Une remarque sur la convergence faible.

Par

Czesław Ryll-Nardzewski (Lublin).

Nous montrons ici que la condition 2° dans la définition de l'*opération régulière*, introduite par M. J. G. Mikusiński dans sa note *„Sur la méthode de généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la convergence faible"* [1]), devient superflue lorsque la convergence dans l'ensemble C est assujettie aux trois conditions suivantes:

(i) *Si* $c_n = c$ *pour* $n=1,2,\ldots$, *on a* $\lim c_n = c$;

(ii) *Si* $\lim c_n = c$ *et* $p_1 < p_2 < \ldots$, *on a* $\lim c_{p_n} = c$;

(iii) *Si* $\lim c'_n = \lim c''_n = c$ *et* $c_{2n-1} = c'_n$, $c_{2n} = c''_n$, *on a* $\lim c_n = c$.

Remarquons d'abord que, si les postulats (ii) et (iii) sont remplis, on a:

(ii)′ Si la suite $f_n \in F$ converge faiblement, il en est de même de toute suite partielle f_{p_n} $(p_1 < p_2 < \ldots)$ et l'on a $\widetilde{\lim} f_n = \widetilde{\lim} f_{p_n}$;

(iii)′ Si $f'_n, f''_n \in F$ et $\widetilde{\lim} f'_n = \widetilde{\lim} f''_n = \bar{f}$, $f_{2n-1} = f'_n$, $f_{2n} = f''_n$ $(n=1,2,\ldots)$, on a alors $\widetilde{\lim} f_n = \bar{f}$.

Supposons qu'une opération $R(f^1,\ldots,f^k)$ satisfasse à la condition 1° de la définition de l'opération régulière et que

$$\widetilde{\lim} f^i_n = \widetilde{\lim} g^i_n \quad (i=1,\ldots,k).$$

Alors, la suite h^i_n $(i=1,\ldots,k)$, où $h^i_{2n-1} = f^i_n$ et $h_{2n} = g^i_n$, converge faiblement, d'après (iii)′. Comme f^i_n et g^i_n sont des suites partielles de h^i_n, on a, en vertu de 1° et (ii)′,

$$\widetilde{\lim} R(h^1_n,\ldots,h^k_n) = \widetilde{\lim} R(f^1_n,\ldots,f^k_n) = \widetilde{\lim} R(g^1_n,\ldots,g^k_n)$$

c.-à-d. la condition 2° de la définition de l'opération régulière est remplie.

[1]) Fundamenta Mathematicae, ce volume, p. 237.

Remarquons enfin que l'espace C assujettie aux axiomes (i), (ii) et (iii) est une notion intermédiaire entre celle d'espace $\mathcal{L}$ de Fréchet et celle d'espace $\mathcal{L}^*$ [2]), c'est-à-dire que

(1) les axiomes de l'espace $\mathcal{L}^*$ sont plus forts que ceux de C;

(2) les axiomes de C sont plus forts que ceux de $\mathcal{L}$.

L'assertion (2) découle du fait que l'axiome (iii) est indépendent des axiomes (i) et (ii) qui caractérisent l'espace de Fréchet.

Quant à l'assertion (1) il suffit de constater que la condition d'Alexandroff-Urysohn entraîne (iii) et que la réciproque n'a pas lieu.

En effet, soit C l'ensemble des nombres réelles. Nous dirons qu'une suite $c_n \in C$ converge vers c lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n - c| < +\infty$. Dans cet exemple, les axiomes (i), (ii) et (iii) sont évidemment vérifiés. D'autre part, la suite $c_n = \frac{1}{n}$ n'est pas convergente vers zéro; il est cependant possible de tirer de toute suite partielle une sous-suite qui converge vers zéro. Cela veut dire que la condition d'Alexandroff-Urysohn n'est pas remplie.

[2]) Les espaces satisfaisant aux conditions (i) et (ii) sont nommés espaces $\mathcal{L}$. Les espaces $\mathcal{L}$ qui vérifient la condition suivante (d'Alexandroff-Urysohn) sont dits espaces $\mathcal{L}^*$:

Si toute suite partielle de la suite $c_1, c_2, \ldots$ contient une sous-suite convergente vers c, on a $\lim c_n = c$.

Voir C. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1948, § 14, I.