(C) Wieder aus anderer Quelle entspringt eine Zusatzbedingung für stetige Zerlegungen $E = \sum_{y}^{H} E_y$, wenn E ein L-Raum ist und die Abbildung $y = \varphi(x)$ durch Wahl eines L-Raums H stetig gemacht werden soll. Das Konvergenzensystem von H muss dann das System $\mathfrak{L}$, bestehend aus den Konvergenzen

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x) \quad \text{für} \quad x_n \to x$$

enthalten. Anders ausgedrückt: eine Konvergenz $y_n \to y$ des Systems $\mathfrak{L}$ ist damit gleichbedeutend, dass es Punkte $x_n \in E_{y_n}$, $x \in E_y$ mit $x_n \to x$ gibt. Benutzen wir den unteren abgeschlossenen Limes $\underline{\lim}\, A_n$ einer Mengenfolge $A_n \neq 0$ (die Menge aller Punkte $\lim x_n$ für $x_n \in A_n$), so ist $y_n \to y$ damit gleichbedeutend, dass es einen Punkt x gibt, der gleichzeitig zu E_y und zu $\underline{\lim}\, E_{y_n}$ gehört, also mit

$$E_y \cdot \underline{\lim}\, E_{y_n} \neq 0.$$

Man sieht nun, dass $\mathfrak{L}$ zwar die Limesaxiome (β), (γ), aber nicht notwendig das Eindeutigkeitsaxiom (α) erfüllt, da ja $\underline{\lim}\, E_{y_n}$ mit verschiedenen E_y gemeinsame Punkte haben kann; zur Sicherung der Eindeutigkeit ist notwendig und hinreichend, dass $\underline{\lim}\, E_{y_n}$ höchstens mit einem E_y gemeinsame Punkte hat, also:

$$\text{mit} \quad E_y \cdot \underline{\lim}\, E_{y_n} \neq 0 \quad \text{ist} \quad \underline{\lim}\, E_{y_n} \subset E_y.$$

Wenn dies für alle y, y_n erfüllt ist, definiert $\mathfrak{L}$ einen L-Raum H, der unsere Aufgabe löst; die übrigen Räume dieser Art sind die Oberräume des Minimalraums H. Übrigens ist die Bedingung mit der folgenden, anscheinend schärferen, gleichwertig:

$$\text{mit} \quad E_y \cdot \underline{\lim}\, E_{y_n} \neq 0 \quad \text{ist} \quad \overline{\lim}\, E_{y_n} \subset E_y,$$

wobei der obere abgeschlossene Limes $\overline{\lim}\, A_n$ die Menge aller Punkte $\lim x_p$ (A_p Teilfolge von A_n, $x_p \in A_p$) bedeutet [1]).

Auf weitere ähnliche Bedingungen für stetige Zerlegungen wollen wir nicht eingehen. Die betrachteten drei, so verschiedener Herkunft sie auch sind, erweisen sich doch im Falle eines kompakten metrischen Raumes E als gleichwertig.

[1]) C. Kuratowski, *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. 11 (1928), p. 169—185; insbesondere p. 171. Vgl. auch P. Alexandroff, a. a. O., S. 568.

Grundzüge des Systemenkalküls.

Erster Teil *).

Von

Alfred Tarski (Warschau).

Die Ergebnisse, die in der vorliegenden Mitteilung dargestellt werden, gehören zur allgemeinen Metamathematik (die ich früher auch als allgemeine Methodologie der deduktiven Wissenschaften bezeichnet habe), also zu einer Disziplin, deren Aufgabe es ist, den Sinn von allgemeinen metamathematischen Begriffen, die sich uns bei der Untersuchung der verschiedensten konkreten deduktiven Theorien aufdrängen, zu präzisieren und die Grundeigenschaften dieser Begriffe festzustellen. Dabei sollen hier nur diejenigen Theorien berücksichtigt werden, deren Aufbau eine logische Basis in größerem oder kleinerem Umfange, mindestens aber den ganzen Aussagenkalkül voraussetzt.

In einer früheren Mitteilung: *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik* (im folgenden als T_1 zitiert) [1]) habe ich ein

*) *Anmerkung der Redaktion.* Der zweite Teil der vorliegenden Abhandlung ist gleichzeitig mit dem ersten eingegangen und wird — im Einverständnis mit dem Verfasser — im nächsten Band der *„Fundamenta Mathematicae"* veröffentlicht werden.

[1]) C. R. des séances de la Soc. d. Sc. et d. L. de Varsovie XXIII, 1930, Classe III, S. 22—29. Überdies werde ich mich in den weiteren Überlegungen auf meine folgenden Arbeiten berufen:

Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37, 1930, S. 361—404 (das ist die Ausführung desjenigen Teils der Mitteilung T_1, der deduktive Wissenschaften von beliebigem Charakter behandelt; hier als T_2 zitiert);

Sur les ensembles définissables de nombres réels. I, Fund. Math. 17, 1931, S. 210—239 (zitiert als T_3);

Grundlagensystem für die allgemeine Metamathematik der eben charakterisierten deduktiven Theorien skizziert. Hier soll in § 1 dieses Grundlagensystem einer Modifikation unterzogen werden, wodurch, wie ich glaube, größere Natürlichkeit und Einfachheit erreicht wird. In § 2 skizziere ich einen Kalkül — ich nenne ihn den Kalkül der deduktiven Systeme oder kurz Systemenkalkül —, der die metamathematischen Untersuchungen in dem uns interessierenden Gebiete wesentlich erleichtert; dabei wird sich eine interessante Analogie zwischen diesem Kalkül und der intuitionistischen Logik herausstellen. In § 3 erweitere ich den Systemenkalkül durch Einführung des Begriffs des axiomatisierbaren Systems. In § 4 werden noch zwei weitere Arten von deduktiven Systemen in die Betrachtungen einbezogen, nämlich die unzerlegbaren und die vollständigen Systeme, und es werden einige etwas tiefer liegende Sätze angegeben, die sich auf der Grundlage des Systemenkalküls gewinnen lassen und die gewisse Klassen von deduktiven Systemen bezüglich Mächtigkeit und Struktur charakterisieren. In § 5 werden die dargestellten allgemeinen Ergebnisse dadurch illustriert, dass sie auf konkrete — übrigens sehr elementare — deduktive Theorien angewendet werden [1]).

Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit, Monatsh. f. Math. u. Phys. 40, 1933, S. 97—112 (zitiert als T_4);

Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. I, Fund. Math. 24, 1935, S. 177—198 (zitiert als T_5);

Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia Philosophica 1, 1935, S. 261—404 (das ist die Übersetzung meiner Arbeit in polnischer Sprache: *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Travaux de la Soc. d. Sc. et de L. de Varsovie, Nr. 34, 1933; zitiert als T_6).

Schliesslich wird hier (als $ŁT$) die gemeinsame Arbeit von J. Łukasiewicz und dem Verfasser zitiert: *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, C. R. des séances de la Soc. d. Sc. et d. L. de Varsovie XXIII, 1930, Classe III, S. 30—50.

[1]) Zur Vermeidung von Missverständnissen ist es wichtig zu bemerken, dass ich die Ausdrücke „deduktive Theorie" und „deduktives System" im ganz verschiedener Bedeutung gebrauche. Ich verstehe hier unter deduktiven Theorien die „Modelle" („Realisierungen") des Axiomensystems, das im § 1 angegeben ist. Da in diesem System vier Grundbegriffe auftreten, so ist jedes Quadrupel von Begriffen, die alle Axiome des Systems erfüllen, sein „Modell"; um nicht zu sehr von der üblichen Bedeutung des Terminus „deduktive Theorie" abzuweichen, habe ich im Sinne nur die so beschaffenen „Modelle" des Axiomensystems, in denen als Korrelate der Grundbegriffe gewisse Mengen von Ausdrücken sowie die Operationen mit den Ausdrücken auftreten. Hingegen sind deduktive Systeme (im Bereiche einer bestimmten deduktiven Theorie) gewisse spezielle Mengen von Ausdrücken, die ich genau am Anfang des § 1 sowie in der Def. 5 des § 2 charakterisieren werde.

Beweise werden hier nicht gegeben; ich beabsichtige, sie in einer umfangreicheren Arbeit darzustellen. Sie sind übrigens mit wenigen Ausnahmen sehr einfach.

§ 1. Grundbegriffe und Axiome.

In dem in T_1 angegebenen Axiomensystem traten vier Grundausdrücke auf: „S" — *„die Menge aller sinnvollen Aussagen"*, „$Fl(X)$" — *„die Folgerungsmenge der Aussagenmenge X"*, „$\bar{x}$" — *„die Negation der Aussage x"*, „$x \rightarrow y$" — *„die Implikation mit dem Vorderglied x und dem Nachglied y"* [1]). Mit Hilfe dieser Begriffe wurde dort u. a. der Begriff des **deduktiven Systems** definiert, d. h. einer Aussagenmenge, die alle ihre Folgerungen als Elemente enthält; die Klasse aller deduktiven Systeme wurde mit dem Symbol „$\mathfrak{S}$" bezeichnet. Es wurde dort bemerkt, daß unter den deduktiven Systemen ein kleinstes existiert, d. h. ein System, das ein Teilsystem jedes anderen deduktiven System ist. Es ist das nämlich das System $Fl(0)$, die Folgerungsmenge der leeren Menge. Dieses System, das ich hier der Kürze halber mit „L" bezeichnen werde, kann als die Menge aller logisch gültigen Aussagen interpretiert werden (oder auch allgemeiner: als die Menge aller jener Aussagen, die wir bereits als wahr anerkennen, wenn wir an den Aufbau der deduktiven Theorie, die jeweils Gegenstand der metamathematischen Untersuchung ist, herantreten) [2]).

Es zeigt sich nun, dass das erwähnte Axiomensystem eine einfachere und, wie mir scheint, auch natürlichere Gestalt annimt, wenn man anstatt „$Fl(X)$" das Symbol „L" in die Liste der Grundausdrücke aufnimmt. Zur Begründung der allgemeinen Metamathematik (in dem Umfang, in dem in T_1 eine Begründung angestrebt wurde) reichen dann folgende fünf Axiome aus:

---

[1]) Ich gebrauche hier Symbole, die sich von denen in T_1 ein wenig unterscheiden: ich schreibe „$Fl(X)$" statt „$F(X)$", „$\bar{x}$" statt „$n(x)$" und „$x \rightarrow y$" statt „$c(x, y)$". Überdies benütze ich — ähnlich wie in T_1 und T_2 — eine Symbolik, die in Arbeiten aus dem Gebiete der Mengenlehre üblich verwendet wird; im besonderen gebrauche ich Formeln vom Typus „$x, y \ldots \varepsilon X$" als Abkürzungen der Ausdrücke *„die Elemente $x, y \ldots$ gehören zur Menge X"*.

[2]) Vgl. T_1, S. 25; T_2, S. 10, Satz I. 9 b.

Axiom 1. $0 < \overline{\overline{S}} \leqslant \aleph_0$.

Axiom 2. *Wenn* $x, y \in S$, *so auch* $\bar{x} \in S$ *und* $x \rightarrow y \in S$.

Axiom 3. $L \subset S$.

Axiom 4. *Wenn* $x, y, z \in S$, *so gilt* $(\bar{x} \rightarrow x) \rightarrow x \in L$, $x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow y) \in L$ *und* $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)) \in L$.

Axiom 5. *Wenn* $x, x \rightarrow y \in L$ *(wobei* $y \in S$*), so auch* $y \in L$.

Der Inhalt dieser Axiome ist so klar, dass er kaum einer Erläuterung bedarf. Vom intuitiven Gesichtspunkt aus lassen sie jedoch gewisse Zweifel aufkommen, die ich hier nicht diskutieren werde [1]).

Die Axiome 2, 4 und 5 sind dem System der Grundausdrücke, der Axiome und der Schlussregeln von Łukasiewicz angefasst, das eine hinreichende Basis zur Begründung des Aussagenkalküls bildet [2]). Es ist klar, dass wir ebenso gut irgendein anderes formales System des Aussagenkalküls als Ausgangspunkt benützen könnten. Wenn wir uns im besonderen den Aussagenkalkül Nicod's [3]) zum Vorbild nähmen, so würde die Zahl der in den Axiomen auftretenden Grundausdrücke kleiner werden und die Axiome 2 und 4 würden eine gewisse Vereinfachung erfahren.

Wir wollen zeigen, wie mit Hilfe der angenommenen Grundbegriffe der Begriff der Folgerung definiert werden kann. Zu diesem Zwecke setzen wir vor allem:

Definition 1. $x + y = \bar{x} \rightarrow y$, $x \cdot y = \overline{\bar{x} \rightarrow \bar{y}}$ *für beliebige* $x, y \in S$.

Den Begriff der Summe und des Produktes von Aussagen kann man mittels Rekurenz auf eine beliebige endliche Anzahl von Summanden und Faktoren ausdehnen:

Definition 2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1$, *wenn* $n = 1$ *und* $x_1 \in S$; $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n$ *und* $\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} x_i \cdot x_n$, *wenn* n *eine beliebige natürliche Zahl* > 1 *ist und* $x_1, x_2 \ldots, x_n \in S$.

[1]) Vgl. T_1, S. 24, Anm. [2]); T_4, S. 100, Anm. [10]); T_6, S. 269, Anm. [5]), S. 290 f. und 300 ff.

[2]) Vgl. $ŁT$, S. 31 und 35; T_1, S. 25, die Bemerkungen im Zusammenhang mit Satz 3*.

[3]) Vgl. J. Nicod. *A reduction in the number of the primitive propositions of logic*, Proc. of the Cambr. Philos. Soc. 19, 1917.

Die Definition des Begriffes der Folgerung lautet:

Definition 3. Für eine beliebige Menge $X \subset S$ *besteht die Menge* $Fl(X)$ *aus solchen und nur aus solchen Aussagen* $y \in S$, *die die Bedingung erfüllen: entweder* $y \in L$, *oder es gibt Aussagen* $x_1, x_2 \ldots, x_n \in X$, *so dass* $\prod_{i=1}^{n} x_i \rightarrow y \in L$.

Diese Definition kann man in folgender Weise unformen:

Satz 1. Für eine beliebige Menge $X \subset S$ *ist die Menge* $Fl(X)$ *der Durchschnitt aller der Mengen* Y, *die die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:* (1) $L + X \subset Y$; (2) *wenn* $x, x \rightarrow y \in Y$ *(wobei* $y \in S$*), so* $y \in Y$.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Menge $Fl(X)$ eine von den Mengen Y ist, die die Bedingungen (1) und (2) des eben angeführten Satzes erfüllen; sie ist also die kleinste dieser Mengen. Da man die Operation, die zwei beliebigen Aussagen x und $x \rightarrow y$ die Aussage y zuordnet, gewöhnlich Operation der Abtrennung nennt, so kann man auf Grund des Satzes 1 die Menge $Fl(X)$ als kleinste Menge charakterisieren, die die Mengen L und X enthält und die in Bezug auf die Operation der Abtrennung abgeschlossen ist.

Es könnte scheinen, der hier eingeführte Begriff der Folgerung sei wesentlich enger als der, mit dem man gewöhnlich beim Aufbau von deduktiven Theorien operiert: bei der Präzisierung dieses Begriffes haben wir nur eine der Schlussregeln berücksichtigt — die Regel der Abtrennung, als ob wir die Existenz anderer Regeln dieser Art, z. B. die der Einsetzungsregel und der Regeln des Operierens mit dem Alloperator [1]), gänzlich vergessen hätten. Alles dies aber hängt im wesentlichen von der Interpretation des Symbols „L" ab. Ist das System der Logik, worauf wir die deduktiven Theorien gründen, so beschaffen, dass wann immer eine bestimmte Aussage y aus einer anderen Aussage x, bzw. aus anderen Aussagen $x_1, x_2 \ldots, x_n$ mit Hilfe irgendeiner der Schlussregeln gewonnen werden kann, dann die Implikation, $x \rightarrow y$, bzw. $\prod_{i=1}^{n} x_i \rightarrow y$ der Menge L aller logisch gültigen Aussagen zugezählt wird (diese Bedingung erfüllen tatsächlich alle bekannten und genügend ausgebauten Systeme der Logik), so erfährt der Begriff der Folgerung keineswegs eine Verengerung: die Aussage y wird unter diesen Bedingungen eine Folgerung jeder Menge von Aussagen sein, die die Aussage x, bzw. die Aussagen $x_1, x_2 \ldots, x_n$ enthält, nicht nur im üblichen Sinne, sondern auch im Sinne der Def. 3 oder

[1]) Vgl. z. B. T_6, S. 297 ff.

des Satzes 1. Man könnte also sagen, dass man mit der Regel der Abtrennung (sogar in der besonderen Gestalt, in welcher sie in der Def. 3 auftritt) als einziger Schlussregel beim Aufbau von deduktiven Theorien auslangt, wenn nur diese Theorien auf eine genügend reiche logische Basis gestützt sind.

Es können nun folgende zwei Sätze bewiesen werden:

Satz 2. ${}^{a})$ *Ist* $X \subset S$, *so* $X \subset Fl(X) \subset S$;

${}^{b})$ *ist* $X \subset S$, *so* $Fl(Fl(X)) = Fl(X)$

${}^{c})$ *ist* $X \subset S$, *so* $Fl(X) = \sum\limits_{Y \subset X \text{ und } \overline{\overline{Y}} < \aleph_0} Fl(Y)$;

${}^{d})$ *es gibt eine Aussage* $x \in S$, *so dass* $Fl(\{x\}) = S$;

${}^{e})$ *ist* $X \subset S$, $y, z \in S$ *und* $y \rightarrow z \in Fl(X)$, *so* $z \in Fl(X + \{y\})$;

${}^{f})$ *ist* $X \subset S$, $y, z \in S$ *und* $z \in Fl(X + \{y\})$, *so* $y \rightarrow z \in Fl(X)$;

${}^{g})$ *wenn* $x \in S$, *so* $Fl(\{x, \bar{x}\}) = S$;

${}^{h})$ *wenn* $x \in S$, *so* $Fl(\{x\}) \cdot Fl(\{\bar{x}\}) = Fl(0)$.

Satz 3. $L = Fl(0)$.

Satz 2 zeigt, dass sich aus den oben angegebenen Axiomen 1—5 und aus der Def. 3 alle Axiome 1—10* ergeben, die in T_1 vorgeschlagen wurden (von den Axiomen 1 und 6* aus T_1 konnten wir bei Formulierung des Satzes 2 absehen, denn das erste ist im neuen Axiom 1 enthalten, das zweite aber deckt sich mit dem neuen Axiom 2). Es ist leicht zu zeigen, dass sich das Ergebnis umkehren lässt: wenn wir den Satz 3 als Definition des Symbols „L" ansehen, dann können wir aus dieser Definition und aus dem Axiomensystem von T_1 die neuen Axiome 1—5 und die Def. 3 als Sätze ableiten. Schliesslich können wir also behaupten, dass die beiden in Betracht gezogenen Systeme von Axiomen und Grundbegriffen äquivalent sind.

§ 2. Der Systemenkalkül.

Auf den im vorigen Paragraphen entworfenen Grundlagen kann man zwei Kalküle aufbauen, die bei metamathematischen Untersuchungen sehr nützlich sind, nämlich den Kalkül von Aussagen und den Kalkül von deduktiven Systemen; der erste ist eine vollständige, der zweite eine teilweise Interpretation des formalen Systems, das gewöhnlich Algebra der Logik oder Boole'sche Algebra genannt wird.

Um die weiteren Überlegungen zu konkretisieren, werden wir hier in extenso ein bekanntes System von Postulaten anführen, das zum Aufbau der Algebra der Logik dienen kann. In diesem System werden acht Grundbegriffe vorkommen: „B" — „*der Bereich der Überlegungen*", „$x < y$" — „*das Ding* x *steht in der Beziehung der Inklusion zum Dinge* y", „$x = y$" — „*das Ding* x *steht in der Beziehung der Gleichheit zum Dinge* y", „$x + y$" — „*die Summe der Dinge* x *und* y", „$x \cdot y$" — „*das Produkt der Dinge* x *und* y", „0" — „*das Nullding*" („*das leere Ding*"), „1" — „*das Totalding*" („*das volle Ding*"), „$\bar{x}$" — „*das Komplement (die Ergänzung, die Negation) des Dinges* x".

Das betrachtete System besteht aus sieben Postulaten:

Postulat I. ${}^{a})$ *Wenn* $x \in B$, *so* $x < x$; ${}^{b})$ *wenn* $x, y, z \in B$, $x < y$ *und* $y < z$, *so* $x < z$.

Postulat II. Wenn $x, y \in B$, *so gilt* $x = y$ *dann und nur dann, wenn zugleich* $x < y$ *und* $y < x$.

Postulat III. Wenn $x, y \in B$, *so* ${}^{a})$ $x + y \in B$; ${}^{b})$ $x < x + y$ *und* $y < x + y$; ${}^{c})$ *wenn überdies* $z \in B$, $x < z$ *und* $y < z$ *so* $x + y < z$.

Postulat IV. Wenn $x, y \in B$, *so* ${}^{a})$ $x \cdot y \in B$, ${}^{b})$ $x \cdot y < x$ *und* $x \cdot y < y$; ${}^{c})$ *wenn überdies* $z \in B$, $z < x$ *und* $z < y$, *so* $z < x \cdot y$.

Postulat V. Wenn $x, y, z \in B$, *so* ${}^{a})$ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *und* ${}^{b})$ $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

Postulat VI. ${}^{a})$ $0, 1 \in B$; ${}^{b})$ *wenn* $x \in B$, *so* $0 < x$ *und* $x < 1$.

Postulat VII. Wenn $x \in B$, *so* ${}^{a})$ $\bar{x} \in B$, ${}^{b})$ $x \cdot \bar{x} = 0$ *und* ${}^{c})$ $x + \bar{x} = 1$.

Das System der Algebra der Logik kann man erweitern, indem man zwei unendliche Operationen einführt: „$\sum\limits_{y \in X} y$" — „*die Summe aller Dinge der Menge* X" und „$\prod\limits_{y \in X} y$" — „*das Produkt aller Dinge der Menge* X". Es ist dann notwendig, folgende Postulate hinzuzufügen:

Postulat VIII. Ist $X \subset B$, *so* ${}^{a})$ $\sum\limits_{y \in X} y \in B$ *und* ${}^{b})$ $x < \sum\limits_{y \in X} y$ *für ein beliebiges* $x \in X$; ${}^{c})$ *wenn überdies* $z \in B$ *und* $x < z$ *für ein beliebiges* $x \in X$, *so* $\sum\limits_{y \in X} y < z$.

Postulat IX. Ist $X \subset B$, so $^{a})$ $\prod_{y \in X} y \in B$ *und* $^{b})$ $\prod_{y \in X} y < x$ *für ein beliebiges* $x \in X$; $^{c})$ *wenn überdies* $z \in B$ *und* $z < x$ *für ein beliebiges* $x \in X$, *so* $z < \prod_{y \in X} y$.

Postulat X. Wenn $x \in B$ *und* $X \subset B$, *so* $^{a})$ $x \cdot \sum_{y \in X} y = \sum_{y \in X} (x \cdot y)$ *und* $^{b})$ $x + \prod_{y \in X} y = \prod_{y \in X} (x + y)$.

Die Postulate I—VII samt allen Sätzen, die sich aus ihnen ergeben, bilden das gewöhnliche und die Postulate I—X das erweiterte System der Algebra der Logik [1]).

Wir gehen nun zum Kalkül der Aussagen über, den wir übrigens nur kurz besprechen werden; um terminologische Missverständnisse zu vermeiden, wollen wir ihn nicht einfach Aussagenkalkül, sondern Algorithmus der Aussagen nennen: der Terminus „Aussagenkalkül" hat schon eine bestimmte Bedeutung, die sich mit der, die wir meinen, nicht deckt.

Den Bereich der Überlegungen des Algorithmus der Aussagen bildet die Menge S. Wir werden zwischen den Elementen dieser Menge zwei Beziehungen definieren: „$x \supset y$" („x *impliziert* y") *und* „$x \equiv y$" („x *ist* y *äquivalent*").

Definition 4. $^{a})$ $x \supset y$ *gilt dann und nur dann, wenn* $x, y \in S$ *und* $x \rightarrow y \in L$; $^{b})$ $x \equiv y$ *gilt dann und nur dann, wenn zugleich* $x \supset y$ *und* $y \supset x$ *gilt.*

Dann kann man folgendes beweisen:

Satz 4. Ersetzen wir in allen Postulaten des gewöhnlichen Systems der Algebra der Logik die Symbole „B", „$<$" *und* „$=$" *beziehungsweise durch* „S", „$\supset$" *und* „$\equiv$"; *ersetzen wir ferner* „0" *durch die Variable* „u" *und* „1" *durch die Variable* „v", *wobei wir überall in den entsprechenden Postulaten die Voraussetzungen machen, dass* $u \in S$ *und* $\bar{u} \in L$ *sowie dass* $v \in L$ *gilt; lassen wir endlich die übrigen Symbole unverändert. Dann sind die Postulate I—VII erfüllt.*

[1]) Vgl. T_5, S. 177—180. Es ist zu bemerken, dass die Postulate I—X nicht von einander unabhängig sind; insbesondere kann man zeigen, dass beliebige drei von den vier Postulaten V^a, V^b, X^a und X^b aus den übrigen Postulaten des betrachteten Systems abgeleitet werden können (dadurch wird eine Bemerkung verschärft, die in T_5, S. 180 gemacht wurde).

Zu diesem Satz ist zu bemerken, dass die Symbole „0" und „1" der Algebra der Logik auf unserer Grundlage nicht „effektiv" interpretiert werden können, denn wir können keine einzige Konstante definieren, die einen konkreten Satz bezeichnet.

Der Satz 4 zeigt, dass man aus den Axiomen 1—5, die in § 1 vorgeschlagen wurden, — auf Grund entsprechend gewählter Definitionen (1 und 4) — alle Postulate des gewöhnlichen Systems der Algebra der Logik ableiten kann; man überzeugt sich dabei leicht, dass das Axiom 1 im Beweise des betrachteten Satzes keine Rolle spielt. Dieses Ergebnis kann umgekehrt werden: aus den Postulaten I—VII der Algebra der Logik (wenn die in Satz 4 beschriebenen Ersetzungen durchgeführt werden) kann man die Axiome 2—5 ableiten, falls der Ausdruck „$x \rightarrow y$" nur entsprechend definiert wird, indem man z. B.: $x \rightarrow y = \bar{x} + y$ setzt. Wir können also behaupten, dass die Axiome 2—5 ein System von Sätzen bilden, das mit dem System der Postulate des gewöhnlichen Systems der Algebra der Logik äquivalent ist (das Problem der Äquivalenz der Systeme von Grundbegriffen, die in den beiden Systemen von Sätzen auftreten, würde eine eingehendere Besprechung verlangen) [1]).

Da wir als Grundlage der Überlegungen das System der Axiome des § 1 gewählt haben, haben wir uns im Grunde darauf beschränkt, die Menge S als eine nichtleere, höchstens abzählbare Menge zu charakterisieren, deren Elemente, — bezüglich der zwischen ihnen bestehenden Verknüpfungen — die Postulate der Algebra der Logik erfüllen. Die Forschungen, die sich auf diese Grundlage stützen, überschreiten also nicht — vom rein formalen Gesichtspunkt aus — das Gebiet der Algebra der Logik, unterscheiden sich aber von den früher in diesem Gebiete durchgeführten Überlegungen dadurch, dass sie sich auf Begriffe richten, mit denen man sich bis jetzt nicht beschäftigt hat: den Hauptgegenstand der Untersuchungen bilden nicht die Elemente des Systems S selbst, die zwischen ihnen herrschenden Beziehungen oder die Operationen, die mit ihnen durchgeführt werden, sondern gewisse ausgewählte Mengen dieser Elemente, nämlich die deduktiven Systeme.

[1]) Wie ich schon in § 1 erwähnt habe, kann man bei der Formulierung eines Axiomensystems für den uns interessierenden Bereich der Untersuchungen ein beliebiges Grundlagensystem zum Vorbild nehmen, das zum formalen Aufbau des Aussagenkalküls ausreicht. Wenn wir diese Bemerkung mit den Tatsachen vergleichen, von denen vorher die Rede war, kommen wir zur Überzeugung, dass es eine allgemeine Methode gibt, die es erlaubt, aus jedem System von Axiomen und Schlussregeln für den Aussagenkalkül ein System von Postulaten für die Algebra der Logik zu gewinnen. Es wäre überflüssig, hier genauer zu beschreiben, worauf diese Methode beruht, zumal sie in den letzten Jahren in den Aufsätzen von Bernstein und Huntington entwickelt wurde; vgl. B. A. Bernstein, *Whitehead and Russell's theory of deduction as a mathematical science*, Bull. of the Am. Math. Soc. 37, 1931, S. 480—488, sowie E. V. Huntington: *New sets of independent postulates for the algebra of logic...*, Trans. of the Am. Math. Soc. 35, 1933, S. 274—304, und *Independent postulates for the „informal" part of Principia Mathematica*, Bull. of the Am. Math. Soc. 40, 1934, S. 127—136.

Erinnern wir uns an die Definition des dekuktiven Systems:

Definition 5. $X \epsilon \mathfrak{S}$ *dann und nur dann, wenn* $Fl(X) \subset X \subset S$.

Mit Hilfe der von uns angenommenen Grundbegriffe könnte man diesen Begriff auch in folgender Weise charakterisieren:

Satz 5. $X \epsilon \mathfrak{S}$ *gilt dann und nur dann, wenn* $L \subset X \subset S$ *gilt und wenn die Formeln:* $x, x \rightarrow y \epsilon X$ *und* $y \epsilon S$ *immer:* $y \epsilon X$ *nach sich ziehen.*

Der Kalkül der deduktiven Systeme, den wir kurz **Systemenkalkül** nennen werden, stellt (wie es sich weiter unten zeigen wird) eine sehr wesentliche Erweiterung des Algorithmus der Aussagen dar. In dem Systemenkalkül kommen die Korrelate aller Grundbegriffe aus dem Gebiete der Algebra der Logik vor. Den Bereich der Überlegungen bildet die Klasse $\mathfrak{S}$. L wird als das leere System, S als das volle System betrachtet. Die Inklusion und die Gleichheit zwischen den Systemen sowie das Produkt (der Durchschnitt) der Systeme bewahren ihren üblichen, im Klassenkalkül festgelegten Sinn (der Klassenkalkül bildet bekanntlich eine der gewöhnlichsten Interpretationen der Algebra der Logik); die Gleichheit deckt sich also mit der logischen Identität. Die Addition der Systeme dagegen, die wir **logische Addition** nennen und mit dem Symbol „$\dot{+}$" bezeichnen werden, deckt sich nicht mit der mengentheoretischen Addition, denn die letztere Operation hat, wenn sie auf Systeme angewendet wird, in der Regel kein neues deduktives System als Ergebnis [1]); entsprechendes gilt auch für die Operation der Bildung des Komplements.

Die Definition der **logischen Summe** der Systeme X und Y lautet:

Definiton 6. $X \dot{+} Y = Fl(X + Y)$ *für beliebige* $X, Y \epsilon \mathfrak{S}$.

Das **logische Komplement** (die **logische Ergänzung**) oder die **Negation des Systems** X, symbolisch $\overline{X}$, definieren wir folgendermassen:

Bei dieser Gelegenheit möchte ich bemerken, dass mir das System der Axiome 1—5 aus § 1 und sein Zusammenhang mit der Algebra der Logik schon im Jahre 1930 bekannt waren (ich erwähne dies System implicite in T_2, S. 362 als Grundlage, auf der der bisher nicht veröffentlichte zweite Teil der zitierten Arbeit aufgebaut wird).

[1]) Vgl. T_1, S. 25, Satz 7*; T_2, S. 370—371, Satz I. 12 und die ihm hinzugefügten Bemerkungen.

Definition 7. $\overline{X} = \prod_{x \epsilon X} Fl(\{\overline{x}\})$ *für ein beliebiges* $X \epsilon \mathfrak{S}$.

Wir werden weiter unten (Satz 21) andere äquivalente Formulierungen dieser Definition kennen lernen.

Auf Grund der angegebenen Definitionen kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 6. Ersetzen wir in allen Postulaten des gewöhnlichen Systems der Algebra der Logik die Variablen „x", „y", „z" durch die Variablen „X", „Y", „Z", die deduktive Systeme bezeichnen; ersetzen wir ferner die Konstanten „B", „<", „+", „0" und „1" beziehungsweise durch die Symbole „$\mathfrak{S}$*", „*$\subset$*", „*$\dot{+}$*", „L" und „S". Dann sind alle Postulate erfüllt, mit Ausnahme des Postulates* VII^c*, das wegfällt; doch behält die folgende Folgerung des Postulates* VII^c *ihre Gültigkeit:*

Postulat VII^d. *Ist* $X, Y \epsilon \mathfrak{S}$ *und* $X \cdot Y = L$, *so* $Y \subset \overline{X}$.

Der wesentliche Unterschied zwischen dem Systemenkalkül und z. B. dem Klassenkalkül besteht also darin, dass im Systemenkalkül statt des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten: $X \dot{+} \overline{X} = S$ nur eine gewisse schwächere Folgerung dieses Satzes gilt. Wie sich aus den weiter unten angegebenen Sätzen 17 und 37 ergibt, gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten im Falle, wenn die Klasse $\mathfrak{S}$ endlich ist (oder, was auf das gleiche hinausläuft, wenn die Menge S nicht unendlich viele Sätze enthält derart, dass nicht zwei von diesen äquivalent sind). Wenn aber die Klasse $\mathfrak{S}$ unendlich ist — und diesem Falle begegnen wir im allgemeinen bei der Betrachtung von konkreten deduktiven Wissenschaften — so gibt es Systeme, die diesem Satze nicht genügen.

Das Fehlen des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten zieht weitere Folgerungen nach sich. Der Satz von der doppelten Negation gilt nur in einer Richtung, erst der Satz von der dreifachen Negation gilt in beiden Richtungen:

Satz 7. Wenn $X \epsilon \mathfrak{S}$, *so* $X \subset \overline{\overline{X}}$ *und* $\overline{X} = \overline{\overline{\overline{X}}}$.

Von den zwei **De Morgan**'schen Sätzen ist nur einer wahr, von den vier Sätzen der Transposition fallen zwei weg, zwei aber bleiben gültig:

Satz 8. Ist $X, Y \in \mathfrak{S}$, so ${}^{a})$ $\overline{X \dotplus Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$; ${}^{b})$ $\overline{\overline{X \cdot Y}} = \overline{\overline{X}} \cdot \overline{\overline{Y}}$, ${}^{c})$ *die Formel:* $X \subset Y$ *zieht nach sich:* $\overline{Y} \subset \overline{X}$; ${}^{d})$ *die Formel:* $X \subset \overline{Y}$ *zieht nach sich:* $Y \subset \overline{X}$.

Die Sätze 7 und 8 kann man auf einem rein kalkulmässigen Wege aus dem in Satz 6 beschriebenen Systeme von Postulaten ableiten; es werden dabei die üblichen Schlussweisen aus dem Gebiet der Algebra der Logik benützt. Das gleiche trifft auch bei anderen uns bekannten Sätzen des Systemenkalküls, sofern sie nicht einen existentialen Charakter haben.

Augenfällig ist die schlagende formale Ähnlichkeit des Systemenkalküls mit dem intuitionistischen Aussagenkalkül von Heyting[1]): man könnte sagen, die formale Beziehung des Systemenkalküls zum gewöhnlichen Klassenkalkül ist genau dieselbe wie die Beziehung des Aussagenkalküls Heyting's zum gewöhnlichen Aussagenkalkül. Mit anderen Worten: wenn wir auf Grundlage der intuitionistischen Logik den Klassenkalkül aufbauen, so wird sich dieser Kalkül — wie es scheint — formal vom Systemenkalkül nicht unterscheiden. Man kann das auch so ausdrücken: das System der in Satz 6 beschriebenen Postulate bildet (wenn man von der konkreten Bedeutung der im diesen Postulaten auftretenden Termini abstrahiert) eine hinreichende Grundlage für die Begründung eines solchen formalen Systems der Algebra der Logik, für den unter anderem der intuitionistische Klassenkalkül eine Interpretation darstellt. Es ist klar, dass die letzten Bemerkungen eine genauere Ausführung und Präzisierung erfordern würden.

Der Systemenkalkül lässt sich durch Einführung unendlicher Operationen erweitern. Das Produkt (der Durchschnitt) von Systemen der Klasse $\mathfrak{K}$ wird genau so wie im Klassenkalkül aufgefasst (als das Produkt der leeren Klasse wird immer die Menge S betrachtet), dagegen bildet die Definition der logischen Summe von Systemen der Klasse $\mathfrak{K}$, symbolisch $\dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y$, die natürliche Verallgemeinerung der Definition 7:

Definition 8. $\dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y = Fl\Big(\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}} Y\Big)$ *für eine beliebige Klasse* $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$.

[1]) Vgl. A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik*, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, 1930.

Im Falle, dass die Klasse $\mathfrak{K}$ aus den Mengen $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ besteht, die eine endliche Folge von n Gliedern, bzw. eine unendliche Folge bilden, schreiben wir statt „$\dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y$": „$Y_1 \dotplus Y_2 \dotplus \ldots \dotplus Y_n$", bzw. „$Y_1 \dotplus Y_2 \dotplus \ldots \dotplus Y_n \dotplus \ldots$"

Satz 9. Ersetzen wir in allen Postulaten des erweiterten Systems der Algebra der Logik — ausser den in Satz 6 beschriebenen Änderungen — überall die Variablen „X" und „Y" durch die Variablen „$\mathfrak{K}$" und „$\mathfrak{L}$", die Klassen von Systemen bezeichnen, und die Konstanten „Σ" und „Π" durch die Konstanten „$\dot{\boldsymbol{\sum}}$" und „$\boldsymbol{\Pi}$". Dann sind ausser den Postulaten I—VI und VII^{a,b} *auch die Postulate VIII, IX, und X*^{a} *erfüllt, doch entfällt zusammen mit dem Postulat VII*^{c} *auch das Postulat X*^{b}.

Diesem Satze gemäss ist also die endliche Multiplikation gegen die unendliche Addition distributiv, doch gilt das Distributivitätsgesetz der endlichen Addition gegen die unendliche Multiplikation im Systemenkalkül nicht mehr; a fortiori fallen die allgemeinen Distributivitätsgesetze einer der unendlichen Operation gegen die andere weg[1]). Aus der Zusammenstellung der unten angegebenen Sätze 17 und 24 ergibt sich, dass das Distributivitätsgesetz der endlichen Addition gegen die unendliche Multiplikation seine Gültigkeit in denselben Fällen bewahrt wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Aus den in den Sätzen 6 und 9 beschriebenen Postulaten kann man andere Sätze des Systemenkalküls, die unendliche Operationen betreffen, ableiten, z. B. jenen unter den beiden Sätzen von De Morgan, der für endliche Operationen gültig war:

Satz 10. Ist $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$, *so* $\overline{\dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y} = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{K}} \overline{Y}$.

Wir kennen auch solche Sätze des Systemenkalküls, die sich aus den in den Sätzen 6 und 9 beschriebenen Postulaten nicht ableiten lassen; als ein Beispiel geben wir an:

[1]) Diese Sätze sind nicht einmal in dem erweiterten System der Algebra der Logik gültig; vgl. T_5, § 2, insbesondere S. 195—197.

Satz 11. Ist $\mathfrak{K}$ eine beliebige Klasse von deduktiven Systemen, so dass $S = \dot{\sum\limits_{Y \epsilon \mathfrak{K}}} Y$, *dann gibt es eine endliche Teilklasse $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, so dass* $S = \dot{\sum\limits_{Y \epsilon \mathfrak{L}}} Y$.

Lenken wir noch die Aufmerksamkeit auf den folgenden Satz:

Satz 12. Wenn $X \epsilon \mathfrak{S}$, so [a]) $\overline{X} = \dot{\sum\limits_{X \cdot Y = L}} Y$ *und* [b]) $\overline{\overline{X}} = \prod\limits_{X \dotplus Y = S} Y$.

Die Formel [a]) dieses Satzes kann man leicht aus jenen Postulaten der Algebra der Logik ableiten, die im Systemenkalkül erfüllt sind, insbesondere aus dem Postulat VII [b, d]; die Formel [b]) können wir auf diesem Wege nicht ableiten, und wir müssen uns im Beweise unmittelbar auf die angenommenen Axiome und auf die Definitionen der in der Formel auftretenden Symbole berufen.

Satz 12 zeigt, wie man den Begriff des logischen Komplements mit Hilfe anderer Begriffe aus dem Gebiete des Systemenkalküls charakterisieren kann. Wir sehen, dass das logische Komplement des Systems X, ähnlich wie in gewöhnlichen Klassenkalkül, die Summe aller zu X **logisch fremden** Systeme ist, d. h. jener, für die: $X \cdot Y = L$ gilt, und zugleich der Durchschnitt aller Systeme Y, die X **logisch ergänzen**: $X \dotplus Y = S$. Überdies ist, im Hinblick auf den Satz vom Widerspruch, $\overline{X}$ das grösste zu X logisch fremde System; wegen der Ungültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten ist dagegen $\overline{X}$ im allgemeinen nicht das kleinste System, das X logisch ergänzt (aus Satz 12 folgt nur: wenn es überhaupt ein solches kleinstes System gibt, so deckt es sich mit $\overline{\overline{X}}$).

§ 3. Axiomatisierbare Systeme.

Dadurch, dass der Systemenkalkül von dem üblichen Klassenkalkül abweicht, entsteht eine Reihe von Problemen folgender Art: man betrachtet einen beliebigen Satz des Klassenkalküls, der bei der Übertragung auf den Boden des Systemenkalküls seine Allgemeingültigkeit verliert; es geht darum, auf möglichst einfache Art die Klasse derjenigen Systeme zu charakterisieren, für die der betrachtete Satz seine Gültigkeit bewahrt. Das wichtigste dieser

Probleme betrifft den Satz vom ausgeschlossenen Dritten und führt zu dem aus T_1 schon bekannten Begriff des **axiomatisierbaren Systems** [1]).

Wir nennen ein deduktives System X axiomatisierbar, wenn es mindestens ein Axiomensystem enthält, d. h. eine endliche Menge Y von Aussagen, so dass $X = Fl(Y)$. Da wir aber die endliche Menge Y durch eine Menge ersetzen können, die eine einzige Aussage enthält (nämlich das logische Produkt der in beliebiger Weise angeordneten Aussagen der Menge Y), so kann man diese Definition etwas vereinfachen; wir bezeichnen mit dem Symbol „$\mathfrak{A}$" die Klasse aller axiomatisierbaren Systeme und setzen:

Definition 9. $X \epsilon \mathfrak{A}$ dann und nur dann, wenn es ein solches $x \epsilon S$ gibt, dass $X = Fl(\{x\})$.

Wegen des Axioms 1 folgt daraus sofort:

Satz 13. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \leqslant \aleph_0$.

Die folgenden Sätze drücken implicite die elementaren Eigenschaften der axiomatisierbaren Systeme aus:

Satz 14. Wenn $x \epsilon S$, so [a]) *$Fl(\{x\}) = L$ dann und nur dann, wenn $x \epsilon L$;* [b]) *$Fl(\{x\}) = S$ dann und nur dann, wenn $\bar{x} \epsilon L$;* [c]) *$Fl(\{\bar{x}\}) = \overline{Fl(\{x\})}$.*

Satz 15. Wenn $x, y \epsilon S$, so [a]) *$Fl(\{x\}) \subset Fl(\{y\})$ dann und nur dann, wenn $y \supset x$;* [b]) *$Fl(\{x\}) = Fl(\{y\})$ dann und nur dann, wenn $x \equiv y$;* [c]) *$Fl(\{x + y\}) = Fl(\{x\}) \cdot Fl(\{y\})$;* [d]) *$Fl(\{x \cdot y\}) = Fl(\{x, y\}) = Fl(\{x\}) \dotplus Fl(\{y\})$.*

Aus den Sätzen 14 und 15 folgt, dass derjenige Abschnitt des Systemenkalküls, in dem man ausschliesslich die axiomatisierbaren Systeme behandelt, und der Algorithmus der Aussagen vollkommen homomorph sind (diese Homomorphie ist deshalb keine genaue Isomorphie, weil allen äquivalenten Sätzen ein und dasselbe axiomatisierbare System entspricht); dies rechtfertigt auch die oben gemachte Bemerkung, dass der Kalkül beliebiger Systeme — axiomatisierbarer und nichtaxiomatisierbarer — eine wesentliche Erweite-

[1]) Vgl. T_1, S. 27, Def. 9; T_2, S. 375, § 4, insbesondere die Def. 3 b (ich verwende den Begriff der Axiomatisierbarkeit in diesen beiden Arbeiten in einer weiteren Bedeutung als hier, da ich ihn nicht nur auf deduktive Systeme, sondern auf beliebige Aussagenmengen beziehe).

rung des Algorithmus der Aussagen bildet. Jeder Satz des Systemenkalküls, der axiomatisierbare Systeme betrifft, lässt sich vollständig oder teilweise (je nachdem, ob in diesem Satz ausschliesslich von axiomatisierbaren Systemen die Rede ist oder nicht) in die Sprache des Algorithmus der Aussagen übersetzen und umgekehrt, wobei man jedoch beachten muss, dass die beiden Kalküle in Bezug aufeinander gleichsam dual sind: der Summe von Systemen entspricht das Produkt von Aussagen, dem Produkte von Systemen die Summe von Aussagen u. s. w.

Mit Rücksicht darauf kann man den folgenden Satz aufstellen, der eine Übersetzung des Satzes 4 ist:

Satz 16. *Führen wir in den Postulaten des gewöhnlichen Systems der Algebra der Logik alle Umformungen durch, die in der Voraussetzung des Satzes 6 beschrieben wurden, nur mit dieser Abweichung, dass „B“ nicht durch „$\mathfrak{S}$“, sondern durch „$\mathfrak{A}$“ ersetzt wird. Dann sind alle Postulate I—VII erfüllt.*

Daraus ergibt sich insbesondere, dass im Kalkül der axiomatisierbaren Systeme der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt (als Korrelat des Satzes vom Widerspruch im Algorithmus der Aussagen). Es zeigt sich jedoch etwas weit interessanteres — die axiomatisierbaren Systeme sind die einzigen Systeme, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten erfüllen:

Satz 17. *$X \in \mathfrak{A}$ gilt dann und nur dann, wenn $X \in \mathfrak{S}$ und $X \dot{+} \overline{X} = S$.*

Satz 17 verdient schon wegen der oben angegebenen Analogie zwischen dem Systemenkalkül und der intuitionistischen Logik Interesse: wie man erwarten sollte, gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in Bezug auf Systeme, die in gewissem Sinne einen finitistischen Charakter haben, verliert jedoch seine Geltung im Bereich der übrigen Systeme. Satz 17 könnte seiner Form wegen als Definition des Begriffes der Axiomatisierbarkeit angesehen werden; diese Definition wäre ganz in Termen des Systemenkalküls formuliert.

Das Problem der einfachen Charakterisierung derjenigen Systeme, die dem Satze vom ausgeschlossenen Dritten gehorchen, hat im Satze 17 seine vollständige Lösung gefunden. Unten (in den

Sätzen 23, 24 und 26) werden wir die Antwort auf analoge Fragen finden, die einige andere Sätze des Klassenkalküls betreffen.

Zum Beweise von Satz 17 ist es bequem, folgenden Satz zu benützen, der eine Umkehrung der Postulate III^{a} und IV^{a} aus Satz 16 ist:

Satz 18. *Wenn $X, Y \in \mathfrak{S}$, $X \dot{+} Y \in \mathfrak{A}$ und $X \cdot Y \in \mathfrak{A}$, so $X, Y \in \mathfrak{A}$*[1] *(allgemeiner: wenn $X, Y \in \mathfrak{S}$ und $X \dot{+} Y \in \mathfrak{A}$, so gibt es Systeme $X_1, Y_1 \in \mathfrak{A}$, so dass $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ und $X \dot{+} Y = X_1 \dot{+} Y_1$).*

Um die Grundlagen des Systemenkalküls zu vervollständigen, geben wir noch einen Satz an, der einen gewissen Zusammenhang zwischen den axiomatisierbaren Systemen und den Systemen von einem beliebigen Charakter feststellt und der aus den bis jetzt behandelten Sätzen des Systemenkalküls nicht folgt:

Satz 19. *Wenn $X, Y \in \mathfrak{S}$ und wenn für ein beliebiges System $Z \in \mathfrak{A}$ die Formel: $Z \subset X$ stets: $Z \subset Y$ nach sich zieht, so gilt $X \subset Y$.*

Wir wollen nun die in den Sätzen 6 und 9 beschriebenen Postulate (gewonnen durch die Umformung und teilweise durch die Abschwächung der Postulate der Algebra der Logik) mit den Sätzen 11, 13, 17 und 19 zusammen als ein **System von Grundsätzen des Systemenkalküls** betrachten, der durch unendliche Operationen und den Begriff der Axiomatisierbarkeit bereichert ist. Mann kann zeigen, dass jeder Satz des Systemenkalküls, der sich auf Grund der Axiome aus § 1 beweisen lässt, aus den soeben dargestellten Grundsätzen abgeleitet werden kann (dabei zählen wir dem Systemenkalkül nur jene Sätze zu, die ausschliesslich Symbole und Termini folgender drei Arten enthalten: 1) Termini von einem allgemein-logischen Charakter, 2) Konstanten, die in den Grundsätzen auftreten, sowie Symbole, die mit ihrer Hilfe definiert werden können, und endlich 3) Variablen, die deduktive Systeme, Klassen von Systemen oder Relationen zwischen Systemen, Klassen jener Klassen oder Relationen u. s. w. bezeichnen). Diese Bemerkung bezieht sich insbesondere auf die schon bekannten Sätze 12, 16 und 18.

[1] Ein analoger Satz gilt auch in dem Aussagenkalkül **Heyting's** (vgl. S. 514, Anm. [1])):

$$\vdash : a \vee b \,.\, \vee \neg (a \vee b) : \wedge : a \wedge b \,.\, \vee \neg (a \wedge b) : \supset . \, a \vee \neg a \,.\, \wedge \,.\, b \vee \neg b.$$

Die oben aufgezählten Grundsätze des Systemenkalküls sind voneinander nicht unabhängig (so z. B. lässt sich das Postulat $V^{a,b}$ aus den übrigen Sätzen ableiten); ebenso sind die in diesen Sätzen auftretenden Grundbegriffe des Kalküls voneinander nicht unabhängig, d. h. gewisse dieser Begriffe lassen sich durch die übrigen definieren. Indem man die Anzahl der Grundbegriffe reduziert, kann man zugleich eine bedeutende Vereinfachung des Systems der Grundsätze erreichen. Nehmen wir z. B. als Grundbegriffe des Systemenkalküls nur zwei Symbole an: „$\mathfrak{S}$" und das Zeichen der Inklusion „$\subset$" (wir sehen von dem allgemein-logischen Sinne dieses Zeichens ab). Dann können wir die übrigen Termini des betrachteten Kalküls in folgender Weise definieren:

D_1. *Für eine beliebige Klasse $\mathfrak{K}$ von Systemen: $\dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y$ ist das einzige System $X \in \mathfrak{S}$, das die Bedingungen erfüllt: (1) $Y \subset X$ für ein beliebiges $Y \in \mathfrak{K}$; (2) wenn $Z \in \mathfrak{S}$ und $Y \subset Z$ für ein beliebiges $Y \in \mathfrak{K}$, so auch $X \subset Z$.*

D_2. *Für eine beliebige Klasse $\mathfrak{K}$ von Systemen: $\prod\limits_{Y \in \mathfrak{K}} Y = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{L}}} Z$, wobei $\mathfrak{L}$ die Klasse aller Systeme Z ist, die die Bedingung erfüllen: $Z \subset Y$ für ein beliebiges $Y \in \mathfrak{K}$.*

D_3. *Für beliebige Systeme X und Y: $X \dot{+} Y = \dot{\sum\limits_{Z \in \mathfrak{K}}} Z$ und $X \cdot Y = \prod\limits_{Z \in \mathfrak{K}} Z$, wobei $\mathfrak{K} = \{X, Y\}$.*

D_4. $S = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{S}}} Y$, $L = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{S}} Y$.

D_5. *Für ein beliebiges System X: $\overline{X} = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{S} \text{ und } X \cdot Y = L}} Y$.*

Endlich können wir als Definition des Symbols „$\mathfrak{A}$" den Satz 17 annehmen. Es zeigt sich, dass bei Annahme der obigen Definitionen folgende sechs Grundsätze zur Grundlegung des ganzen Systemenkalküls ausreichen: die Postulate I^a, $VIII^a$ und X^a, die in den Sätzen 6 und 9 besprochen wurden, und die Sätze 11, 13 und 19 (das Postulat $VIII^a$ drückt aus, dass es für eine beliebige Klasse $\mathfrak{K}$ von Systemen genau ein System X gibt, das die beiden in der Definition D_1 angegebenen Bedingungen erfüllt).

Es lohnt sich zu erwähnen, dass für den Systemenkalkül auf Grund der Mengenlehre eine Reihe verhältnismässig einfacher Interpretationen gegeben werden kann und zwar auf folgende Weise. Wir betrachten eine beliebige Klasse $\mathfrak{A}$ von Mengen, die folgende Bedingungen erfüllt; (1) $\mathfrak{A}$ ist nichtleer und höchstens abzählbar; (2) $\mathfrak{A}$ ist ein Mengenkörper, d. h. die Formel: $X, Y \in \mathfrak{A}$ zieht immer: $X + Y \in \mathfrak{A}$ und $X - Y \in \mathfrak{A}$ nach sich [1]); (3) wenn $\mathfrak{K}$ eine beliebige Teilklasse von $\mathfrak{A}$ ist und $\sum\limits_{Y \in \mathfrak{A}} Y = \sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}} Y$, so gibt es eine endliche Teilklasse $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}$, so dass $\sum\limits_{Y \in \mathfrak{A}} Y = \sum\limits_{Y \in \mathfrak{L}} Y$. Dann bilden wir die Klasse $\mathfrak{S}$ aller Mengen, die Summen einer beliebigen Anzahl von Mengen der Klasse $\mathfrak{A}$ sind. Der Reihe nach interpretieren wir weitere Termini aus dem Gebiete des Systemenkalküls: den symbolischen Ausdrücken „$X \subset Y$" und „$X \cdot Y$" schreiben wir die gewöhnliche mengentheoretische Bedeutung zu, ebenso betrachten wir die Summen $X \dot{+} Y$ und $\dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y$ als gewöhnliche Summen von Mengen (im Sinne der Mengenlehre), weiter setzen wir: $S = \sum\limits_{Y \in \mathfrak{A}} Y$ und $L = 0$, endlich nehmen wir bei der Interpretation der Symbole „$\prod\limits_{Y \in \mathfrak{K}} Y$" und „$\overline{X}$" (denen man die gewöhnliche Bedeutung nicht zuschreiben kann) die Definitionen D_2 und D_5 zum Vorbild. Es zeigt sich, dass das auf diesem Wege gewonnene System von Begriffen alle Grundsätze des Systemenkalküls erfüllt.

[1]) Vgl. z. B. F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin und Leipzig 1927, S. 78 ff.

Vom Gesichtspunkt der uns interessierenden Probleme aus ist der Umstand, dass der Systemenkalkül innerhalb des Systemenkalküls selbst verschiedenartig interpretiert werden kann, von grosser Bedeutung. Um die entsprechenden Sätze bequem zu formulieren, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Definition 10. ᵃ) *$\mathfrak{S}^X$ ist die Klasse aller Systeme $Y \in \mathfrak{S}$, so dass $Y \subset X$;* ᵇ) *$\mathfrak{S}_X$ ist die Klasse aller Systeme $Y \in \mathfrak{S}$, so dass $X \subset Y$.*

Satz 20. Sei A ein beliebiges deduktives System; sei $\overline{X}^A = A \cdot \overline{X}$ für ein beliebiges System $X \in \mathfrak{S}$; sei endlich $\mathfrak{A}^A$ die Klasse aller Systeme $X \in \mathfrak{S}^A$, so dass $A \subset X \dot{+} \overline{X}$ (und insbesondere sei $\mathfrak{A}^A = \mathfrak{S}^A \cdot \mathfrak{A}$, falls $A \in \mathfrak{A}$). Ersetzen wir überall in den Grundsätzen des Systemenkalküls die Symbole „S", „$\overline{X}$", „$\mathfrak{S}$" und „$\mathfrak{A}$" beziehungsweise durch „A", „$\overline{X}^A$" „$\mathfrak{S}^A$" und „$\mathfrak{A}^A$" und lassen wir die übrigen Symbole unverändert. Dann bleiben alle Grundsätze des Systemenkalküls gültig, mit Ausnahme der Sätze 11 und 13, die (jeder für sich) dann und nur dann erfüllt sind, wenn $A \in \mathfrak{A}$.

Satz 21. Sei B irgendein beliebiges deduktives System; sei weiter $\overline{X}_B = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{S} \text{ und } X \cdot Y \subset B}} Y$ für jedes System $X \in \mathfrak{S}$ (und insbesondere sei $\overline{X}_B = B \dot{+} \overline{X}$, falls $X \in \mathfrak{A}$); sei endlich $\mathfrak{A}_B$ die Klasse aller Systeme von der Gestalt $B \dot{+} Y$, wobei $Y \in \mathfrak{A}$ (und insbesondere sei $\mathfrak{A}_B = \mathfrak{S}_B \cdot \mathfrak{A}$, vorausgesetzt, dass $B \in \mathfrak{A}$). Ersetzen wir in den Grundsätzen des Systemenkalküls überall die Symbole „L", „$\overline{X}$", „$\mathfrak{S}$" und „$\mathfrak{A}$" beziehungsweise durch „B", „$\overline{X}_B$", „$\mathfrak{S}_B$" und „$\mathfrak{A}_B$" und lassen wir die übrigen Symbole unverändert. Dann sind alle Grundsätze des Systemenkalküls erfüllt.

Die angeführten Sätze zeigen, dass sich alle aus den Grundsätzen des Systemenkalküls gewonnenen Ergebnisse relativieren lassen, und zwar nach zwei Richtungen: (1) man kann die Menge S aller sinnvollen Sätzen dadurch einengen, dass man sie durch ein beliebiges axiomatisierbares System A ersetzt und sich dabei auf die Betrachtung derjenigen deduktiven Systeme beschränkt, die in A enthalten sind (wenn es sich um Ergebnisse handelt, die ohne Hilfe der Sätze 11 und 13 bewiesen werden können, so ist die Voraussetzung der Axiomatisierbarkeit des Systems A überflüssig); (2) man kann die Menge L aller logischen Sätze dadurch erweitern, dass man sie durch ein beliebiges deduktives System B ersetzt und sich auf die Betrachtung derjenigen Systeme beschränkt, die das System B umfassen [1]). Man kann freilich jedes Ergebnis der doppelten Relativierung unterwerfen — zuerst in einer Richtung, dann in der zweiten; es ist nicht schwer einen allgemeinen Satz zu formulieren, der die Sätze 20 und 21 als Spezialfälle umfasst und die gleichzeitige Relativierung nach beiden Richtungen ermöglicht.

Alle weiteren Sätze der vorliegenden Mitteilung sind Folgerungen der Grundsätze des Systemenkalküls.

Satz 22. Wenn $X \in \mathfrak{S}$, so ${}^{a)}$ $X = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{S}^X \cdot \mathfrak{A}}} X$ *und* ${}^{b)}$ $\overline{\overline{X}} = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{S}_X \cdot \mathfrak{A}} Y.$

Satz 22ª steht im engen Zusammenhang mit dem Satze 19; im System der Grundsätze des Systemenkalküls könnte man den Satz 19 durch Satz 22ª ersetzen.

Gestützt u. a. auf Satz 22ᵇ können wir eine Reihe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen für jene Systeme aufstellen, die den Satz von der doppelten Negation erfüllen:

Satz 23. Für ein beliebiges System $X \in \mathfrak{S}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (1) $X = \overline{\overline{X}}$; (2) es gibt ein System $Y \in \mathfrak{S}$, so dass $X = \overline{Y}$; (3) die Formel: $\overline{X} \subset Y$ zieht für jedes System $Y \in \mathfrak{S}$ die Formel: $\overline{Y} \subset X$ nach sich; (4) die Formel: $\overline{X} \subset \overline{Y}$ zieht für jedes System $Y \in \mathfrak{S}$ die Formel: $Y \subset X$ nach sich; (5) $X = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{S}_X \cdot \mathfrak{A}} Y$; (6) es gibt eine Klasse $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{A}$, so dass $X = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{K}} Y$.

[1]) Vgl. ein analoges Ergebnis in T_2, S. 368 f., Satz I. 6 und die anschliessenden Bemerkungen.

Folglich sind die Systeme, die den Satz von der doppelten Negation erfüllen, dasselbe was die Durchschnitte der axiomatisierbaren Systeme.

In Satz 17 erkannten wir bereits eine charakteristische Eigenschaft der axiomatisierbaren Systeme, die ganz in Termen des Systemenkalküls formuliert war; nun werden zwei andere Eigenschaften dieser Art angegeben:

Satz 24. Für ein beliebiges System $X \in \mathfrak{S}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (1) $X \in \mathfrak{A}$, (2) jede Klasse $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ befriedigt die Formel: $X \dot{+} \prod\limits_{Y \in \mathfrak{K}} Y = \prod\limits_{Y \in \mathfrak{K}} (X \dot{+} Y)$; (3) für jede Klasse $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$ zieht die Formel: $X = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y$ die Existenz einer endlichen Klasse $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{K}$ nach sich, so dass $X = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{L}}} Y$.

In der Bedingung (3) dieses Satzes könnten beide Gleichheitszeichen durch Inklusionszeichen ersetzt werden.

Die nichtaxiomatisierbaren Systeme lassen sich in folgender Weise charakterisieren:

Satz 25. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: (1) $X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$; (2) es gibt eine unendliche Klasse $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{S}$, so dass $X = \dot{\sum\limits_{Y \in \mathfrak{K}}} Y$, wobei $Y \neq L$ für ein beliebiges $Y \in \mathfrak{K}$ sowie $Y \cdot Z = L$ für zwei beliebige verschiedene Systeme $Y, Z \in \mathfrak{K}$; (3) es gibt eine unendliche Folge von Systemen $Y_n \in \mathfrak{S}$, so dass $X = Y_1 \dot{+} Y_2 \dot{+} \ldots \dot{+} Y_n \dot{+} \ldots$ wobei $Y_n \subset Y_{n+1}$ sowie $Y_n \neq Y_{n+1}$ für ein beliebiges natürliches n. Man kann überdies in den Bedingungen (2) und (3) annehmen, dass alle Systeme der Klasse $\mathfrak{K}$, bzw. der Folge Y_n axiomatisierbar sind.

Die nichtaxiomatisierbaren Systeme sind also Summen unendlicher Klassen von logisch fremden Systemen oder auch Summen unendlicher Reihen von (in strengem Sinne) wachsenden Systemen.

Übersetzen wir die Bedingung (2) des obigen Satzes in die Sprache des Algorithmus der Aussagen (indem wir vorher „$\mathfrak{S}$" durch „$\mathfrak{A}$" ersetzen) so kommen wir zum Ergebnis, dass man für jedes System $X \in \mathfrak{S}$ eine Menge $Y \subset X$ aufbauen kann, derart dass (α) $X = Fl(Y)$, (β) $Y \cdot L = 0$ sowie (γ) $x + y \in L$ für beliebige

$x, y \in Y$ (oder, was auf dasselbe hinauskommt, (β') wenn $x, y \in Y$, $x \supset z$ und $y \supset z$, so $z \in L$); wenn überdies $X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$, so ($\delta$) ist die Menge Y unendlich. Die Bedingungen (β) und (γ) drücken aus, dass Y eine Menge von maximal unabhängigen Aussagen im Sinne Sheffer's ist; es ergibt sich daraus a fortiori, dass Y eine Menge von unabhängigen Aussagen im üblichen Sinne und demnach eine Basis des Systems X ist [1]).

In analoger Weise schliessen wir leicht aus der Bedingung (3) des Satzes 25 oder auch auf unmittelbarem Wege, dass jedem System $X \in \mathfrak{S}$ eine unendliche Folge von Aussagen $y_n \in X$ zugeordnet werden kann, die die Bedingungen erfüllen: (α) für jede Aussage $x \in X$ gibt es ein Glied der Folge y_n, so dass $y_n \supset x$ (wenn also Y die Menge aller Glieder der Folge ist, so gilt $Fl(Y) = X$); (β) $y_{n+1} \supset y_n$ für ein beliebiges natürliches n; wenn überdies $X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{A}$, so ($\gamma$) gilt die Formel: $y_n \equiv y_{n+1}$ für kein natürliches n. Die Folge von Aussagen, die die Bedingung (β) erfüllen, könnte man Folge von logisch wachsenden Aussagen nennen; wenn überdies die Bedingung (γ) erfüllt ist, so sprechen wir von einer Folge von in strengem Sinne wachsenden Aussagen.

Unter dem logischen Produkt einer unendlichen Folge von Aussagen y_n verstehen wir eine Aussage x, derart dass (α) $x \supset y_n$ für jedes natürliche n und (β) wenn z eine beliebige Aussage ist, so dass $z \supset y_n$ für jedes natürliche n, dann auch $z \supset x$ (es können viele solche Aussagen x vorhanden sein, doch sind sie alle untereinander äquivalent); in analoger Weise definieren wir das logische Produkt einer beliebigen Aussagenmenge X. Es scheint natürlich zu sein, die Folge von wachsenden Aussagen y_n dann konvergent zu nennen, wenn es ein logisches Produkt dieser Folge gibt; da ein solches logisches Produkt zugleich Produkt des ganzen Systems X ist, dem die betrachtete Folge zugeordnet wurde, so werden wir in analoger Weise auch das System X selbst konvergent nennen. Falls das logische Produkt x des Systems X selbst diesem System angehört, gilt, wie man leicht einsieht, die Formel: $X = Fl(\{x\})$, und das System X ist schlechthin axiomatisierbar.

[1]) Vgl. hier H. M. Sheffer, *The general theory of notational relativity.* Cambridge Mass. 1921 (herausgegeben als Manuskript), S. 32; zum Begriff der Basis vgl. T_1, S. 27 f., Def. 7 und Satz 17*; T_2, S. 386 f., insbesondere Def. I. 5.

Die Klasse der konvergenten Systeme werden wir mit dem Symbol „$\mathfrak{C}$" bezeichnen; indem wir die Definition der Konvergenz in die Sprache des Systemenkalküls übersetzen, erhalten wir:

Definition 11. $X \in \mathfrak{C}$ dann und nur dann, wenn $X \in \mathfrak{S}$ und $\prod_{Y \in \mathfrak{S}_X \cdot \mathfrak{A}}$ *$Y \in \mathfrak{A}$, m. a. W. wenn es ein System Y gibt, so dass (1) $Y \in \mathfrak{A}$ und $X \subset Y$, sowie (2) für ein beliebiges System Z die Formeln $Z \in \mathfrak{A}$ und $X \subset Z$ immer: $Y \subset Z$ nach sich ziehen.*

Wir kennen verschiedene Umformungen dieser Definition:

Satz 26. Für ein beliebiges System $X \in \mathfrak{S}$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (1) $X \in \mathfrak{C}$, (2) $\overline{X} \in \mathfrak{A}$, (3) $\overline{\overline{X}} \in \mathfrak{A}$, (4) $\overline{X} \dot{+} \overline{\overline{X}} = S$; (5) $\overline{\overline{X \cdot Y}} = \overline{\overline{X}} \dot{+} \overline{\overline{Y}}$ *für jedes System* $Y \in \mathfrak{S}$; (6) $\overline{\overline{X \dot{+} Y}} = \overline{\overline{X}} \dot{+} \overline{\overline{Y}}$ *für jedes System* $Y \in \mathfrak{S}$.

Also könnte man die konvergenten Systeme am einfachsten als solche Systeme kennzeichnen, deren logische Komplemente axiomatisierbar sind und die darum den Satz vom ausgeschlossenen Dritten in der abgeschwächten Formulierung erfüllen: $\overline{X} \dot{+} \overline{\overline{X}} = S$.

Aus den Sätzen 23, 24 und 26 folgt, dass manche Sätze des Klassenkalküls, die im Systemenkalkül nicht allgemeingültig sind, ihre Geltung dann wiedererlangen, wenn wir mindestens von einem der Systeme, auf die sich diese Sätze beziehen, voraussetzen, dass es axiomatisierbar ist (z. B. die Sätze der Transposition, der Satz der Distributivität gegen die unendliche Multiplikation), oder auch nur, dass es konvergent ist (der Satz von De Morgan).

Als Beispiele anderer Sätze, die sich auf die konvergenten Systeme beziehen, geben wir an:

Satz 27. $^{a)}$ $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{C}$; $^{b)}$ *$X \in \mathfrak{C}$ dann und nur dann, wenn $X \in \mathfrak{S}$ und $\overline{X} \in \mathfrak{C}$;* $^{c)}$ *wenn $X, Y \in \mathfrak{C}$, so $X \dot{+} Y \in \mathfrak{C}$ und $X \cdot Y \in \mathfrak{C}$.*

Satz 28. Wenn $X, Y \in \mathfrak{S}$, $X \dot{+} Y \in \mathfrak{A}$ und $X \cdot Y \in \mathfrak{C}$, so $X, Y \in \mathfrak{C}$.

In diesem Satz, der das Korrelat des Satzes 18 ist, kann man „$\mathfrak{A}$" nicht durch „$\mathfrak{C}$" ersetzen.

Es erhebt sich die Frage, ob es überhaupt konvergente nichtaxiomatisierbare Systeme gibt, m. a. W. ob es nichtaxiomatisierbare Systeme gibt, deren Komplemente axiomatisierbar sind. Wir werden später sehen (im Satze 38), dass die Antwort positiv ist, falls es nur überhaupt nichtaxiomatisierbare Systeme gibt, d. i. falls die Klasse $\mathfrak{S}$ unendlich ist; andrerseits wird sich zeigen, dass es unter derselben Voraussetzung auch nichtkonvergente Systeme gibt. Wir haben also drei Klassen von Systemen: (1) axiomatisierbare Systeme, die einzelnen Aussagen zugeordnet sind; (2) nichtaxiomatisierbare konvergente Systeme, die konvergenten unendlichen Folgen von (in strengem Sinne) wachsenden Aussagen entsprechen, und endlich (3) divergente Systeme, die unendlichen divergenten Folgen entsprechen. Die Systeme der ersten beiden Klassen haben im allgemeinen einander ähnliche Eigenschaften; einer der wesentlichen Unterschiede besteht darin, dass kein System der zweiten Klasse den Satz von der doppelten Negation erfüllt.

Non-separable metric spaces.

By

Deane Montgomery*) (Princeton).

Separability is a property which greatly facilitates work in metric spaces, but it may be of some interest to point out that this property has been unnecessarily assumed in the proofs of certain theorems concerning such spaces and concerning functions defined on them. In particular it may be shown that if a subset of an arbitrary metric space is analytic at each of its points, it is an analytic set in the space. This problem was mentioned recently by Sierpiński in his discussion of locally separable spaces [1]). It is known that a function $f(x, y)$ continuous in x and of class α in y is of class $\alpha+1$ in (x, y) under certain restrictions on the spaces in question. Kuratowski [2]) has asked whether or not this theorem remains true when x and y range over non-separable metric spaces. It is shown in this note that the theorem does remain true in this case. The proofs rest on simple lemmas which for some purposes replace the classical theorem, true only in separable spaces, that a decreasing series of closed or open sets is enumerable.

1. The fundamental space to be considered here will be denoted by M; it is subject to no conditions except that it be metric unless otherwise specified.

Lemma 1. *If*

(1) $$O^1,\ O^2, \ldots,\ O^\lambda,\ O^{\lambda+1}, \ldots$$

*) National Research Fellow.

[1]) *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 21 (1933) p. 112, problem of Banach.

[2]) Kuratowski, *Topologie I* (Monografje Matematyczne t. III, Warszawa-Lwów, 1933) p. 181 (footnote).