L}_2$ le langage obtenu en ajoutant à $\mathfrak{L}_1$ un symbole de fonction P à un argument, et par $\mathcal{A}'_p$ le système d'axiomes obtenu en ajoutant à $\mathcal{A}_p$ les formules suivantes:

$$\forall x \forall y \big[D\big(P(x+y), Px + Py\big) = 0\big],$$

$$\forall x \big[D\big(P(\lambda x), \lambda P(x)\big) = 0\big] \quad (\text{pour chaque } \lambda \in \boldsymbol{R}),$$

$$\forall x \forall y [D(Px, Py) \leqslant D(x, y)],$$

$$\forall x \forall y [N(|Px| \cap |y|) \leqslant N(|x| \cap |y|)].$$

$\mathcal{A}'_p$ est évidemment régulier. On obtient un modèle standard $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}'_p$ en prenant un espace $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, en choisissant $h \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $\|h\|_\infty \leqslant 1$ et en interprétant le symbole P comme l'opérateur de multiplication par h dans $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$.

Or tout modèle standard $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}'_p$ est de ce type.

En effet, la restriction de $\mathcal{M}$ au langage $\mathfrak{L}_1$ est alors un modèle standard de $\mathcal{A}_p$ c'est-à-dire un espace $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$; de plus on peut supposer que Ω est réunion d'une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ deux à deux disjoints tels que $\mu(\Omega_i) < \infty$ (voir [2]). P est un opérateur linéaire continu sur $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ $\|P\| \leqslant 1$.

Pour chaque $A \in \mathfrak{A}$, tel que $\mu(A) < \infty$, posons $h_A = P(1_A)$ (1_A étant la fonction caractéristique de A); alors h_A est nulle en dehors de A, puisque, si $B \in \mathfrak{A}$, $B \cap A = \emptyset$, $\mu(B) < \infty$, on a

$$\|P(1_A) \cap 1_B\| \leqslant \|1_A \cap 1_B\| = 0.$$

De plus $h_{A \cup B} = h_A \cup h_B = h_A + h_B$ si A, B sont disjoints (puisque $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$). Il en résulte que si $X \in \mathfrak{A}$, $X \subset A$, alors h_X est la fonction égale à h_A sur X et à 0 ailleurs; autrement dit $h_X = h_A \cdot 1_X$.

Désignons par h la fonction mesurable réelle sur Ω qui est égale à h_{Ω_i} sur Ω_i ($i \in I$). Alors, quel que soit $A \in \mathfrak{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$, on a $h_A = h \cdot 1_A$.

Supposons qu'il existe $A \in \mathfrak{A}$, $0 < \mu(A) < \infty$ sur lequel on ait $|h| > 1$. On a alors $|h_A| > 1_A$ sur A, donc $\|h_A\|_p > \|1_A\|_p$; ceci contredit le fait que $\|P\| \leqslant 1$ puisque $h_A = P(1_A)$.

Il en résulte que $h \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ et que $\|h\|_\infty \leqslant 1$. On a alors $P(u) = hu$ pour toute $u \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ de la forme 1_A, donc aussi pour toute u étagée. Comme l'espace des fonctions étagées est dense dans $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, on a $P(u) = hu$ pour toute $u \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. c.q.f.d.

Le théorème suivant est une légère amélioration d'un résultat de [6].

Théorème VI.1. *Soient E un espace de Banach, p, M deux réels $\geqslant 1$. Pour qu'il existe un espace $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ et une application linéaire*

$\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ *telle que* $\|x\|\leqslant\|\varphi x\|\leqslant M\|x\|$ *pour tout* $x\in E$, *il faut et il suffit que* E *satisfasse toutes les formules*

$$\text{(i)}\qquad \forall x_1\ldots\forall x_n\Big[M^p\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}\|x_i+x_j-x_k\|^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i'\|x_i\|^p\geqslant 0\Big]$$

où ϱ_{ijk}, ϱ_i' *sont des réels* $\geqslant 0$ *tels que la formule*

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\Big[\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}|x_i+x_j-x_k|^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i'|x_i|^p\geqslant 0\Big]$$

soit vraie dans $\boldsymbol{R}$.

On applique le théorème V.1 en prenant pour $\mathcal{A}$ le système d'axiomes $\mathcal{A}_p$ du langage $\mathfrak{L}_1$; $\mathcal{M}$ est le p-espace de Banach E, modèle de $\mathfrak{L}_0$. Δ a deux éléments qui sont les couples $\big(N(x+y-z),\, M^pN(x+y-z)\big)$ et $(-Nx,\,-Nx)$. Un Δ-homomorphisme de E dans un modèle de $\mathcal{A}_p$ est une application $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ telle que $\|\varphi x\|_p\geqslant\|x\|$, $\|\varphi x+\varphi y-\varphi z\|_p\leqslant M\|x+y-z\|$ quels que soient $x,y,z\in E$.

Pour $x=y=z=0$ on en déduit $\varphi 0=0$; pour $y=0$ on en déduit alors $\|\varphi x-\varphi z\|_p\leqslant M\|x-z\|$; pour $z=x+y$ on a $\varphi(x+y)=\varphi x+\varphi y$. Donc φ est continue et additive, et par suite est linéaire.

Un Δ-homomorphisme de E dans un modèle de $\mathcal{A}_p$ est donc exactement une application φ du type indiqué dans l'énoncé du théorème.

D'après le théorème V.1 pour qu'une telle application existe il faut et il suffit que E satisfasse toutes les formules (i) qui sont telles que la formule

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\Big[\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}N(x_i+x_j-x_k)-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i'N(x_i)\geqslant 0\Big]$$

soit conséquence de $\mathcal{A}_p$, c'est-à-dire vraie dans tout espace L^p. Or cela revient à dire que la formule

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\Big[\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}|x_i+x_j-x_k|^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i'|x_i|^p\geqslant 0\Big]$$

est vraie dans $\boldsymbol{R}$: car alors, quels que soient $u_1,\ldots,u_n\in L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ et $\omega\in\Omega$, on aura

$$\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}|u_i(\omega)+u_j(\omega)-u_k(\omega)|^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i'|u_i(\omega)|^p\geqslant 0\,.$$

En intégrant sur Ω avec la mesure μ, on obtient bien:

$$\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}\|u_i+u_j-u_k\|_p^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i'\|u_i\|_p^p\geqslant 0\,.$$

c.q.f.d.

THÉORÈME VI.2. *Soient* E *un espace de Banach,* P *une application de* E *dans* E, p, M *deux réels* $\geqslant 1$. *Pour qu'il existe un espace* $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $h\in L^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\|h\|_\infty\leqslant 1$, *et une application linéaire* $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ *telle que* $\|x\|\leqslant\|\varphi x\|\leqslant M\|x\|$, $\varphi Px=h\varphi(x)$ *pour tout* $x\in E$, *il faut et il suffit que, dans* E, *les formules suivantes soient vraies:*

$$\text{(i)}\qquad \forall x_1\ldots\forall x_n\Big[M^p\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}\|x_i+x_j-x_k\|^p+ +M^p\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varrho_{ij}'\|Px_i-x_j\|^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i''\|x_i\|^p\geqslant 0\Big]$$

où ϱ_{ijk}, ϱ_{ij}', ϱ_i'' *sont des réels* $\geqslant 0$ *tels que la formule*

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\Big[\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}|x_i+x_j-x_k|^p+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varrho_{ij}'|\alpha x_i-x_j|^p- -\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i''|x_i|^p\geqslant 0)\Big]$$

soit vraie dans $\boldsymbol{R}$, *quel que soit le réel* α, $|\alpha|\leqslant 1$.

On applique le théorème V.1 en prenant pour $\mathcal{A}$ le système d'axiomes $\mathcal{A}_p'$ du langage $\mathfrak{L}_2$; Δ a trois éléments qui sont les couples

$$\big(N(x+y-z),\, M^pN(x+y-z)\big),\qquad \big(N(Px-y),\, M^pN(Px-y)\big)$$

et $(-Nx,\,-Nx)$.

Un Δ-homomorphisme de E dans un modèle de $\mathcal{A}_p'$ est la donnée d'une espace $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, d'une fonction $h\in L^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\|h\|_\infty\leqslant 1$ et d'une application $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ telle que

$$\|\varphi x+\varphi y-\varphi z\|_p\leqslant M\|x+y-z\|\,,\qquad \|\varphi x\|_p\geqslant\|x\|\,,\qquad \|h\varphi x-\varphi y\|_p\leqslant M\|Px-y\|$$

quels que soient $x,y,z\in E$. On en déduit comme précédemment que φ est linéaire. De plus, en prenant $y=Px$ dans la dernière inégalité, on trouve $\varphi(Px)=h\varphi(x)$.

D'après le théorème V.1 une telle application existe si et seulement si E satisfait toutes les formules (i) telles que la formule

$$\forall x_1\ldots\forall x_n\Big[\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\varrho_{ijk}\|x_i+x_j-x_k\|^p+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\varrho_{ij}'\|Px_i-x_j\|^p- -\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\varrho_i''\|x_i\|^p\geqslant 0\Big]$$

soit conséquence de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire soit vraie dans tout espace $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, P étant l'opérateur de multiplication par une fonction quelconque

$h \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $\|h\|_\infty \leqslant 1$. Or cela revient à dire que la formule

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \Big[\sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} \varrho_{ijk} |x_i + x_j - x_k|^p + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varrho'_{ij} |\alpha x_i - x_j|^p - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varrho''_i |x_i|^p \geqslant 0 \Big]$$

est vraie dans $\boldsymbol{R}$, quel que soit le réel α, $|\alpha| \leqslant 1$.

En effet, quels que soient $u_1, \dots, u_n \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, on aura, pour tout $\omega \in \Omega$, puisque $|h(\omega)| \leqslant 1$:

$$\sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} \varrho_{ijk} |u_i(\omega) + u_j(\omega) - u_k(\omega)|^p + \\ + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varrho'_{ij} |h(\omega) u_i(\omega) - u_j(\omega)|^p - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varrho''_i |u_i(\omega)|^p \geqslant 0 .$$

En intégrant sur Ω pour la mesure μ, on obtient bien:

$$\sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} \varrho_{ijk} \|u_i + u_j - u_k\|_p^p + \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varrho'_{ij} \|h u_i - u_j\|_p^p - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \varrho''_i \|u_i\|_p^p \geqslant 0 .$$

c.q.f.d.

Le théorème suivant est un résultat de M. Kwapien:

THÉORÈME VI.3. *Soient E un espace de Banach, p, M des réels $\geqslant 1$. Pour qu'il existe un espace de Banach V qui soit un quotient d'un sous-espace fermé d'un espace L^p, et une application linéaire ψ: $E \to V$ bijective, telle que $\|x\| \leqslant \|\psi x\| \leqslant M \|x\|$ pour tout $x \in E$, il faut et il suffit que E satisfasse les formules suivantes*

(i) $$\forall x_1 \dots \forall x_n \Big[M^p \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j x_1 + \dots + \lambda_n^j x_n\|^p \Big]$$

où les λ_i^j sont des réels tels que la formule

(ii) $$\forall x_1 \dots \forall x_n \Big[\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|_1^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j x_1 + \dots + \lambda_n^j x_n\|_1^p \Big]$$

soit vraie dans $\boldsymbol{R}$.

La condition est nécessaire: par hypothèse V est quotient d'un sous-espace fermé U de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, par un sous-espace fermé de U. Soit $u \to \bar{u}$ l'application canonique de U sur V. On a $\|\bar{u}\| \leqslant \|u\|_p$.

Si $a_1, \dots, a_n \in V$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_1, \dots, u_n \in U$ tels que $\bar{u}_i = a_i$, $\|a_i\| \leqslant \|u_i\|_p \leqslant \|a_i\| + \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Or, si la formule (ii) est vraie dans $\boldsymbol{R}$, on a, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i(\omega)|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} |\lambda_1^j u_1(\omega) + \dots + \lambda_n^j u_n(\omega)|^p ;$$

en intégrant pour la mesure μ, on trouve donc:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|u_i\|_p^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j \bar{u}_1 + \dots + \lambda_n^j \bar{u}_n\|^p = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j a_1 + \dots + \lambda_n^j a_n\|^p .$$

Par suite

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|a_i\|^p + n\varepsilon \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j a_1 + \dots + \lambda_n^j a_n\|^p$$

et comme ε est un réel > 0 arbitraire, on a

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|a_i\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j a_1 + \dots + \lambda_n^j a_n\|^p .$$

Soient alors $b_1, \dots, b_n \in E$; on pose $\psi b_i = a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et on a

$$M^p \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|b_i\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|a_i\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j a_1 + \dots + \lambda_n^j a_n\|^p \\ \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j b_1 + \dots + \lambda_n^j b_n\|^p .$$

Donc E satisfait la formule (i).

La condition est suffisante: soit E un espace de Banach satisfaisant les formules (i). On montre qu'il existe une application φ (non supposée linéaire) de E dans un espace $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ telle que

$$\|\varphi x\|_p \leqslant M \|x\| , \quad \|\lambda_1 \varphi x_1 + \dots + \lambda_n \varphi x_n\|_p \geqslant \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|$$

quels que soient $x, x_1, \dots, x_n \in E$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$. Pour cela, on applique le théorème V.1 en prenant pour $\mathcal{A}$ le système d'axiomes $\mathcal{A}_p$ pour les espaces L^p et pour Δ l'ensemble des couples d'expressions de $\mathfrak{L}_0$:

$$\big(N(x), M^p N(x)\big) , \quad \big(-N(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n), -N(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)\big) \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}) .$$

L'application φ cherchée n'est alors pas autre chose qu'un Δ-homomorphisme de E dans un modèle de $\mathcal{A}$. Son existence est assurée par le théorème V.1 dès lors que E satisfait les formules (i). (On note que, dire que la formule (ii) est vraie dans $\boldsymbol{R}$, revient à dire que la formule

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \Big[\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \|\lambda_1^j x_1 + \dots + \lambda_n^j x_n\|^p \Big]$$

est vraie dans tout espace L^p, c'est-à-dire est conséquence de $\mathcal{A}$).

Soient alors U_0 le sous-espace de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ engendré par les φa (pour $a \in E$), et U la fermeture de U_0. On définit χ_0: $U_0 \to E$ en posant

$$\chi_0[\lambda_1 \varphi a_1 + \ldots + \lambda_n \varphi a_n] = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$$

pour $a_1, \ldots, a_n \in E$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}$. Comme on a

$$\|\lambda_1 \varphi a_1 + \ldots + \lambda_n \varphi a_n\|_p \geqslant \|\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n\|$$

cette application est bien définie, linéaire, continue de norme $\leqslant 1$. Elle se prolonge donc en une application linéaire χ: $U \to E$, $\|\chi\| \leqslant 1$.

Soient W le sous-espace fermé de U, $W = \{u \in U;\ \chi u = 0\}$ et $V = U/W$.

Soit $u \to \bar{u}$ l'application canonique de U sur V. On définit $\bar{\chi}$: $V \to E$ en posant $\bar{\chi}(\bar{u}) = \chi(u)$ pour tout $u \in U$; cette application est bien définie puisque, si $\bar{u} = \bar{v}$ on a $\chi(u) = \chi(v)$. De plus $\|\bar{\chi}(\bar{u})\| = \|\chi(v)\| \leqslant \|v\|$ pour tout $v \in U$ tel que $\bar{v} = \bar{u}$. Donc

$$\|\bar{\chi}(\bar{u})\| \leqslant \inf\{\|v\|;\ v \in U,\ \bar{v} = \bar{u}\} = \|\bar{u}\|.$$

Soit alors $\bar{u} \in V$, et $a = \bar{\chi}(\bar{u})$; on a $\chi(\varphi a) = a = \chi(u)$ donc $\overline{\varphi a} = \bar{u}$ et donc $\|\varphi a\| \geqslant \|\bar{u}\|$. Comme $\|\varphi a\| \leqslant M\|a\|$, on a $\|\bar{u}\| \leqslant M\|a\|$ autrement dit $\|\bar{u}\| \leqslant M\|\bar{\chi}(\bar{u})\|$.

On a ainsi obtenu une application linéaire $\bar{\chi}$: $V \to E$ telle que

$$\frac{1}{M}\|\bar{u}\| \leqslant \|\bar{\chi}(\bar{u})\| \leqslant \|\bar{u}\|$$

pour tout élément $\bar{u}$ de V; de plus $\bar{\chi}$ est surjective puisque $\bar{\chi}(\overline{\varphi a}) = a$ pour tout $a \in E$. Si ψ: $E \to V$ est l'application inverse de $\bar{\chi}$, on voit que ψ a les propriétés exigées dans l'énoncé du théorème. c.q.f.d.

Caractérisation des espaces L^p, des sous-espaces complémentés et des quotients d'espaces L^p, pour $p > 1$. Soit E un modèle standard du système d'axiomes $\mathfrak{B}_p$ du langage $\mathfrak{L}_0$, c'est-à-dire un espace de Banach dans lequel $N(x)$ est interprété par $\|x\|^p$. On rappelle que $\mathfrak{U}_E$ est l'ensemble des formules universelles closes du langage $\mathfrak{L}_0$, à paramètres dans E qui sont vraies dans E. Si E' est un modèle de $\mathfrak{U}_E$, E' est une u-extension de E et, en particulier on a $E \subset E'$.

LEMME VI.1. *Si E est un espace réflexif et E' une u-extension de E il existe une application linéaire surjective π: $E' \to E$ de norme 1 qui est un projecteur (la restriction de π à E est l'identité sur E).*

Désignons par $\mathfrak{L}_0(E)$ le langage $\mathfrak{L}_0$ augmenté des éléments de E comme symboles de constantes; pour chaque forme linéaire continue T sur E, on ajoute à $\mathfrak{L}_0(E)$ un symbole de relation R_T à un argument, ce qui donne un langage $\tilde{\mathfrak{L}}_0(E)$; E est un modèle de ce langage: si $a \in E$, on donne à l'expression $R_T(a)$ la valeur $T(a)$.

Soit $\tilde{\mathfrak{U}}_E$ l'ensembles des formules universelles closes de $\tilde{\mathfrak{L}}_0(E)$ qui sont vraies dans E. Cet ensemble est régulier car il contient les formules universelles généralisées

$$\forall x[|R_T(x)| \leqslant \|T\| N(x)^{1/p}], \quad \forall x \forall y[|R_T(x) - R_T(y)| \leqslant \|T\| D(x, y)^{1/p}]$$

(la fonction $\xi^{1/p}$ étant concave sur $\boldsymbol{R}_+$).

On montre que E' se plonge dans un modèle standard de $\tilde{\mathfrak{U}}_E$; d'après le théorème V.2, il suffit de montrer que E' satisfait toutes les conséquences universelles de $\tilde{\mathfrak{U}}_E$ qui s'écrivent dans le langage $\mathfrak{L}_0(E)$. Or une telle conséquence est vraie dans E (puisque $E \models \tilde{\mathfrak{U}}_E$), donc appartient à $\mathfrak{U}_E$ et par suite est vraie dans E'.

Il en résulte qu'on peut définir sur E' les valeurs des symboles R_T ($T \in E^*$) de façon à obtenir un modèle de $\tilde{\mathfrak{U}}_E$.

On définit alors π: $E' \to E^{**}$: si $u \in E'$, $\pi(u)$ est la forme linéaire sur E^* définie par $\pi(u)(T) = R_T(u)$ pour chaque $T \in E^*$.

On a en effet $R_{T+T'}(u) = R_T(u) + R_{T'}(u)$ puisque la formule $\forall x[R_{T+T'}(x) = R_T(x) + R_{T'}(x)]$ est évidemment dans $\tilde{\mathfrak{U}}_E$; de même $R_{\lambda T}(u) = \lambda R_T(u)$ pour $T \in E^*$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$; enfin $|R_T(u)| \leqslant \|T\|\|u\|$ puisque la formule généralisée

$$\forall x[|R_T(x)| \leqslant \|T\| N(x)^{1/p}]$$

est vraie dans E, donc est dans $\tilde{\mathfrak{U}}_E$ et, par suite, est satisfaite dans E'.

Il en résulte que $\pi(u) \in E^{**}$ et que $\|\pi(u)\| \leqslant \|u\|$ pour tout $u \in E'$. Enfin, si $u \in E$, u est alors un symbole de constante du langage $\mathfrak{L}_0(E)$ et $\tilde{\mathfrak{U}}_E$ contient la formule $R_T(u) = T(u)$. On a donc $\pi(u)(T) = T(u)$ pour tout $T \in E^*$; autrement dit la restriction de π à E est l'injection canonique de E dans E^{**}.

Par suite, si $E^{**} = E$, l'application π a bien les propriétés voulues. c.q.f.d.

Le théorème suivant donne une caractérisation des espaces de Banach isomorphes à un sous-espace complémenté d'un espace L^p ($p > 1$).

THÉORÈME VI.4. *Soient E un espace de Banach, et deux réels $M \geqslant 1$, $p > 1$. Pour qu'il existe un espace $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ et deux applications linéaires φ: $E \to L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, ψ: $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to E$ telles que $\|\varphi\| \leqslant M$, $\|\psi\| \leqslant 1$, $\psi \circ \varphi$ étant l'identité sur E, il faut et il suffit que E satisfasse les formules*

$$\text{(i)} \quad \forall x_1 \ldots \forall x_m \exists y_1 \ldots \exists y_n \Big[M^p \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant m} \varrho_{ijk}\|x_i + x_j - x_k\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} \sigma_{ijk}\|y_i + y_j - y_k\|^p + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \tau_{ij}\|x_i - y_j\|^p\Big]$$

où $\varrho_{ijk}, \sigma_{ijk}, \tau_{ij}$ sont des réels ≥ 0 tels que la formule

$$\text{(ii)}\quad \forall x_1 \ldots \forall x_m \Big[\sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}|x_i+x_j-x_k|^p \geq \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}|t_i(x_1,\ldots,x_m)+t_j(x_1,\ldots,x_m)-t_k(x_1,\ldots,x_m)|^p + \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}|x_i-t_j(x_1,\ldots,x_m)|^p \Big]$$

soit vraie dans $\boldsymbol{R}$, *pour certains termes* $t_i(x_1,\ldots,x_m)$ $(1\leq i\leq n)$ *du langage* $\mathfrak{L}_1$ *de la théorie des espaces vectoriels réticulés (c'est-à-dire formés avec les symboles* $0, \lambda., +, \frown$*).*

Notons que, lorsque $M=1$, l'existence de deux applications linéaires $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\psi\colon L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)\to E$ telles que $\|\varphi\|\leq 1$, $\|\psi\|\leq 1$, $\psi\circ\varphi$ étant l'identité sur E, équivaut à dire que E est un espace L^p (voir [1], [9]). Donc:

L'ensemble des formules (i) *pour* $M=1$ *est une caractérisation des espaces de Banach qui sont des espaces* L^p.

Démonstration du théorème VI.4. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. On considère donc un espace de Banach E, deux applications linéaires $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\psi\colon L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)\to E$, $\|\varphi\|\leq M$, $\|\psi\|\leq 1$, $\psi\circ\varphi$ étant l'identité sur E; soient $a_1,\ldots,a_m\in E$; on pose $u_i=\varphi a_i$ $(1\leq i\leq m)$. La formule (ii) étant vraie dans $\boldsymbol{R}$, on a, si $v_j=t_j(u_1,\ldots,u_m)$ $(1\leq j\leq n)$, et pour tout $\omega\in\Omega$:

$$\sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}|u_i(\omega)+u_j(\omega)-u_k(\omega)|^p \geq \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}|v_i(\omega)+v_j(\omega)-v_k(\omega)|^p + \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} |\tau_{ij}|u_i(\omega)-v_j(\omega)|^p.$$

En intégrant sur Ω pour la mesure μ, on trouve:

$$\sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}\|u_i+u_j-u_k\|_p^p \geq \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}\|v_i+v_j-v_k\|_p^p + \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}\|u_i-v_j\|_p^p.$$

Comme $\|\varphi\|\leq M$, on a

$$M^p \sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}\|a_i+a_j-a_k\|^p \geq \sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}\|u_i+u_j-u_k\|_p^p.$$

On pose $b_j=\psi v_j$ $(1\leq j\leq n)$. Comme $\|\psi\|\leq 1$, on a

$$\sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}\|v_i+v_j-v_k\|_p^p \geq \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}\|b_i+b_j-b_k\|^p,$$

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}\|u_i-v_j\|^p \geq \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}\|\psi u_i-b_j\|^p = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}\|a_i-b_j\|^p$$

puisque $\psi u_i=\psi\circ\varphi a_i=a_i$. On a donc:

$$M^p \sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}\|a_i+a_j-a_k\|^p \geq \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}\|b_i+b_j-b_k\|^p + \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}\|a_i-b_j\|^p$$

ce qui montre que E satisfait la formule (i).

La condition est suffisante: il suffit de montrer qu'il existe un espace $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, une u-extension E' de E et deux applications linéaires $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\chi\colon L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)\to E'$ telles que $\|\varphi\|\leq M$, $\|\chi\|\leq 1$, $\chi\circ\varphi$ étant l'identité sur E. En effet, on a alors $\|x\|\leq\|\varphi x\|\leq M\|x\|$ pour tout $x\in E$, donc E est isomorphe à un sous-espace d'un L^p et par suite est réflexif puisque $p>1$.

D'après le lemme VI.1, il existe alors un projecteur $\pi\colon E'\to E$, $\|\pi\|=1$; en posant $\psi=\pi\circ\chi$, on voit que φ et ψ ont alors les propriétés voulues.

On applique le théorème V.3 en prenant pour $\mathfrak{B}$ le système d'axiomes $\mathcal{A}_p$ pour les espaces L^p; Δ a un seul élément, le couple d'expressions $\big(N(x+y-z), M^pN(x+y-z)\big)$; Γ a un seul élément, le couple $\big(N(x+y-z), N(x+y-z)\big)$.

Par hypothèse, E satisfait la formule (i) de l'énoncé dès que la formule (ii) est vraie dans $\boldsymbol{R}$, et donc dès que la formule

$$\forall x_1\ldots\forall x_m\Big[\sum_{1\leq i,j,k\leq m} \varrho_{ijk}\|x_i+x_j-x_k\|^p - \sum_{1\leq i,j,k\leq n} \sigma_{ijk}\|t_i(x_1,\ldots,x_m)+t_j(x_1,\ldots,x_m)-t_k(x_1,\ldots,x_m)\|^p - \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \tau_{ij}\|x_i-t_j(x_1,\ldots,x_m)\|^p\geq 0\Big]$$

est vraie dans tout espace L^p, c'est-à-dire est conséquence de $\mathfrak{B}$. Il en résulte que la condition 3 du théorème V.3 est remplie. La condition 1 du théorème V.3 est donc remplie aussi ce qui donne un modèle de $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire un espace $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ et deux applications $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$,

$\chi\colon L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)\to E'$, E' étant une u-extension de E, φ,χ étant respectivement un Δ- et un Γ-homomorphisme, $\chi\circ\varphi$ étant l'identité sur E. On a donc

$$\|\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(z)\|\leqslant M\|x+y-z\| \quad \text{pour} \quad x,y,z\in E,$$

$$\|\chi(u)+\chi(v)-\chi(w)\|\leqslant\|u+v-w\| \quad \text{pour} \quad u,v,w\in L^p_{\mathfrak{A}}(\Omega,\mathfrak{A},\mu).$$

Donc φ,χ sont linéaires, $\|\varphi\|\leqslant M$, $\|\chi\|\leqslant 1$. c.q.f.d.

Le théorème suivant donne une caractérisation des espaces *isométriques* à un sous-espace complémenté d'un espace L^p $(p>1)$.

THÉORÈME VI.5. *Soient E un espace de Banach, et deux réels $M\geqslant 1$, $p>1$. Pour qu'il existe un espace $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ et deux applications linéaires $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\psi\colon L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)\to E$, φ étant une isométrie $\|\psi\|\leqslant M$, $\psi\circ\varphi$ étant l'identité sur E, il faut et il suffit que E satisfasse les formules*

$$\forall x_1\ldots\forall x_m\,\exists y_1\ldots\exists y_n\Big[M^p\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant m}\varrho_{ijk}\|x_i+x_j-x_k\|^p-M^p\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho'_i\|x_i\|^p$$
$$\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\sigma_{ijk}\|y_i+y_j-y_k\|^p+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\tau_{ij}\|x_i-y_j\|^p\Big]$$

où $\varrho_{ijk},\varrho'_i,\sigma_{ijk},\tau_{ij}$ sont des réels $\geqslant 0$ tels que la formule

$$\forall x_1\ldots\forall x_m\Big[\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant m}\varrho_{ijk}|x_i+x_j-x_k|^p-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho'_i|x_i|^p$$
$$\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\sigma_{ijk}|t_i(x_1,\ldots,x_m)+t_j(x_1,\ldots,x_m)-t_k(x_1,\ldots,x_m)|^p+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\tau_{ij}|x_i-t_j(x_1,\ldots,x_m)|^p\Big]$$

soit vraie dans $\boldsymbol{R}$ pour certains termes $t_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,t_n(x_1,\ldots,x_m)$ du langage $\mathfrak{L}_1$ (c'est-à-dire formés avec les symboles 0, $\lambda.$, $+$, $\cap$).

En remplaçant φ par $M\varphi$, et ψ par $(1/M)\psi$ on est ramené à trouver $\varphi\colon E\to L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\psi\colon L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)\to E$ tels que $\|\psi\|\leqslant 1$, et $\|\varphi x\|=M\|x\|$ pour tout $x\in E$. La démonstration est alors la même que pour le théorème VI.4: la seul différence est qu'on applique ici le théorème V.3 en prenant pour Δ l'ensemble formé des deux couples d'expressions: $(N(x+y-z),M^pN(x+y-z))$, $(-N(x),-M^pN(x))$.

Le théorème suivant caractérise les espaces de Banach qui sont isomorphes à un quotient d'un espace L^p par un sous-espace fermé $(p>1)$.

THÉORÈME VI.6. *Soient E un espace de Banach et deux réels $M\geqslant 1$, $p>1$. Pour qu'il existe un espace V, quotient d'un espace $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ par un sous-espace fermé, et une application linéaire $\chi\colon E\to V$, bijective telle que $\|x\|\leqslant\|\chi(x)\|\leqslant M\|x\|$ pour tout $x\in E$, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon>0$, E satisfasse les formules:*

(i) $$\forall x_1\ldots\forall x_m\,\exists y_1\ldots\exists y_n\Big[(M^p+\varepsilon)\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho_i\|x_i\|^p$$
$$\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\sigma_{ijk}\|y_i+y_j-y_k\|^p+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\tau_{ij}\|x_i-y_j\|^p\Big]$$

où $\varrho_i,\sigma_{ijk},\tau_{ij}$ sont des réels $\geqslant 0$ tels que la formule

(ii) $$\forall x_1\ldots\forall x_m\Big[\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho_i|x_i|^p$$
$$\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\sigma_{ijk}|t_i(x_1,\ldots,x_m)+t_j(x_1,\ldots,x_m)-t_k(x_1,\ldots,x_m)|^p+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\tau_{ij}|x_i-t_j(x_1,\ldots,x_m)|^p\Big]$$

sont vraie dans $\boldsymbol{R}$, pour certains termes $t_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,t_n(x_1,\ldots,x_m)$ du langage $\mathfrak{L}_1$ (c'est-à-dire formés avec les symboles 0, $\lambda.$, $+$, $\cap$).

La condition est nécessaire: soit χ une application linéaire bijective de E sur V telle que $\|x\|\leqslant\|\chi(x)\|\leqslant M\|x\|$ pour tout $x\in E$. V étant le quotient de $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ par un sous-espace fermé, soit $u\to\bar{u}$ l'application canonique de $L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ sur V.

Si $a_1,\ldots,a_n\in V$, on peut choisir $u_i\in L^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ tel que $\bar{u}_i=\chi a_i$, $\|\chi a_i\|\leqslant\|u_i\|\leqslant\|\chi a_i\|\,(1+\varepsilon/M^p)^{1/p}$, ε étant un réel >0 fixé $(1\leqslant i\leqslant m)$. La formule (ii) étant vraie dans $\boldsymbol{R}$, on a, en posant $v_j=t_j(u_1,\ldots,u_m)$ $(1\leqslant j\leqslant n)$:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho_i|u_i(\omega)^p|\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\sigma_{ijk}|v_i(\omega)+v_j(\omega)-v_k(\omega)|^p+$$
$$+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\tau_{ij}|u_i(\omega)-v_j(\omega)|^p$$

pour tout $\omega\in\Omega$. En intégrant sur Ω pour la mesure μ, on trouve:

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho_i\|u_i\|^p\geqslant\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n}\sigma_{ijk}\|v_i+v_j-v_k\|^p+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\tau_{ij}\|u_i-v_j\|^p.$$

Le premier membre est au plus égal à

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho_i\|\chi a_i\|^p\Big(1+\frac{\varepsilon}{M^p}\Big)\leqslant(M^p+\varepsilon)\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\varrho_i\|a_i\|^p$$

puisque $\|\chi\| \leqslant M$. Comme $\chi\colon E \to V$ est bijective, il existe $b_j \in E$ tel que $\chi b_j = \bar{v}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. On a alors $\|v_i + v_j - v_k\|^p \geqslant \|\bar{v}_i + \bar{v}_j - \bar{v}_k\|^p \geqslant \|b_i + b_j - b_k\|^p$ puisque $\|\chi(x)\| \geqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$. De même $\|u_i - v_j\|^p \geqslant \|\bar{u}_i - \bar{v}_j\|^p \geqslant \|a_i - b_j\|^p$. On a finalement

$$(M^p + \varepsilon) \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \varrho_i \|a_i\|^p \geqslant \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} \sigma_{ijk} \|b_i + b_j - b_k\|^p + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \tau_{ij} \|a_i - b_j\|^p$$

ce qui montre que E satisfait la formule (i).

La condition est suffisante: on montre d'abord que, si E satisfait les formules (i), il existe un espace $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ et deux applications $\varphi\colon E \to L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, $\psi\colon L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \to E$, $\psi \circ \varphi$ étant l'identité, $\|\varphi x\| \leqslant M\|x\|$ pour tout $x \in E$ (φ n'est pas supposée linéaire), ψ étant linéaire et $\|\psi\| \leqslant 1$. La démonstration est la même que pour le théorème VI.4: la seule différence est qu'on applique le théorème V.3 en prenant pour Δ l'ensemble des couples d'expressions $\big(N(x), (M^p + \varepsilon) N(x)\big)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit alors $W = \{u \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu);\ \psi u = 0\}$; W est un sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$; on pose $V = L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)/W$, et soit $u \to \bar{u}$ l'application canonique de $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sur V. On définit $\bar{\psi}\colon V \to E$ en posant $\bar{\psi}(\bar{u}) = \psi(u)$ pour tout $\bar{u} \in V$: cette définition est correcte puisque, si $\bar{u} = \bar{v}$, on a $\psi(u) = \psi(v)$. On a $\|\bar{\psi}(\bar{u})\| = \|\psi(v)\| \leqslant \|v\|$ pour tout $v \in L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ tel que $\bar{v} = \bar{u}$. Donc $\|\bar{\psi}(\bar{u})\| \leqslant \|\bar{u}\|$, soit $\|\bar{\psi}\| \leqslant 1$. De plus $\bar{\psi}$ est surjective, puisque, si $a \in E$, on a $\bar{\psi}(\overline{\varphi a}) = \psi \circ \varphi(a) = a$. Enfin, si $\bar{u} \in V$, posons $a = \bar{\psi}(\bar{u})$; alors $\psi\big(\varphi(a)\big) = a = \psi(u)$, donc $\overline{\varphi a} = \bar{u}$ d'où $\|\varphi a\| \geqslant \|\bar{u}\|$, soit $M\|a\| \geqslant \|\bar{u}\|$. Autrement dit, on a $M\|\bar{\psi}(\bar{u})\| \geqslant \|\bar{u}\|$ quelque soit $\bar{u} \in V$. Donc $\bar{\psi}$ est bijective de V sur E, et si χ et l'application inverse, on voit que χ a les propriétés voulues. c.q.f.d.

Ajouté pendant la correction des épreuves. J. Stern m'a fait observer que pour tout espace de Banach E, E^{**} est une u-extension de E: c'est une conséquence facile du théorème de „réflexivité locale" (voir J. Lindenstrauss and H. Rosenthal, *The $\mathfrak{L}^p$ spaces*, Israël J. Math. 7 (1969), p. 332).

Les formules (i) du théorème VI. 4 dans lesquelles on fait $p = 1$, $M = 1$ caractérisent les espaces de Banach isométriques à un espace L^1. En effet, si E satisfait ces formules, la démonstration du théorème VI.4 donne $E \xrightarrow{\varphi} L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) \xrightarrow{\psi} E^{**}$ avec $\|\varphi\|$, $\|\psi\| \leqslant 1$, $\psi \circ \varphi$ étant l'identité sur E. On en déduit, en considérant φ^* es ψ^*, que E^* est un sous-espace de $L^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sur lequel il existe une projection de norme 1, c'est-à-dire un $\mathfrak{P}_1$-espace (voir M.M. Day, *Normed linear spaces*, p. 123). Il en résulte que E est un espace L^1 (voir A. Grothendieck, *Une caractérisation vectorielle métrique des espaces L^1*, Canadian J. Math. 7 (1955)).

Pour $p = 1$, $M > 1$ les formules (i) du théorème VI.4 caractérisent les espaces de Banach dont le dual est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un espace L^∞ ou, (c'est-à-dire un $\mathfrak{P}$-espace), ou, ce qui revient au même, dont le bidual est isomorphe à un sous-espace complémenté d'un espace L^1. En effet, si E^{**} est complémenté dans un espace L^1, il est clair que E^{**} satisfait les formules (i) pour un certain M, donc E les satisfait pour $M + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ quelconque), d'après le théorème de „réflexivité locale" cité plus haut.

Bibliographie

[1] T. Ando, *Contractive projections in L^p-spaces*, Pacific Journal of Math. (17) (1966), pp. 391–405.

[2] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, *Lois stables et espaces L^p*, Annales de l'Institut Henri Poincaré 2 (1966), pp. 231–259.

[3] D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, *Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et algèbres de Banach*, Studia Math. 41 (1972), pp. 315–334.

[4] G. Kreisel et J. L. Krivine, *Eléments de logique mathématique*, 1967.

[5] J. L. Krivine, *Théorie des modèles et espaces L^p*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris 275 (1972), pp. 1207–1210.

[6] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathfrak{L}^p$-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), pp. 275–328.

[7] H. Nakano, *Über normierte teilwergeordnete Moduln*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1941), pp. 301–307.

[8] J. R. Shoenfield, *Mathematical Logic*, 1967.

[9] L. Tzafriri, *Remarks on contractive projections in L^p-spaces*, Israel Journal of Math. 7 (1969), pp. 9–15.

UNIVERSITÉ PARIS VII

Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1973