

§ 4. Proof of the compactness theorem.

Theorem (*) is the immediate consequence of the following theorem:

(***) If \mathcal{K} is a set of simple arithmetical functions and $\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F = \Lambda$, then there is a finite set $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ such that $\bigcap_{F \in \mathcal{L}} F = \Lambda$.

Proof. Suppose $\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F = \Lambda$ and for every finite $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$, $\bigcap_{F \in \mathcal{L}} F \neq \Lambda$. Hence, for every finite $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ the dual ideal of the algebra $\mathfrak{B}_0 = \langle \mathcal{A}, F, \cup, \cap, - \rangle$ generated by \mathcal{L} is proper. Consequently, the ideal generated by \mathcal{K} is proper. By 3.1 this ideal preserves all the sums (3). Hence, by 2.1, it is contained in a prime dual ideal \mathfrak{p} of \mathfrak{B}_0 preserving all the sums (3). In consequence, by 3.2, $\bigcap_{F \in \mathcal{K}} F \neq \Lambda$, contrary to supposition.

References.

- [1] A. Tarski¹³⁾, *Some Notions and Methods on the Borderline of Algebra and Metamathematics*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians **1** (1950), pp. 705-720.
 [2] H. Rasiowa and R. Sikorski, *A Proof of the Skolem-Löwenheim Theorem*, Fundamenta Mathematicae **38** (1951), pp. 230-232.
 [3] — *A Proof of the Completeness Theorem of Gödel*, Fundamenta Mathematicae **37** (1950), pp. 193-200.

¹³⁾ I wish to thank Professor A. Tarski for the opportunity he gave me to see the manuscript of his paper.

Sur un problème concernant les coupures des régions par des continus.

Par

C. Kuratowski et C. Zarankiewicz (Warszawa).

I. Préliminaires. Nous nous occupons dans cette note du problème suivant.

Imaginons sur la surface sphérique \mathcal{S}_2 (= plan euclidien augmenté du point à l'infini) k continus

$$(1) \quad K_1, K_2, \dots, K_k$$

et n régions (= ensembles ouverts connexes)

$$(2) \quad R_1, R_2, \dots, R_n.$$

Admettons que:

- (i) les continus K_i sont disjoints deux à deux,
- (ii) les régions R_j sont disjointes deux à deux,
- (iii) pour tout couple i, j on a $K_i \cdot R_j \neq 0$,
- (iv) aucune région R_j n'est une coupure de \mathcal{S}_2 (c'est-à-dire que l'ensemble $\mathcal{S}_2 - R_j$ est connexe).

Envisageons tout couple i, j tel que l'ensemble $R_j - K_i$ n'est pas connexe (c'est-à-dire que le continu K_i coupe la région R_j) et désignons par $s_{k,n}$ le nombre minimum de ces couples (pour K_i et R_j variables).

Il s'agit de calculer le nombre $s_{k,n}$.

L'hypothèse de M. Zarankiewicz est que

$$(3) \quad s_{k,n} = (k-2)(n-2) \quad \text{pour } k \geq 2 \text{ et } n \geq 2^1).$$

Nous nous proposons de démontrer la formule (3) pour le cas particulier où, soit $k \leq 4$, soit $n \leq 4$. Dans le cas général, le problème reste ouvert.

¹⁾ Le problème a été posé par M. Zarankiewicz pour le cas où $n=k$. La forme actuelle du problème est due à M. A. Rényi.

Le cas où $k=2$ ou bien $n=2$ étant trivial, il s'agit d'établir les formules suivantes:

$$(4) \quad s_{3,n} = n-2 \quad \text{et} \quad s_{k,3} = k-2,$$

$$(5) \quad s_{4,n} = 2n-4 \quad \text{et} \quad s_{k,4} = 2k-4.$$

Notre problème se laisse formuler de la façon suivante à l'aide de matrices.

Étant donnés k continus (1) et n régions (2), appelons *matrice correspondante* la matrice à k colonnes et à n lignes horizontales où tout point i, j tel que le continu K_i coupe la région R_j est désigné par un astérisque. Il s'agit de démontrer qu'il existe dans toute matrice tout au moins $(k-2)(n-2)$ astérisques.

Remarque 1. Dans le cas où la matrice contient une colonne à $\geq n-2$ astérisques (ou bien une ligne horizontale à $\geq k-2$ astérisques), on peut — dans l'hypothèse que la formule (3) est valable pour $k-1$ (ou pour $n-1$) — affirmer que la matrice contient $\geq (k-2)(n-2)$ astérisques. En effet, en omettant la colonne en question, on obtient une matrice à $k-1$ colonnes et à n lignes, celle-ci contient donc au moins $(k-3)(n-2)$ astérisques et par conséquent la matrice donnée en contient, tout au moins,

$$(k-3)(n-2) + (n-2) = (k-2)(n-2).$$

Le cas où la matrice contient une ligne à $\geq k-2$ astérisques est analogue.

Remarque 2. Le nombre $s_{k,n}$ est atteint; c'est-à-dire que, quels que soient k et n , il existe k continus et n régions satisfaisant aux conditions (i)-(iv) et pour lesquels la matrice correspondante contient précisément $(k-2)(n-2)$ astérisques. On le voit sur la figure 1 de la page suivante.

II. Réduction du problème au cas où aucun continu K_i n'est une coupure de \mathcal{S}_2 .

Nous allons démontrer que, sans restreindre la généralité du problème, on peut ajouter aux hypothèses (i)-(iv) la suivante:

(v) aucun continu K_i n'est une coupure de \mathcal{S}_2 .

En effet, désignons par

$$(6) \quad C_{i,0}, C_{i,1}, \dots$$

la suite (finie ou infinie) des composantes de l'ensemble $\mathcal{S}_2 - K_i$.

Il est légitime d'admettre que tous les continus K_m avec $m \neq i$ sont contenus dans un seul terme de la suite (6), dans $C_{i,0}$ par exemple:

$$(7) \quad K_m \subset C_{i,0} \quad \text{pour} \quad m \neq i.$$

Supposons, par contre, que

$$K_2 \subset C_{i,0} \quad \text{et} \quad K_3 \subset C_{i,1}.$$

D'après (iii) on a alors

$$R_j \cdot C_{i,0} \neq 0 \neq R_j \cdot C_{i,1} \quad \text{pour} \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Par conséquent, l'ensemble $R_j - K_1$ est non connexe (puisqu'il unit en dehors de K_1 deux points appartenant à deux composantes différentes de $\mathcal{S}_2 - K_1$) et la première colonne de la matrice correspondante contient n astérisques. D'après la remarque 1, la formule (3) peut être considérée alors comme démontrée.

Ceci établi, posons

$$K_i^* = \mathcal{S}_2 - C_{i,0}.$$

K_i^* est donc un continu qui ne coupe pas \mathcal{S}_2 .

Les continus K_i^* sont disjoints deux à deux.

Soit, en effet $i \neq m$. Nous allons montrer que

$$(8) \quad C_{m,t} \subset C_{i,0} \quad \text{pour} \quad t \neq 0.$$

Dans le cas contraire, on aurait

$$(K_m + C_{m,t}) \cdot C_{i,0} \neq 0 \neq (K_m + C_{m,t}) - C_{i,0},$$

d'où $(K_m + C_{m,t}) \cdot \text{Fr}(C_{i,0}) \neq 0$, donc $(K_m + C_{m,t})K_i \neq 0$, ce qui est incompatible avec (i) et (7)².

² Nous nous basons ici sur les deux théorèmes suivants:

1° si un ensemble connexe Z satisfait à la double inégalité $ZO \neq 0 \neq Z - O$, on a $Z \cdot \text{Fr}(O) \neq 0$ où $\text{Fr}(O)$ désigne la frontière de O .

2° $\text{Fr}(C_{i,t}) \subset K_i$.

Voir, par exemple, C. Kuratowski, *Topologie II*, Monogr. Mat. **21** (1950), p. 80, th. 1 et p. 169, th. 3.

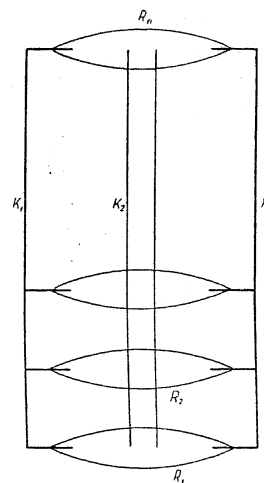


Fig. 1.

L'inclusion (8), rapprochée de l'inclusion (7), implique aussitôt que

$$C_{l,0} + C_{m,0} = \mathcal{S}_2, \text{ d'où } K_l^* \cdot K_m^* = 0.$$

Il reste à démontrer que, si l'ensemble $R_j - K_l^*$ est non connexe, l'ensemble $R_j - K_l$ l'est également. Or

$$R_j - K_l = (R_j - K_l^*) + R_j \cdot (C_{l,1} + C_{l,2} + \dots).$$

Les deux sommandes étant des ensembles ouverts disjoints et la première étant non connexe (par hypothèse) leur somme est aussi non connexe.

Remarque. L'hypothèse (iv) est essentielle. La figure 2 représente en effet un exemple où $k=3=n$ et où $s_{k,n}=0$.

III. Cas où, soit $k=3$, soit $n=3$.

Etant donnés deux ensembles fermés A et B , nous entendons par *pont* de A à B un arc ouvert P dont seules les extrémités appartiennent à A et à B (ces extrémités ne sont pas considérées comme appartenant à P).

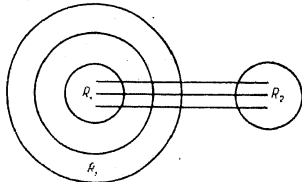


Fig. 2.

Lemme. Soient A et B deux continus disjoints dont les complémentaires $\mathcal{S}_2 - A$ et $\mathcal{S}_2 - B$ sont connexes³⁾ et soient P_0, P_1, P_2 trois ponts de A à B disjoints deux à deux.

A tout point p situé en dehors de l'ensemble $E = A + B + P_0 + P_1 + P_2$ correspond un indice j tel que l'ensemble $A + B + P_j + P_{j+1}$ est une coupure de \mathcal{S}_2 entre p et P_{j+2} (les indices étant réduits mod 3).

Démonstration. Le lemme est évident dans le cas où les ensembles A et B se composent de points individuels, car alors

³⁾ Le lemme reste vrai en omettant l'hypothèse que les ensembles $\mathcal{S}_2 - A$ et $\mathcal{S}_2 - B$ soient connexes. Mais alors la démonstration devient un peu plus compliquée: l'hyperespace que l'on y considère n'est plus homéomorphe à la surface \mathcal{S}_2 , mais est un continu de Janiszewski (continu localement connexe dont tout élément cyclique qui ne se réduit pas à un seul point est homéomorphe à \mathcal{S}_2). Cf. C. Kuratowski, *Topologie II*, p. 379.

l'ensemble E est une „courbe”, représentée sur la figure 3 (voir d'ailleurs *Topologie II*, p. 359).

Le cas général se réduit à celui-ci en envisageant la décomposition de la surface sphérique \mathcal{S}_2 en ensembles A et B et en points individuels de $\mathcal{S}_2 - (A + B)$. Les continus A et B n'étant pas des coupures de \mathcal{S}_2 , l'hyperespace de cette décomposition est — d'après un théorème de R. L. Moore⁴⁾ — homéomorphe à \mathcal{S}_2 et l'ensemble E se transforme, dans cette homéomorphie, en une courbe θ ; d'où la conclusion demandée.

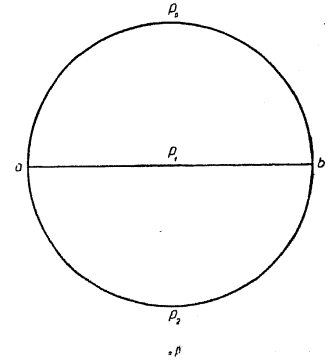


Fig. 3.

Démonstration de la formule (4). Envisageons d'abord le cas où $k=3=n$.

Il s'agit de montrer que

$$(9) \quad s_{3,3} = 1^5,$$

c'est-à-dire que l'un des continus K_i coupe l'une des régions R_j .

Supposons que K_3 ne coupe aucune région R_j .

D'après (iii), il existe pour $j=1,2,3$, un pont $P_j \subset R_j - K_3$ de K_1 à K_2 . D'après (ii) ces ponts sont disjoints, donc — en tenant compte de (v) — il est légitime d'admettre, en vertu du lemme, que l'ensemble

$$Z = K_1 + K_2 + P_1 + P_2$$

coupe \mathcal{S}_2 entre P_3 et K_3 , puisque

$$(10) \quad K_3 \subset \mathcal{S}_2 - (K_1 + K_2 + P_1 + P_2 + P_3).$$

Comme $P_3 \subset R_3$ et $K_3 \cdot R_3 \neq 0$, il en résulte que l'ensemble Z est une coupure de la région R_3 (entre P_3 et tout point de $K_3 \cdot R_3$); cela veut dire que la somme $K_1 + K_2$ coupe R_3 (puisque $(P_1 + P_2) \cdot R_3 = 0$). Les continus K_1 et K_2 étant disjoints et R_3 n'étant pas une coupure

⁴⁾ Voir, par exemple, *Topologie II*, p. 380.

⁵⁾ Cette formule a été établie par M. Zarankiewicz sur une autre voie dans sa note *Über eine topologische Eigenschaft der Ebene*, publiée dans *Fund. Math.* 11 (1928), p. 19-26.

de \mathcal{S}_2 , donc R_2 étant univoqué⁶⁾, il en résulte que l'un des continus, soit K_1 , soit K_2 est une coupure de R_2 .

La formule (9) se trouve ainsi établie.

Passons au cas général de la formule (4)⁷⁾. Il s'agit d'établir les formules (4) pour $k \geq 3$ et $n \geq 3$.

Nous allons établir la deuxième (la démonstration de la première étant tout à fait analogue).

Supposons par impossible que $s_{k,3} \leq k-3$. Il existe donc trois indices $i_1 < i_2 < i_3$ tels qu'aucun des continus $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}$ ne coupe aucune des régions R_1, R_2, R_3 . Mais ceci est incompatible avec la formule (9).

IV. Cas où, soit $k=4$, soit $n=4$.

Lemme 1. Soient A et B deux continus disjoints dont les complémentaires $\mathcal{S}_2 - A$ et $\mathcal{S}_2 - B$ sont connexes⁸⁾ et soient P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points de A à B disjoints deux à deux. Admettons (conformément au lemme du NIII) que le numérotage de ces points soit tel que l'ensemble $A+B+P_1+P_3$ soit une coupure de \mathcal{S}_2 entre P_2 et P_4 .

Dans ces hypothèses, l'ensemble $A+B+P_2+P_4$ coupe \mathcal{S}_2 entre P_1 et P_3 .

Démonstration. Le lemme est évident dans le cas où les continus A et B se composent de points individuels (voir fig. 4, p. 21).

Le cas général se réduit à celui-ci en envisageant la décomposition de \mathcal{S}_2 en continus A et B et en points individuels de $\mathcal{S}_2 - (A+B)$ (comme dans la démonstration du lemme du NIII).

Lemme 2. La matrice représentée sur la figure 5 ne peut pas avoir lieu.

Autrement dit, il est impossible que le continu K_i ne coupe la région R_j que dans les 4 cas où le couple i, j est désigné par un astérisque.

⁶⁾ Nous nous basons ici sur l'univoqué des régions R telles que $\mathcal{S}_2 - R$ est connexe. L'univoqué de R veut dire que, si R est représenté comme somme de deux ensembles connexes et ouverts, le produit de ces ensembles est connexe; en d'autres termes (en passant aux complémentaires des ensembles): si aucun de deux ensembles fermés et disjoints n'est une coupure de la région R , la somme de ces deux ensembles n'est nonplus une coupure de R .

Cf. *Topologie II*, p. 355, th. 6.

⁷⁾ Le passage de la formule (9) à (4) est dû à M. Gy. Hajós.

Démonstration. D'après la fig. 5, ni le continu K_3 ne coupe les régions R_2 et R_4 , ni le continu K_4 ne coupe aucune des régions R_1, R_2, R_3 . Il existe donc, pour $j=1, 2, 3, 4$, un pont $P_j \subset R_j$ de K_1 à K_2 tel que

$$(11) \quad P_j \cdot K_3 = 0 \quad \text{pour } j=2 \text{ et } 4,$$

$$(12) \quad P_j \cdot K_4 = 0 \quad \text{pour } j=1, 2 \text{ et } 3.$$

Posons

$$E = K_1 + K_2 + P_1 + P_2 + P_3.$$

Il vient $EK_4 = 0$ d'après (12). Par conséquent, en raison du lemme du NIII, l'un des trois cas se présente:

ou bien $K_1 + K_2 + P_1 + P_2$ coupe \mathcal{S}_2 entre P_3 et K_4 ,

" " $K_1 + K_2 + P_2 + P_3$ " " " P_1 et K_4 ,

" " $K_1 + K_2 + P_1 + P_3$ " " " P_2 et K_4 .

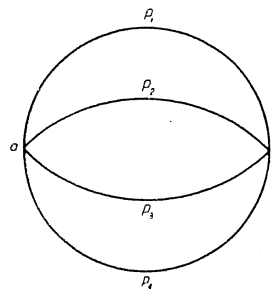


Fig. 4.

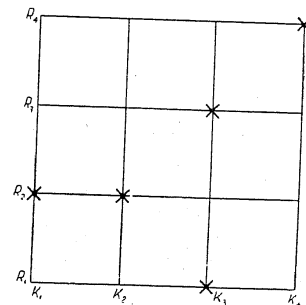


Fig. 5.

Le premier cas ne peut pas se présenter, car d'après la figure 5, ni K_1 , ni K_2 ne sont des coupures de la région R_3 , donc $K_1 + K_2$ n'est nonplus une coupure de cette région; tandis que, d'autre part, la région R_3 contient des points en commun avec K_4 et contient le pont P_3 .

Un raisonnement analogue montre que le cas 2 ne peut nonplus se présenter.

Il est donc établi que le continu

$$Q = K_1 + K_2 + P_1 + P_3$$

coupe \mathcal{S}_2 entre P_2 et K_4 .

Nous en concluons que Q coupe \mathcal{S}_2 entre P_2 et P_4 ; en effet, ni K_1 , ni K_2 ne coupe R_4 (cf. la figure 5), donc K_1+K_2 , et par conséquent, Q ne coupe nonplus R_4 , de sorte que l'ensemble P_4 (comme sous-ensemble de R_4-Q) appartient à la même composante de \mathcal{S}_2-Q que K_1 .

Ceci établi, le lemme 1 est applicable. Il en résulte que le continu

$$F=K_1+K_2+P_2+P_4$$

coupe \mathcal{S}_3 entre P_1 et P_3 .

D'autre part, les ensembles R_1-F et R_3-F sont connexes (puisque K_1+K_2 ne coupe ni R_1 , ni R_3), $K_3 \cdot F=0$ (d'après (11)) et

$$K_3 \cdot R_1 - F \neq 0 \neq K_3 \cdot R_3 - F;$$

de sorte que l'ensemble connexe

$$(R_1-F) + K_3 + (R_3-F)$$

unit P_1 à P_3 dans \mathcal{S}_2-F ; d'où la contradiction demandée.

Démonstration de la formule (5).

Envisageons d'abord le cas où $k=4=n$.

Il s'agit de montrer que dans la matrice correspondante il y a au moins 4 astérisques.

Supposons, par contre, qu'il n'y en ait que 3 au plus. Il existe par conséquent une ligne horizontale et une ligne verticale sans astérisque. Il est légitime d'admettre que ce soient les premières lignes: horizontale et verticale.

De plus, en vertu de la remarque 1 du NI, il est légitime d'admettre qu'aucune ligne verticale, ni horizontale ne contient deux astérisques; donc, en définitive: que seuls les points (2,2), (3,3) et (4,4) sont désignés par des astérisques. Mais ceci contredit le lemme 2.

Il est ainsi établi que

$$(13) \quad s_{4,4} = 4.$$

Passons au cas où $k=4$ et $n=5$.

Il s'agit de montrer que la matrice correspondante contient au moins 6 astérisques.

Supposons, par contre, qu'elle en contienne tout au plus 5.

En raison de la remarque 1 du NI, il est légitime d'admettre qu'aucune ligne horizontale ne contient 3 astérisques, ni aucune ligne verticale — 2. Il n'y a donc que deux configurations qui soient possibles a priori:

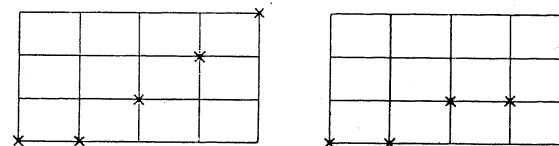


Fig. 6.

(nous considérons évidemment comme équivalentes deux matrices qui s'obtiennent l'une de l'autre par une permutation des lignes verticales ou des lignes horizontales).

Mais les deux configurations sont incompatibles avec le lemme 2; pour s'en convaincre, on omet dans la première matrice la cinquième colonne et dans la deuxième — la quatrième.

Il est ainsi établi que

$$(14) \quad s_{4,5} = 6.$$

D'une façon tout à fait analogue on montre que

$$(15) \quad s_{5,4} = 6.$$

Reste à établir les formules (5) pour $n \geq 5$ et pour $k \geq 5$.

Or, dans la matrice à 4 colonnes et $n \geq 5$ lignes horizontales, il y a sur les 5 premières lignes au moins 6 astérisques (d'après (14)). Il y a donc une ligne contenant deux astérisques. En vertu de la remarque 1 du NI, la première formule (5) est donc vérifiée.

La démonstration de la deuxième est analogue.

Remarque. Le passage des formules (14) et (15) à (5), ainsi que de (9) à (4), peut être déduit de la remarque générale suivante: si la formule (3) est vraie pour le couple $(k, 2k-3)$, elle est vraie aussi pour k et tout $n \geq 2k-3$.

En effet, considérons dans la matrice à k colonnes et n lignes la sous-matrice composée de k colonnes et $2k-3$ premières lignes. Elle contient donc par hypothèse au moins

$$(k-2)(2k-5) = 2k^2 - 9k + 10$$

astérisques. Il y existe donc au moins une ligne qui contient $\geq k-2$ astérisques, car, en cas contraire, le nombre des astérisques serait

$$\leq (k-3)(2k-3) = 2k^2 - 9k + 9,$$

ce qui est impossible.

La conclusion suit de la remarque 1 du N1.

Par raison de symétrie, on peut remplacer k par n et n par k .

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk.

Concerning the Homological Structure of the Functional Space S_m^X .

By

Karol Borsuk (Warszawa).

1. Functional space. Let X be a compact space and Y a metric space. We denote the set of all continuous mappings of X in Y by Y^X and we define a metric in Y^X by setting

$$\rho(q, \psi) = \sup_{x \in X} \rho(q(x), \psi(x)) \quad \text{for every } q, \psi \in Y^X.$$

The functional spaces Y^X offer scope for ample investigation especially when Y is the Euclidean m -dimensional sphere S_m . In particular the problem of what properties of X imply the connectedness of S_m^X is completely resolved for the case $\dim X \leq m$, by the celebrated theorem of H. Hopf¹⁾. The relations between the properties of X and the other properties of S_m^X have been less fully investigated. The purpose of this paper is to indicate a simple relation between some homological properties of X and of S_m^X .

2. ε -chains in a metric space. Let M be a metric space. By an ε -simplex of M we understand a finite subset of M with diameter $< \varepsilon$. In the known manner we introduce the notion of an oriented ε -simplex, of an ε -chain with arbitrarily given coefficients and especially of an ε -cycle. If the group of coefficients is the group of rational numbers \mathfrak{R} then the chains will be said to be rational. The boundary of a chain α will be denoted by $\partial\alpha$. Let us point out

¹⁾ H. Hopf, *Die Klassen der Abbildungen der n -dimensionalen Polyeder auf die n -dimensionale Sphäre*, Comm. Math. Helv. **5** (1933), p. 39-54 (for polytopes), and H. Freudenthal, *Bettische Gruppe mod 1 und Hopfsche Gruppe*, Compositio Math. **4** (1937), p. 235-238 (for compact spaces). See also W. Hurewicz and H. Wallmann, *Dimension Theory*, Princeton 1941, p. 147.