

Hence by (22) and (21),

$$\frac{F(\xi + \theta h) - F(\xi - \theta h)}{2\theta h} > F_a(\xi).$$

By the equation which follows (22), we infer

$$F_a(\xi + \theta \theta' h) + F_a(\xi - \theta \theta' h) - 2F_a(\xi) > 0.$$

which implies $\bar{D}^2 F_a(\xi) \geq 0$.

Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I. Variables indépendantes ¹⁾.

Par

Z. Łomnicki et S. Ulam (Lwów).

L'analogie entre la mesure et la probabilité est connue depuis longtemps ²⁾.

La probabilité pour qu'un point appartienne à un ensemble A d'un espace donné remplit les postulats de la mesure d'ensemble. On admet notamment la règle des probabilités totales — c.-à-d. l'additivité finie ou dénombrable de la mesure. (Dans le cas où l'espace est dénombrable le postulat de l'additivité finie est souvent plus adéquat).

La théorie de la mesure pour un espace constitue cependant une théorie d'une seule variable éventuelle et ne semble pas donner un

¹⁾ Les résultats concernant la théorie de la mesure dans les produits ont été exposés par les auteurs dans un Séminaire de M. H. Steinhaus (Mai 1932). Les théorèmes relatifs ont été présentés à la séance de la Soc. Pol. Math. Section de Lwów du 2. VII. 1932 (v. aussi la note de l'un de nous insérée dans les „Verhandl. des Int. Math. Kongr. Zürich“ 1932, Band II). Les applications au calcul des probabilités qui se trouvent dans la deuxième partie de ce travail ont été présentées à la séance de la Soc. Pol. Math. Section de Lwów le 18. III. 1933.

²⁾ E. Borel, *Sur les probabilités dénombrables...* Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1909, p. 247—281. — A. Łomnicki, *Nouveaux fondements du calcul des probabilités*. Fund. Math. T. IV, p. 35—71. — H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*. Fund. Math. T. IV, p. 287—310. — R. v. Mises, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Math. Zeit. Bd. 34, p. 568—619. — P. Lévy, *Calcul des probabilités*. Note (p. 325—345) Gauthier-Villars, Paris. — Cf. aussi une étude approfondie chez A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* dans les *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Berlin 1933.

schéma mathématique assez général pour traiter la très grande variété des problèmes du calcul des probabilités. La règle des probabilités composées déjà ne se laisse pas interpréter à l'aide de la mesure dans un seul espace. En traitant des couples (x, y) d'événements on considère le produit³⁾ combinatoire (ou cartésien) $X \times Y$ de deux espaces X, Y de ces événements⁴⁾ et la probabilité c.-à-d. la mesure dans ce produit.

Si l'on admet que le but d'une théorie des probabilités est de calculer à l'aide des probabilités connues des probabilités nouvelles, on doit pour le traitement méthodique des probabilités composées montrer comment on peut définir une mesure pour l'ensemble-produit en partant de la mesure dans les espaces composants. On doit déterminer, en particulier, dans le produit tous ces ensembles pour lesquels la mesure est définie d'une manière univoque par la règle des probabilités composées.

On doit montrer aussi, ce qui est important, que cette règle ne conduit pas à une contradiction, même dans les cas les plus généraux. L'existence de la mesure dans les produits (finis ou infinis) n'est, dans le cas général, nullement évidente *à priori*. Si l'on admet en particulier que la mesure donnée dans les espaces X, Y n'est pas complètement additive (l'additivité finie étant, bien entendu, admise) le problème de la détermination d'une mesure univoque pour le produit $X \times Y$ n'est pas encore résolu (Voir th. 4, Remarque).

Il est nécessaire de considérer des espaces très généraux. Dans les problèmes du calcul des probabilités on ne peut pas admettre *à priori* que tous les espaces d'événements possèdent quelques propriétés topologiques communes ou propriétés du groupe. On considère dans le calcul des probabilités des espaces très différents: p. ex. les ensembles finis dans le cas des problèmes élémentaires, l'ensemble des nombres entiers dans les problèmes „dénombrables“ (au sens de M. Borel)⁴⁾, les espaces géométriques d'une nature souvent très compliquée dans la théorie des probabilités continues⁵⁾. Enfin,

³⁾ La définition des produits est donnée dans le N° 2.

⁴⁾ Cf. l'opération de la „Verbindung“ de M. R. v. Mises, *Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik*. Bd. I. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Berlin 1931.

⁵⁾ Cf. l. c. ²⁾.

⁶⁾ *Traité du Calcul des probabilités et ses Applications* de M. Borel. T. II, fascicule 2: R. Deltheil, *Probabilités géométriques*.

on considère les espaces à une infinité de dimensions dans le cas des „lois limites“⁶⁾.

Les difficultés principales qui se présentent lorsqu'on veut définir un schéma mathématique général pour la théorie des probabilités proviennent du fait, qu'il est insuffisant de considérer un seul espace. Il faut plutôt établir une mesure pour une *classe d'espaces*. On obtient ces espaces des espaces à mesure donnée par quelques opérations combinatoires simples.

Nous avons insisté sur le rôle du produit de deux (ou d'un nombre fini quelconque) d'espaces. Or, il est nécessaire d'étudier aussi les produits infinis

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times \dots$$

d'une suite d'espaces $\{X_n\}$ ⁷⁾. Ces produits s'imposent d'une façon naturelle lorsqu'on étudie des probabilités des faits qui consistent en une réalisation simultanée d'une suite infinie d'événements (p. ex. la convergence d'une série à termes variables). L'étude de la mesure pour de tels produits permet d'opérer avec des probabilités des tels faits, au lieu de considérer des limites d'expressions qui, *à priori* au moins, ne semblent être choisies que d'une manière dans un certain degré arbitraire.

On obtient aussi à l'aide d'une telle mesure des énoncés plus intuitifs et précis des différentes „lois des grands nombres“.

Pour le cas général des variables éventuelles *dépendantes* il faut introduire des nouvelles opérations combinatoires⁸⁾.

Dans ce travail nous étudions la mesure dans le produit pour le cas des variables indépendantes. Cette mesure remplit un postulat qui exprime la règle des probabilités composées. La mesure dans l'espace $X \times Y$ est assujettie à la condition suivante: Si un ensemble $C \subset X \times Y$ est de la forme $C = A \times B$ (où $A \subset X$ et $B \subset Y$) alors $m_{X \times Y}(C) = m_X(A) \cdot m_Y(B)$ ^{9a)} ^{9b)}.

La mesure dans les produits correspondant au cas des chaînes de Markoff sera étudiée dans une note prochaine.

⁶⁾ H. Steinhaus, *Sur la probabilité de la convergence des séries*, *Studia Mat.* T. H. 1930.

⁷⁾ La définition du produit infini est donnée dans le texte p. 242.

⁸⁾ P. ex. dans l'étude du problème de la „probabilité des causes“ on doit introduire, dans le cas général, l'espace des toutes les mesures dans un espace donné.

^{9a)} Cf. A. Lomnicki, l. c. ²⁾, p. 43, cond. IV.

^{9b)} Nous désignerons dans le texte la mesure toujours par le signe m même s'il s'agit des mesures dans des espaces différents.

Dans la première partie de ce travail nous démontrons les théorèmes sur l'existence de la mesure (multiplicative) dans les produits. Dans la deuxième nous montrons sur quelques exemples le rôle de la notion des produits dans le calcul des probabilités, ensuite, en nous servant des théorèmes sur la mesure nous donnons des énoncés uniformes des théorèmes fondamentaux de la théorie des variables éventuelles indépendantes⁹⁾.

I.

1. Les axiomes de la mesure pour une variable éventuelle¹⁰⁾.

Soit E une ensemble abstrait. Nous supposons que dans l'ensemble E , pour une classe \mathfrak{M} de sous-ensembles, est définie une fonction d'ensemble $m(X)$, appelée mesure de X admettant comme valeurs des nombres réels. (Cette fonction peut être interprétée comme probabilité pour qu'un élément x , pris au hasard, appartienne à l'ensemble donné X)

Supposons que les conditions suivantes sont remplies par la classe \mathfrak{M} des ensembles mesurables:

(I) L'espace total est mesurable, ainsi que les ensembles composés d'un seul point: $E \in \mathfrak{M}$; $\{x\} \in \mathfrak{M}$

(II) Si $X \in \mathfrak{M}$ et $Y \in \mathfrak{M}$, alors $(X - Y) \in \mathfrak{M}$

(III) $X_i \in \mathfrak{M}$ ($i = 1, 2, \dots$), alors $\sum_{i=1}^{\infty} X_i \in \mathfrak{M}$

(IV) Si $Z \subset X$, $X \in \mathfrak{M}$ et $m(X) = 0$, alors $Z \in \mathfrak{M}$.

Nous supposons que la fonction $m(X)$ remplit les postulats:

$$(1) \quad m(X) \geq 0, \quad m(E) = 1$$

$$(2) \quad m\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(X_i) \text{ si } X_i X_j = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Remarques. La condition (2) exprime „l'additivité complète (dénombrable)” de la mesure. Ce postulat est indispensable dans beaucoup de problèmes dans le calcul des probabilités, même dans les problèmes élémentaires du calcul des pro-

⁹⁾ Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux théorèmes du calcul des probabilités peut omettre les démonstrations des théorèmes de la partie première. La connaissance de la notion et des propriétés les plus élémentaires des produits et de ces théorèmes est suffisante.

¹⁰⁾ Kolmogoroff, op. cit., Ch. I.

habilités il est nécessaire de l'utiliser p. ex. pour une solution rigoureuse du problème de la „ruine des joueurs” (v. les exemples dans la partie II-ème).

Observons que nos postulats dans le cas où E est l'espace euclidien, si l'on ajoute encore la condition que pour un cube euclidien C , $m(C)$ soit égal au volume de C dans le sens élémentaire, entraînent déjà, que $m(X)$ est identique avec la mesure de Lebesgue; la classe \mathfrak{M} se confond avec la classe des ensembles mesurables (L).

Comme on le sait, dans le cas de la mesure de Lebesgue on postule outre les axiomes (I)–(IV) et (1), (2), l'axiome (C): Si X et Y sont congruents dans le sens de la géométrie élémentaire $m(X) = m(Y)$. Une telle mesure ne se laisse pas définir pour tous les sous-ensembles de l'espace (théorème de Vitali). On peut cependant montrer qu'une mesure qui remplit nos postulats seulement ne se laisse non plus définir pour tous les sous-ensembles de $E^{(1)}$. Il est donc nécessaire de parler de la classe des ensembles mesurables.

Parallèlement à la mesure qui remplit les postulats (I)–(IV) et (1), (2) il est nécessaire d'étudier dans le calcul des probabilités une mesure qui remplit au lieu des postulats (III), (2) les postulats suivants moins restrictifs:

(III'). Si $X_i \in \mathfrak{M}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), on a $\sum_{i=1}^n X_i \in \mathfrak{M}$

$$(2') \quad m\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n m(X_i) \text{ si } X_i \cdot X_j = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Cela est nécessaire surtout dans les problèmes „dénombrables” du calcul des probabilités. Si E est l'ensemble des nombres entiers on ne peut pas évidemment définir pour des sous-ensembles de E une mesure qui remplirait les postulats (III), (2) d'une manière naturelle c.-à-d. de telle façon que la probabilité d'un ensemble composé d'un seul nombre soit égale à 0. Une telle mesure cependant peut être définie même pour tous les sous-ensembles de E , les axiomes (III') et (2') étant remplis.

Dans l'espace E à mesure donnée on peut définir d'une manière connue les intégrales des fonctions définies sur E et ayant pour valeur des nombres réels (ou plus généralement, des éléments d'un espace vectoriel), prises sur des sous-ensembles mesurables¹²⁾. A l'aide de l'intégration de Stieltjes on peut définir, dans le cas où l'espace E se compose de nombres réels (ou de points d'un

¹¹⁾ V. S. Ulam, *Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. T. XVI (1930).

¹²⁾ Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait*, Bull. Soc. Math. France, Bd. 43 (1915), S. 248.

espace vectoriel), l'espérance mathématique de E^{13}) et les notions dérivées, qui jouent un grand rôle dans le calcul des probabilités, p. ex. les moments de n -ième ordre de la variable éventuelle.

L'étude de toutes ces notions concernant une seule variable éventuelle n'est pas encore, comme le remarque M. Kolmogoroff¹³⁾, caractéristique pour le schéma mathématique du calcul des probabilités qui s'occupe des relations entre les mesures d'une classe d'espaces. Si l'on étudie l'ensemble de plusieurs variables éventuelles on a affaire au produit $\mathfrak{P} E_\nu = E_1 \times E_2 \dots$ (v. les exemples dans la partie II-ième). Pour notre travail nous allons rappeler les définitions et quelques propriétés combinatoires de cette opération fondamentale.

2. L'opération du produit.

Nous entendons par produit (ou produit cartésien) de deux ensembles E_1 et E_2 l'ensemble de couples ordonnés (e_1, e_2) où $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$. D'une manière analogue, pour une suite (finie ou infinie) d'ensembles $\{E_i\}$, nous entendons par leur produit l'ensemble des suites d'éléments $\{e_i\}$ qui appartiennent aux ensembles respectifs E_i . Ce produit sera désigné par

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \mathfrak{P}_{\nu=1}^n E_\nu$$

ou

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_i \times \dots = \mathfrak{P}_{\nu=1}^\infty E_\nu.$$

On prouve sans difficulté les formules suivantes concernant les propriétés algèbro-logiques de l'opération du produit¹⁴⁾:

$$1. (A + B) \times (C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D$$

et plus généralement:

$$2. (\sum_\nu A_\nu) \times (\sum_\mu B_\mu) = \sum_{\nu, \mu} A_\nu \times B_\mu$$

$$3. (A \cdot C) \times (B \cdot D) = (A \times B) \cdot (C \times D)$$

¹³⁾ Kolmogoroff, cf. l. c. ¹⁰⁾, ch. IV.

¹⁴⁾ Kolmogoroff, cf. l. c. ¹⁰⁾, p. 8.

¹⁵⁾ Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa—Lwów 1933.

et plus généralement:

$$4. (\prod_\nu A_\nu) \times (\prod_\mu B_\mu) = \prod_{\nu, \mu} (A_\nu \times B_\mu)$$

$$5. \prod_i \mathfrak{P}_\nu A_{i, \nu} = \mathfrak{P}_\nu \prod_i A_{i, \nu}.$$

Si A est un sous-ensemble de l'espace X et B en est un de l'espace Y (ou plus généralement si $A_i \subset X_i$) on a les formules:

$$6. C(A \times B) = CA \times Y + X \times CB^{16)}$$

$$7. C(\mathfrak{P}_\nu A_\nu) = \sum_\nu D_\nu \text{ où } D_i = X_1 \times X_2 \dots \times X_{i-1} \times (X_i - A_i) \times X_{i+1} \dots$$

Par $E[\varphi(x)]$ nous désignons l'ensemble des x qui satisfont à la condition φ exprimée entre parenthèses.

Si l'on a affaire à une condition (propriété) $\varphi(x_1, \dots, x_n, \dots)$ concernant un système de variables on peut regarder φ comme une condition pour une variable $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ qui parcourt le produit $\mathfrak{P}_\nu X_\nu$, où x_i sont les éléments de X_i .

Le symbole $E[]$ (fréquemment employé dans la deuxième partie de notre travail) désigne alors l'ensemble correspondant des x du produit. Les règles du calcul avec le symbole E et sa relation avec les opérateurs de la théorie des ensembles et avec l'opération du produit sont exposées d'une manière très claire et concise dans le livre de M. Kuratowski¹⁷⁾.

Dans les applications, il est important de savoir que, f étant une fonction réelle mesurable, l'ensemble des x pour lesquels on a: $a \leq f(x) \leq b$ est mesurable.

3. Mesure complètement additive dans les produits finis.

Si les E_i désignent des espaces topologiques (c. à d. si dans E_i est définie la notion de la limite d'une suite de points), on peut définir une limite dans $\mathfrak{P}_{\nu=1}^n E_\nu$ de manière que cet ensemble devienne un espace topologique. Pareillement, si les E_i sont des groupes abstraits on peut définir une composition des systèmes d'éléments de telle façon que $\mathfrak{P}_{\nu=1}^n E_\nu$ devient un groupe. Ici, nous supposons

¹⁶⁾ CA désigne le complémentaire (relativement à l'espace) de l'ensemble A .

¹⁷⁾ Kuratowski, l. c. ¹⁵⁾. Introduction, § 1. Opération de la logique et de la théorie des ensembles, § 2. Produit cartésien, § 3. Fonctions.

qu'on a défini dans E_i une mesure (dans le sens du N° 1.) et nous allons construire une mesure dans $\prod_{v=1}^n E_v$.

D'une manière plus précise, soient E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) les espaces à mesure donnée, \mathfrak{M}_i la classe des ensembles mesurables dans E_i , $E = \prod_{v=1}^n E_v$ leur produit. Notre but est de définir une mesure pour une classe \mathfrak{M} de sous-ensembles de E de façon que les conditions suivantes soient remplies:

(I)–(IV); (1), (2) du N° 1 et

(V) Si $X_i \in \mathfrak{M}_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, l'ensemble $\prod_{v=1}^n X_v \in \mathfrak{M}$.

La condition (V) exprime le postulat que l'existence des probabilités de faits A et B entraîne l'existence d'une probabilité pour la réalisation de A et B .

D'après (V) on obtient la mesurabilité dans E d'ensembles d'une nature assez spéciale: des produits d'ensembles mesurables. Mais à l'aide des postulats (I)–(IV) on obtient de (V) la mesurabilité d'une classe très étendue d'ensembles.

Par exemple si E_1 et E_2 sont identiques à l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ et la mesure donnée est identique à celle de Lebesgue — les postulats (I)–(V) entraînent déjà que dans $E_1 \times E_2$ (c. à d. dans le carré) la classe \mathfrak{M} contient tous les ensembles pour lesquels existe la mesure plane de Lebesgue.

La mesure dans E doit remplir le postulat: si $X_j \subset E_j$, (pour $j = 1, 2, \dots, k$), les autres composantes X_i du produit étant égales aux espaces entiers E_i , on a: $m(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) = m(X_1) \cdot m(X_2) \cdot \dots \cdot m(X_k)$.

Cette égalité exprime pour $n = 2$ le fait que la probabilité d'un système composé de l'événement A et d'un événement qui doit se produire nécessairement est la même que la probabilité de l'événement A seul. (Observons qu'il n'en résulte pas encore que le système composé d'un événement A et d'un événement de probabilité 1 a la même probabilité que A).

Dans ce travail nous nous occupons de variables indépendantes. L'indépendance s'exprime par le postulat

$$(3) \quad m(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) = m(X_1) \cdot m(X_2) \cdot \dots \cdot m(X_n).$$

Nous allons prouver le

Théorème 1.¹⁸⁾ Soient E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) des espaces à mesure donnée remplissant les conditions (I)–(IV) et (1), (2). Il existe une mesure dans $E = \prod_{v=1}^n E_v$ remplissant les conditions (I)–(V) et (1)–(3).

On peut évidemment sans diminuer la généralité supposer que $n = 2$, c. à d. qu'il s'agit d'un produit de deux espaces, le cas général se laissant réduire à celui-ci par induction.

Nous allons prouver deux lemmes qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration.

Lemme 1.¹⁹⁾ Soient E_1 et E_2 des espaces à mesure donnée. Pour les ensembles C dans le produit $E_1 \times E_2$ de la forme $A \times B$ où $A \subset E_1$, $B \subset E_2$ (A et B mesurables) posons $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$.

Soit $C = A \times B = \sum_{v=1}^m A_v \times B_v$ une décomposition de l'ensemble C en un nombre fini d'ensembles-produits, et $(A_i \times B_j) : (A_j \times B_i) = 0$ pour $i \neq j$, alors

$$m(C) = m(A) \cdot m(B) = \sum_{v=1}^m m(A_v) \cdot m(B_v).$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= A_1 - \sum_{v=1}^{m'} A_v \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{A}_m &= A_m - \sum_{v=1}^{m'} A_v \end{aligned}$$

¹⁸⁾ Une démonstration très élégante de ce théorème a été donnée par M. S. Saks dans son livre „*Théorie de l'intégrale*“, Annexe, Warszawa 1934. La démonstration que nous reproduisons étant d'un caractère plus élémentaire et utilisant seulement les mesures des ensembles peut être traduite en langage du calcul élémentaire des probabilités.

¹⁹⁾ Dans la théorie de la mesure n -dimensionnelle de Lebesgue on utilise pour la démonstration du théorème analogue au th. 1 le théorème connu de Heine-Borel, qui dans notre cas (des espaces abstraits) ne peut pas être formulé. Les lemmes 1. et 2. nous rendent les mêmes services.

Il suffit de prouver que cette inégalité est remplie pour tout N :

$$\sum_{\nu=1}^N m(A_\nu) \cdot m(B_\nu) \leq m(A) \cdot m(B).$$

C'est une conséquence simple du lemme 1. On doit dans ce but compléter l'ensemble $\sum_{\nu=1}^N A_\nu \times B_\nu$ par une somme finie des ensembles produits au produit $A \times B$. On est alors dans le cas du lemme 1 et en tenant compte du fait que la mesure est non négative, on obtient l'inégalité demandée.

Pour prouver que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu) \cdot m(B_\nu) \geq m(A) \cdot m(B)$$

nous allons décomposer l'ensemble $A = \sum \bar{A}_\nu$ comme dans la dém. du lemme 1. Soit $\{k_i\}$ un système (fini ou infini) de nombres naturels. Soit $\bar{A}_{\{k_i\}}$ l'ensemble de tous les points de A qui appartiennent aux ensembles $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_i}, \dots$ et à aucun autre ensemble. En général on obtient de telle façon une décomposition de A en un continu d'ensembles disjoints.

Soit $\{k_i\}$ une suite donnée. Les ensembles $B_{k_1}, B_{k_2}, \dots, B_{k_i}, \dots$ sont disjoints. Si, en effet, il existait un point b tel que $b \in B_{k_i}, b \in B_{k_j} (i \neq j)$, on déduirait du fait que l'ensemble $A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_i}, \dots, A_{k_j}, \dots$ est non-vide l'existence d'un couple (a, b) qui appartiendrait aux ensembles $A_{k_1} \times B_{k_1}$ et $A_{k_j} \times B_{k_j}$, contrairement à notre hypothèse.

On a $\sum_{\nu=1}^{\infty} B_{k_\nu} = B$. En effet, si le point $b \in B$ n'appartenait à aucun B_{k_i} , on choisirait le point a de l'ensemble $A_{\{k_i\}}$ et le couple (a, b) ne serait contenu dans aucun ensemble $A_i \times B_i$, contrairement à l'hypothèse.

La mesure dans les espaces E_1 et E_2 est complètement additive. On peut donc trouver pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite $\{k_i\}$ donnée un indice $N\{k_i\}$ tel qu'on ait

$$\sum_{\nu=1}^{N\{k_i\}} m(B_{k_\nu}) = m\left(\sum_{\nu=1}^{N\{k_i\}} B_{k_\nu}\right) > m(B) - \frac{\varepsilon}{m(A)}.$$

Soit $N\{k_i\}$ le plus petit nombre jouissant de cette propriété.

Au lieu de la classe des suites infinies $\{k_i\} = (k_1, k_2, \dots, k_i, \dots)$, qui est en général de la puissance du continu, considérons la classe au plus dénombrable des suites finies, obtenues de la précédente en remplaçant toute suite infinie par la suite correspondante finie $\{l_i\} = (k_1, k_2, \dots, k_{N\{k_i\}})$.

A toute suite $\{l_i\}$ de cette classe correspond un ensemble $A_{\{l_i\}}^*$ qui est, par définition, la somme des ensembles $\bar{A}_{\{k_i\}}$ dont les suites donnent par notre procédé la suite $\{l_i\}$. Observons que l'ensemble A est de la forme $A = \sum_{\{l_i\}} A_{\{l_i\}}^*$, les ensembles $A_{\{l_i\}}^*$, comme il est facile de voir, étant disjoints.

Désignons par A_μ^* ($\mu = 1, 2, \dots$) tous les ensembles $A_{\{l_i\}}^*$ dans la suite caractéristique desquels figure l'indice s . On voit que $\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^* \subset A_s$, c. à d. que $m(A_s) \geq m(\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^*)$.

Nous avons donc

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu) \cdot m(B_\nu) \geq \sum_{\nu=1}^{\infty} m\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu^* \cdot m(B_\nu)\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} m(A_\mu^*) \cdot m(B_\nu),$$

la dernière égalité résultant de l'additivité complète de la mesure dans les espaces E_1 et E_2 .

En rangeant la dernière somme suivant les ensembles A_μ^* , c. à d. $A_{\{l_i\}}^*$, on obtient

$$\sum_{\{l_i\}} m(A_{\{l_i\}}^*) \cdot m\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu^{\{l_i\}}\right),$$

où $\{B_\nu^{\{l_i\}}\}$ est la suite des ensembles dans la somme double qui sont multipliés par $A_{\{l_i\}}^*$.

L'ensemble $\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu^{\{l_i\}}$ qui appartient à l'ensemble $A_{\{l_i\}}^*$ est égal à l'ensemble $\sum_{i=1}^{N\{k_i\}} B_{k_i}$. On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu) \cdot m(B_\nu) &\geq \sum_{\{l_i\}} m(A_{\{l_i\}}^*) \cdot m\left(\sum_{i=1}^{N\{k_i\}} B_{k_i}\right) \geq \\ &\geq \sum_{\{l_i\}} m(A_{\{l_i\}}^*) \cdot \left(m(B) - \frac{\varepsilon}{m(A)}\right) = m(A) \cdot \left(m(B) - \frac{\varepsilon}{m(A)}\right) = \\ &= m(A) \cdot m(B) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Démonstration du th. 1.

Soit $Z \subset E = E_1 \times E_2$ un ensemble-produit, c. à d. $Z = A \times B$ où $A \subset E_1$, $B \subset E_2$. Nous posons $m(Z) = m(A) \cdot m(B)$.

Si l'ensemble Z est de la forme $Z = A_1 \times B_1 + A_2 \times B_2 + \dots$ où $(A_i \times B_i) \cdot (A_j \times B_j) = 0$ pour $i \neq j$, nous posons $m(Z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_{\nu}) m(B_{\nu})$.

On conclut des lemmes 1 et 2 que pour les ensembles de cette forme la mesure est définie d'une manière univoque indépendamment de la manière suivant laquelle Z est décomposé en une somme de produits. Soient données, en effet, deux représentations de l'ensemble Z :

$$Z = A_1 \times B_1 + \dots + A_m \times B_m + \dots \quad (A_i \subset E_1, B_i \subset E_2)$$

$$Z = C_1 \times D_1 + \dots + C_n \times D_n + \dots \quad (C_i \subset E_1, D_i \subset E_2).$$

Nous allons prouver que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_{\nu}) \cdot m(B_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} m(C_{\nu}) \cdot m(D_{\nu}).$$

Formons dans ce but tous les ensembles des points communs aux ensembles $A_i \cdot C_j$ et $B_i \cdot D_j$. On voit que

$$\begin{aligned} Z &= A_1 C_1 \times B_1 D_1 + A_1 C_2 \times B_1 D_2 + \dots + A_1 C_n \times B_1 D_n + \dots \\ &= A_2 C_1 \times B_2 D_1 + A_2 C_2 \times B_2 D_2 + \dots + A_2 C_n \times B_2 D_n + \dots \\ &+ \dots \quad \dots \quad \dots \\ &+ A_m C_1 \times B_m D_1 + A_m C_2 \times B_m D_2 + \dots + A_m C_n \times B_m D_n + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On obtient donc une décomposition de l'ensemble Z en une somme d'ensembles disjoints. Le lemme 2 appliqué aux décompositions des ensembles $A_i \times B_i$ et $C_i \times D_i$ nous donne, si l'on pose $\sigma_{\lambda\mu} = m(A_{\lambda} C_{\mu} \times B_{\lambda} D_{\mu})$:

$$m(Z) = \sum_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma_{\lambda\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_{\nu} \times B_{\nu})$$

$$m(Z) = \sum_{\lambda,\mu} \sigma_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sigma_{\lambda\mu} = \sum_{\mu=1}^{\infty} m(C_{\mu} \times D_{\mu}).$$

S'il s'agit de la définition de la mesure pour d'autres ensembles dans $E_1 \times E_2$ qui doivent être mesurables d'après nos axiomes, on peut procéder comme dans la théorie de la mesure n -dimensionnelle de Lebesgue: Les sommes d'un nombre fini d'ensembles-produits jouent le rôle des „polygones“ ou „figures élémentaires“, les sommes d'un nombre dénombrable d'ensembles-produits jouent le rôle des ensembles „ouverts“.

La mesure est bien définie pour les ensembles élémentaires et pour les ensembles ouverts. Si un ensemble F est „fermé“ c.-à-d. est complément CZ d'un ensemble ouvert Z à mesure $m(Z)$ nous posons $M(F) = 1 - m(Z)$.

D'une manière analogue, si un ensemble P est somme dénombrable d'ensembles disjoints fermés, $P = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}$, nous rangeons l'ensemble P parmi les ensembles mesurables et nous posons $m(P) = \sum_{\nu=1}^{\infty} m(F_{\nu})$. On définit pareillement une mesure pour les ensembles „ G_{δ} “ (qui sont partie commune d'un nombre dénombrable d'ensembles ouverts).

Si, enfin, l'ensemble P est de la forme $P = M \setminus N$ où M est un ensemble G_{δ} et $N \subset \bar{M}$, \bar{M} étant un ensemble G_{δ} à mesure 0, nous considérons P comme mesurable et posons $m(P) = m(M)$.

On voit facilement que les démonstrations de l'unicité d'une telle définition de la mesure et la vérification des postulats ne sont qu'une répétition verbale des démonstrations respectives dans la théorie de la mesure de Lebesgue.

Remarques. La classe \mathfrak{B} des ensembles „boreliens“ c.-à-d. la plus petite classe des ensembles qui contient les produits $X \times Y$ des ensembles mesurables et contient avec deux ensembles V et W leur différence $V - W$ ainsi qu'avec une suite des ensembles $\{V_i\}$ contient leur somme $\sum_{i=1}^{\infty} V_i$, — est contenue dans la classe des ensembles mesurables \mathfrak{M} .

On peut classer les ensembles boreliens dans notre sens à l'aide des nombres ordinaux transfinis de la deuxième classe de Cantor, d'une manière analogue au procédé employé pour les ensembles boreliens dans le sens ordinaire. Mais il y a des différences essentielles entre la classe \mathfrak{B} et la classe des ensembles boreliens dans le sens ordinaire dans le carré (si l'on admet p. ex. que

$E_1 = E_2$ = l'intervalle $0 \leq x \leq 1$). La classe \mathfrak{B} est de la puissance 2^c (la classe des ensembles-produits étant déjà de cette puissance!)

Il y a plusieurs problèmes non résolus relatifs à la notion de l'ensemble „borelien“ par rapport aux ensembles-produits. P. ex. on ne sait pas s'il existe des ensembles qui soient d'une classe $\alpha < \Omega$ précise (c.-à-d. qui n'appartiennent pas à une classe β avec $\beta < \alpha$).

4. Mesure complètement additive dans les produits infinis²¹⁾.

Dans l'étude des produits infinis on doit évidemment remplacer les postulats (V) et (3) par

(V') Si $X_i \in \mathfrak{M}_i$ pour $i = 1, 2, \dots$ l'ensemble $\prod_{v=1}^{\infty} X_v \in \mathfrak{M}$

$$(3') \quad m\left(\prod_{v=1}^{\infty} X_v\right) = \prod_{v=1}^{\infty} m(X_v).$$

Théorème 2. Soit $\{E_i\}$ une suite d'espaces dans lesquels est définie une mesure remplissant les postulats (I)–(IV) et (1), (2). Il existe dans $E = \prod_{v=1}^{\infty} E_v$ une mesure remplissant les postulats (I)–(IV), (V') et (1), (2), (3').

Démonstration. Nous démontrerons deux lemmes (3 et 4) analogues aux lemmes 1, 2.

Les lemmes 3 et 4 établis, on peut pour achever la démonstration répéter verbalement les raisonnements de la démonstration du th 1.

Lemme 3. Soit $Z = \prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} = \sum_{v=1}^m \prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^v$, où $(\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^i) \cdot (\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^j) = 0$ pour $i \neq j$. Pour les ensembles Z de la forme $\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}$ posons

$$m(Z) = \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}).$$

²¹⁾ Une étude approfondie de la mesure dans quelques produits infinis se trouve dans les travaux de MM. W. Feller et E. Tornier: Maß- und Inhaltstheorie des Baire'schen Nullraumes. Math. Ann. Bd. 107, S. 165–187, et de E. Tornier, Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Acta math. 1933, P. 239–380.

On a

$$m(Z) = \sum_{v=1}^m \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}^v).$$

Démonstration. Il existe un indice $N(i, j)$ tel que les ensembles $(\prod_{\mu=1}^{N(i, j)} A_{\mu}^i) \cdot (\prod_{\mu=1}^{N(i, j)} A_{\mu}^j) = 0$ pour $i \neq j$. En effet, si pour tout n il existait des points communs des ensembles $\prod_{\mu=1}^n A_{\mu}^i$ et $\prod_{\mu=1}^n A_{\mu}^j$, on aurait des points communs pour les ensembles $\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^i$ et $\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^j$, contrairement à l'hypothèse.

Désignons par $\bar{N} = \max. N(i, j)$ (pour $i = 1 \dots m; j = 1 \dots m$). Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons des entiers n_0, n_1, \dots, n_m tels que pour $n > n_0$

$$\left| \prod_{\mu=1}^n m(A_{\mu}) - \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}) \right| < \varepsilon,$$

et que pour $n > n_i$ ($i = 1, \dots, m$)

$$\left| \prod_{\mu=1}^n m(A_{\mu}^i) - \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}^i) \right| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Soit $N = \max. (n_0, n_1, \dots, n_m, \bar{N})$. Considérons l'espace $\prod_{v=1}^N E_v$ et la somme des ensembles disjoints $\sum_{v=1}^m \prod_{\mu=1}^N A_{\mu}^v$. On a d'après le lemme 1 (appliqué au produit de N espaces au lieu de deux)

$$\sum_{v=1}^m m\left(\prod_{\mu=1}^N A_{\mu}^v\right) = m\left(\prod_{\mu=1}^N A_{\mu}\right).$$

Le premier membre de cette égalité satisfait à la condition

$$\left| \sum_{v=1}^m m\left(\prod_{\mu=1}^N A_{\mu}^v\right) - \sum_{v=1}^m m\left(\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^v\right) \right| < \varepsilon$$

et le deuxième à la condition

$$\left| m\left(\prod_{\mu=1}^N A_{\mu}\right) - m\left(\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}\right) \right| < \varepsilon,$$

d'où

$$\left| m(Z) - \sum_{\nu=1}^m \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}) \right| < 2\varepsilon \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire du lemme 2. Si $A \times B \subset \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{\nu} \times D_{\nu}$ (où $A, C_i \subset E_1$ et $B, D_i \subset E_2$ et où les ensembles dans la somme du deuxième membre ne sont pas nécessairement disjoints), on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un entier M tel que $m(A \times B) < \sum_{\nu=1}^M m(C_{\nu} \times D_{\nu}) + \varepsilon$.

En effet, en posant $\bar{C}_i = A \cdot C_i$, $\bar{D}_i = B \cdot D_i$, on a $A \times B = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{C}_{\nu} \times \bar{D}_{\nu}$. Au lieu des ensembles $\bar{C}_i \times \bar{D}_i$ (qui ne sont pas nécessairement disjoints) on peut introduire des ensembles M_i en posant p. ex. $M_i = \bar{C}_i \times \bar{D}_i - \sum_{\mu=1}^{i-1} M_{\mu}$, d'où $M_i \subset \bar{C}_i \times \bar{D}_i$ et en vertu du lemme 1 $m(M_i) \leq m(\bar{C}_i \times \bar{D}_i)$. En outre $A \times B = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_{\nu}$.

D'après le lemme 2

$$\begin{aligned} m(A \times B) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} m(M_{\nu}) < \sum_{\nu=1}^M m(M_{\nu}) + \varepsilon \leq \sum_{\nu=1}^M m(\bar{C}_{\nu} \times \bar{D}_{\nu}) + \varepsilon = \\ &= \sum_{\nu=1}^M m(\bar{C}_{\nu}) \cdot m(\bar{D}_{\nu}) + \varepsilon \leq \sum_{\nu=1}^M m(C_{\nu}) \cdot m(D_{\nu}) + \varepsilon \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Lemme 4. Soit $Z = \prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^{\nu}$ où $(\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^i) \cdot (\prod_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu}^j) = 0$ pour $i \neq j$. On a

$$m(Z) = \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}^{\nu}).$$

Démonstration. Il résulte du lemme 3. que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} [\prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}^{\nu})]$ converge vers une somme $\leq m(Z)$.

Pour prouver l'inégalité inverse observons que pour N suffisamment grand on a

$$\left| m(Z) - \prod_{\mu=1}^N m(A_{\mu}) \right| < \varepsilon.$$

L'ensemble $\prod_{\mu=1}^N A_{\mu}$ est contenu dans l'ensemble $\sum_{\nu=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^N A_{\mu}^{\nu}$. A l'aide du corollaire du lemme 2 (appliqué au cas du produit de N au lieu de 2 espaces) on obtient

$$\prod_{\mu=1}^N m(A_{\mu}) - \sum_{\nu=1}^M m(\prod_{\mu=1}^N A_{\mu}^{\nu}) < \varepsilon$$

où

$$m(Z) < \sum_{\nu=1}^M \prod_{\mu=1}^N m(A_{\mu}^{\nu}) + 2\varepsilon.$$

Observons que, pour un $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier N_i tel que, pour $n > N_i$, on a

$$\left| m(\prod_{\mu=1}^n A_{\mu}^i) - m(\prod_{\mu=1}^n A_{\mu}^j) \right| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Si l'on choisit N de telle façon que $N = \max. (N_1, \dots, N_M)$, on a

$$m(Z) < \sum_{\nu=1}^M \prod_{\mu=1}^{\infty} m(A_{\mu}^{\nu}) + 3\varepsilon$$

ce qui achève la démonstration.

5. Mesure dans les produits à additivité finie.

Dans les numéros précédents nous avons construit, en partant de la mesure complètement additive dans les espaces composants, une mesure complètement additive dans les produits. Notre but est maintenant de construire une mesure dans les produits en partant d'une mesure additive au sens fini.

Dans le cas d'une telle mesure il est superflu de parler de la classe des ensembles mesurables. En effet, si une mesure est donnée pour une classe \mathfrak{M} d'ensembles et remplit les postulats (I), (II), (III') et (1), (2') on peut la prolonger pour tous les sous-ensembles de l'espace. Ce fait est une conséquence du théorème de M. Banach sur le prolongement d'une fonctionnelle additive²³. On sait que la mesure d'un ensemble peut être considérée comme l'intégrale de la fonction caractéristique de cet ensemble. Dans l'en-

²³ Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Ch. II § 2, Warszawa 1932.

semble des fonctions réelles définies sur E , les combinaisons des fonctions caractéristiques constituent un ensemble linéaire, la mesure est, en vertu des propriétés (I), (II), (III') et (1), (2'), une fonctionnelle additive à norme 1, définie pour cet ensemble. Une telle fonctionnelle peut être prolongée pour l'ensemble de toutes les fonctions définies sur E . En revenant à l'interprétation de la mesure, nous obtenons une mesure prolongée comme valeur de la fonctionnelle pour les fonctions caractéristiques des ensembles respectifs.

Théorème 3. Soient E_1 et E_2 des espaces à mesure remplissant les conditions (1), (2'). On peut définir dans $E = E_1 \times E_2$ une mesure pour tous les sous-ensembles qui remplit les postulats donnés ci-dessus et le postulat (3).

Démonstration. Pour un ensemble dans E qui est un produit ou une somme d'un nombre fini de produits on définit une mesure de la même manière que dans le th 1. Il résulte du lemme 1, que cette mesure remplit les axiomes (1), (2'), (3). Somme et différence des figures élémentaires étant aussi des figures élémentaires on est dans les conditions du théorème sur le prolongement de la mesure, ce qui prouve notre théorème.

Remarque. D'après le théorème 3 seule la mesure des ensembles-produits et sommes finies de tels ensembles est définie d'une manière univoque par le postulat (3) de probabilité composée. C'est une classe d'ensembles très restreinte. Une définition de la mesure pour tous les autres sous-ensembles, bien que possible en vertu du théorème sur le prolongement, peut être effectuée de beaucoup de manières différentes. Or, on peut prouver qu'il existe dans $E_1 \times E_2$ des ensembles qui ne sont pas sommes finies d'ensembles-produits et qui prennent la même mesure pour tout prolongement. Il serait intéressant de trouver tous les ensembles dans $E_1 \times E_2$ qui jouissent de cette propriété. On peut dire que pour de tels ensembles la règle des probabilités composées entraîne une mesure univoque, les mesures de tous les autres ensembles n'étant pas encore déterminées par cette règle.

Théorème 4. Soit $\{E_i\}$ une suite d'espaces à mesure remplissant les postulats (1), (2'). On peut définir une mesure dans $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$ remplissant les conditions (1), (2'), (3').

La démonstration est analogue à celle du théorème 3. La remarque sur le th. 3 conserve aussi sa validité.

II.

Nous allons montrer sur quelques exemples comment on emploie les définitions et théorèmes des paragraphes précédents dans les problèmes élémentaires du calcul des probabilités. Toutes les opérations combinatoires mentionnées dans la partie première seront illustrées²⁴⁾.

1. Les produits finis.

Exemple 1. Produit des espaces à un nombre fini de points.

Probabilité d'obtenir avec deux dés un nombre pair. Les espaces dans lesquels la probabilité (mesure) est donnée sont $E_1 = E_2$, composés chacun de six éléments. On admet habituellement que le jeu est „juste“ c.-à-d. que chaque élément considéré comme un ensemble a la mesure $\frac{1}{6}$. La probabilité cherchée est évidemment la mesure de l'ensemble de ces points dans $E_1 \times E_2$, qui ont une somme paire de „coordonnées“.

Le mesurabilité de cet ensemble est dans notre exemple élémentaire évidente *a priori*, l'espace $E_1 \times E_2$ étant composé d'un nombre fini de points. La nature combinatoire de l'ensemble, la mesure duquel est cherchée est souvent très compliquée, même dans les problèmes les plus simples, car leur interprétation mène à l'opération du produit prise un grand nombre de fois.

Exemple 2. Produit d'espaces dénombrables.

La probabilité pour que la somme de deux nombres naturels, pris au hasard, soit paire. Pour préciser notre problème on doit connaître les probabilités „données“ c.-à-d. il faut admettre une mesure dans les espaces $E_1 = E_2 =$ ensemble de tous les nombres naturels. (Une telle mesure peut naturellement être introduite de différentes manières). On a à calculer dans $E_1 \times E_2$ la mesure de l'ensemble des points pour lesquels la somme des coordonnées est paire. Or, l'ensemble en question est mesurable dans le sens de nos théorèmes. Il se laisse représenter comme somme d'ensembles de la forme $X \times Y$. (On prendra pour ces ensembles: 1^o: l'ensem-

²³⁾ V. les règles du calcul p. 243.

²⁴⁾ Cf. aussi la classification des problèmes de M. Borel, l. c. *)

ble des (x, y) pour lesquels x et y sont pairs et 2° : l'ensemble des (x, y) où x et y sont impairs). La mesure adoptée dans E_1 et E_2 est habituellement telle que l'ensemble des nombres paires a pour mesure $\frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la probabilité cherchée est égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Considérons cependant un autre problème, celui de Tchebycheff: la probabilité pour que deux nombres pris au hasard n'aient pas de diviseur commun. On cherche évidemment la mesure de l'ensemble des couples (x, y) dans $E_1 \times E_2$ pour lesquels x, y n'ont pas de diviseur commun. Or, cet ensemble n'appartient pas à la classe des ensembles mesurables dans le sens de notre théorie si la mesure donnée est d'additivité seulement finie, ce qui est le plus naturel dans les problèmes où l'espace est dénombrable²⁵⁾. Nous ne pouvons donc parler de ce problème comme d'un problème bien posé du point de vue de notre théorie. Les solutions habituelles de ce problème et des problèmes analogues ne sont, au fond, qu'un calcul de la limite des probabilités respectives correspondantes à l'approximation de l'espace total dénombrable par les ensembles finis.

Exemple 3. Produit d'espaces continus²⁶⁾.

La probabilité pour que deux points de la surface d'une sphère aient une distance plus grande qu'un nombre donné a . Il s'agit du produit de deux surfaces de la sphère. Le théorème 1 permet de définir une mesure pour cette variété à quatre dimensions située dans l'espace euclidien à 6 dimensions, en partant des mesures données sur la surface de la sphère (p. ex. étant égale à l'aire dans le sens ordinaire).

Exemple 4. Probabilité pour que trois droites sur le plan forment un triangle aux angles aigus.

L'espace à mesure donnée est ici l'ensemble de toutes les droites du plan. On peut définir une mesure dans cet ensemble (Crofton, Deltheil)²⁷⁾ et cela même dans un certain sens univoque²⁸⁾. Il

²⁵⁾ Cet ensemble n'est pas une somme finie d'ensembles-produits. V. aussi l'exemple 9.

²⁶⁾ Le livre de M. Deltheil (l. c. ⁵⁾) contient un grand nombre de problèmes de ce genre. Il serait instructif de les formuler dans le langage des produits.

²⁷⁾ Cf. Deltheil, l. c. ⁵⁾.

²⁸⁾ J. Schreier et S. Ulam, *Sur une propriété de la mesure de M. Lebesgue*, C. R. 1930.

s'agit de la mesure dans le produit de trois espaces de ce genre, notre problème concernant trois droites. On obtient dans ce produit une mesure d'après le théorème 1; notre problème est ainsi bien défini.

Un simple calcul montre que dans le produit l'ensemble correspondant aux droites formant des triangles de la propriété demandée a pour mesure le nombre $\frac{1}{6}$.

Dans cet exemple, comme d'ailleurs dans tous le cas précédents, les théorèmes de la partie première assurent d'avance l'unicité de la solution du problème. S'il s'agit du calcul effectif des probabilités cherchées, ces théorèmes justifient les procédés ordinaires, consistant à calculer la mesure de l'ensemble correspondant par une décomposition en sous-ensembles convenablement choisis, indépendamment de la manière suivant laquelle cette décomposition était effectuée.

2. Les produits infinis.

Exemple 5. Produit d'espaces finis.

Dans le jeu de pile ou face la partie sera gagnée par un joueur, s'il a réussi de gagner k jeux consécutifs. On demande quelle est la probabilité pour que le jeu soit terminé?

Les espaces à mesure donnée sont les espaces E_i , chacun composé de deux éléments (pile — 0 et face — 1). La mesure donnée est constante: p pour l'élément 1 et $q = 1 - p$ pour l'élément 0.

Il s'agit de la mesure de l'ensemble Z , situé dans l'espace $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$

de toutes les suites des chiffres 0 et 1, composé des suites dans lesquelles il existe des séries de k zéros ou de k unités consécutives. Cet ensemble est

$$Z = \sum_{v=0}^{\infty} Z_v, \text{ où } Z_v = E[x_{v+1} = x_{v+2} = \dots = x_{v+k}].$$

L'ensemble Z contient l'ensemble $\sum_{s=0}^{\infty} Z_{s,k}$.

Si l'on désigne par

$$A_0 = Z_0, \quad A_s = Z_{s,k} \cdot \prod_{j=0}^{s-1} C Z_{j,k}, \quad (s = 1, 2, \dots),$$

les ensembles A_s sont disjoints et l'on a

$$Z \supset \sum_{s=0}^{\infty} A_s$$

et par conséquent $m(Z) \geq \sum_{s=0}^{\infty} m(A_s)$.

On voit aussitôt que

$$m(Z_{s,k}) = p^k + q^k = \alpha < 1,$$

$$m(A_s) = (p^k + q^k) \cdot (1 - p^k - q^k)^s.$$

d'où

$$m(Z) \geq \sum_{s=0}^{\infty} \alpha (1 - \alpha)^s = 1.$$

Cela veut dire qu'il est „presque certain“ que le jeu sera terminé en un temps fini.

Exemple 6. Le jeu entre deux personnes est le suivant: Le gain de deux parties consécutives dans le jeu de pile ou face décide sur le gain du „game“ (de I-ier ordre). Si l'on gagne deux „games“ consécutifs on gagne le „game de II-ième ordre“ — et ainsi de suite. Avec le „game de n -ième ordre“ on gagne le jeu. On cherche la probabilité pour que ce jeu se prolonge indéfiniment. Les espaces dans lesquels la mesure est donnée sont les mêmes que dans l'exemple 5. Ici, il s'agit de la mesure dans l'espace

$$E^{(n)} = \prod_{j=1}^{\infty} E_j^{(n-1)}, \text{ où } E_j^{(j)} = \prod_{i=1}^{\infty} E_i^{(j-1)} \quad (j = 2, 3, \dots, n), \quad (i = 1, \dots)$$

$$E^1 = \prod_{i=1}^{\infty} E_i, \text{ où } E_i = E \text{ de l'exemple précédent } (i = 1, 2, \dots).$$

On obtient de la mesure donnée dans les espaces $E_i^{(j-1)}$ les mesures pour les espaces nouveaux $E_i^{(j)}$, d'une manière analogue au procédé de l'exemple 5. Un simple calcul montre que l'ensemble qui correspond à tous les jeux gagnés est mesurable et sa mesure est $\frac{1}{1 + \left(\frac{q}{p}\right)^{2n}}$; pour les jeux perdus on obtient $\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^{2n}}$.

l'ensemble qui correspond aux parties jouées indéfiniment a la mesure 0. Par suite il est „presque certain“ que le jeu sera décidé.

Exemple 7. La ruine des joueurs. Ce problème classique²⁹⁾ conduit à la considération des produits infinis. Dans le schéma mathématique le plus simple, les espaces E_i à mesure donnée se composent chacun de deux éléments $(-1, +1)$, et soit la mesure dans E_i $m(-1) = q$, $m(+1) = p$. Soit la fortune du joueur A de a , du joueur B de b unités.

Il s'agit de la mesure dans l'espace $\prod_{j=1}^{\infty} E_j$ de l'ensemble

$$Z_A = \sum_{n=s}^{\infty} Z_n \text{ où } Z_n = E[b > s_i > -a, \text{ pour } i < n; s_n \geq b]$$

s_i désignant la somme des i premiers termes de la suite.

En se servant de l'existence de la mesure dans $\prod_{j=1}^{\infty} E_j$, on peut raisonner de la manière habituelle et en vertu du fait que le jeu est juste conclure que l'espérance mathématique du joueur A est 0 et par suite que

$$b \cdot m(Z_A) - a \cdot m(Z_B) = 0.$$

Sans l'emploi de la mesure dans $\prod_{j=1}^{\infty} E_j$, le raisonnement ne serait pas rigoureux, car il n'est pas évident a priori que les probabilités $m(Z_A)$ et $m(Z_B)$ sont bien déterminées.

Exemple 8. Produits infinis d'espaces continus.

La probabilité pour qu'une suite de points choisis au hasard sur une surface (par exemple sur la surface d'une sphère) soit partout dense sur cette surface.

Les espaces aux mesures données sont ici $E_i = E$, où E est la surface donnée. Il s'agit de la mesure, dans $\prod_{j=1}^{\infty} E_j$, de l'ensemble Z de toutes les suites dont les termes forment un ensemble partout dense dans E . L'ensemble Z est, comme il est aisé de voir, mesurable. Sa mesure est 1. Soit, pour la démonstration, $\{R_i\}$ la suite „des sphères

²⁹⁾ V. le remarque sur ce problème de M. S. Bernstein, *Théorie des probabilités* (en russe) Moscou 1927, p. 98.

rationnelles" partout denses dans E . En désignant par C_i l'ensemble de toutes les suites dont tous les termes appartiennent à CR_i , on a $CZ \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. La mesure de l'ensemble C_i est évidemment égale à $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - m(R_i))^n = 0$ et la mesure étant complètement additive on a $m(CZ) = 0$, d'où $m(Z)$, c. à d. la probabilité demandée est égale à 1, c. q. f. d.

Nous démontrerons dans la suite un théorème plus précis. On a la probabilité égale à 1 pour qu'une suite de points choisis au hasard soit uniformément dense. On peut de même abandonner l'hypothèse de la constance de la probabilité pour tout choix successif des points, c. à d. admettre différentes mesures dans E_i .

Exemple 9. Produit infini d'espaces dénombrables.

Probabilité pour qu'il existe un point fixe dans une transformation de l'ensemble E des nombres entiers en lui-même.

Une telle transformation est donnée par une fonction $f(n)$ ayant pour valeur des nombres entiers et peut être considérée comme un point de l'espace $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$, où $E_i = E$. Il s'agit de la mesure de l'ensemble Z de toutes les suites $\{f(n)\}$ pour lesquelles il existe un n tel que $f(n) = n^{(30)}$.

Pour que notre problème soit bien posé, il faut qu'on ait défini une mesure dans E .

Or, si l'on a défini dans E une mesure complètement additive, l'ensemble Z est mesurable dans $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$. Si, ce qui est plus naturel, la mesure dans E est seulement d'une additivité finie et même si tous les sous-ensembles de E sont mesurables, le théorème 4 ne nous apprend rien sur la mesurabilité de Z , cet ensemble n'étant pas une somme d'un nombre fini d'ensembles-produits.

La question si l'ensemble Z appartient à la classe des ensembles qui ont la même mesure pour tout passage de la mesure de la classe des ensembles mesurables (dans le sens du théorème 4)

³⁰⁾ Ce problème peut être regardé comme une extension pour l'infini du problème des rencontres de A. de Moivre, bien que dans notre cas il ne s'agit pas des permutations de la suite des nombres entiers, mais il est admissible que $f(n) = f(m)$ pour $n = m$; l'équation $f(n) = n$ peut ne pas être soluble.

à la classe de tous les sous-ensembles de $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$, semble être difficile. Mais s'il en était ainsi, on pourrait regarder le problème comme bien posé même dans le cas où l'on part d'une mesure à additivité finie dans E .

3. Lois-limites.

La notion du produit infini nous permettra d'étudier d'une manière systématique les lois-limites du calcul des probabilités. Dans ce travail nous nous bornons, bien entendu, au cas de variables indépendantes. Ces théorèmes fondamentaux pour le calcul des probabilités remontent, comme on le sait, à Bernoulli, Poisson, Laplace; après Tchebycheff les démonstrations se sont simplifiées. Plus récemment, ces lois étaient étudiées par des savants nombreux (Borel, Cantelli, Mazurkiewicz, Khintchine et d'autres ³¹⁾ ³²⁾). Grâce à ces travaux on discerne aujourd'hui en particulier entre la loi forte et la loi faible des grands nombres. D'habitude ces théorèmes sont formulés de la manière suivante:

Théorème A. Soit $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite de variables éventuelles indépendantes, à espérance mathématique $E(x_i) = 0$ (ce qui ne diminue pas la généralité) et telles que la série $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = o(n^2)$ ^{32a)}, b_i désignant le „deuxième moment“, c.-à-d. $E(x_i^2)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n > N(\varepsilon)$, on a

$$\omega \left[\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right| < \varepsilon \right] > 1 - \varepsilon$$

$\omega[]$ désignant la probabilité de l'inégalité exprimée entre parenthèses.

³¹⁾ Borel, l. c. ³⁾; Cantelli, *Sulla legge dei grandi numeri*, Mem. Acad. Lincei, T. 11 (1916); Mazurkiewicz, *O pewnym uogólnieniu prawa wielkich liczb*, Wied. Mat. T. XXII, 1917; Khintchine, *Sur les lois fondamentales du calcul des probabilités*, (en russe), Moscou 1927.

³²⁾ Les hypothèses les plus générales et les énoncés les plus précis sont dus aux travaux récents des savants russes MM. Khintchine, Kolmogoroff et S. Bernstein dans le cas des variables éventuelles dépendantes. Khintchine, *Über das Gesetz der grossen Zahlen*, Math. Ann. (1926); Kolmogoroff, *Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen*, Math. Ann. 99 (1928).

^{32a)} $o(n)$ désigne le symbole de M. Landau: $\frac{o(n)}{n} \rightarrow 0$.

Théorème B. Dans les hypothèses du théorème A, [à condition $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_{\nu}}{\nu^2} < +\infty$] on a: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\bar{N}(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > \bar{N}(\varepsilon)$ et p naturel, on a

$$\mathfrak{w} \left[\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right| < \varepsilon; \left| \frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} \right| < \varepsilon; \dots \left| \frac{x_1 + \dots + x_{n+p}}{n+p} \right| < \varepsilon \right] > 1 - \varepsilon.$$

On voit que la loi faible des grands nombres peut s'exprimer à l'aide de la mesure dans les produits finis (d'ordre arbitrairement grand) de la forme $\prod_{\nu=1}^n E_{\nu}$; la loi forte au contraire conduit aux produits de la forme $\prod_{\nu=1}^n E_{\nu} \times \prod_{\nu=1}^{n+1} E_{\nu} \times \dots \times \prod_{\nu=1}^{n+p} E_{\nu}$,³³⁾

Bien que les théorèmes en question concernent des probabilités dans les produits finis, on parle souvent de la convergence vers 0, (forte ou ordinaire) de la suite $\left\{ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{i} \right\}$ dans le sens du calcul des probabilités. De plus, certains auteurs formulent le théorème B en disant qu'il existe une probabilité „arbitrairement voisine à 1“, pour que tous les termes de la suite $\left\{ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{i} \right\}$ soient petits à partir d'un i suffisamment grand. Mais — si l'on définit une probabilité d'un tel fait comme limite des probabilités correspondantes prises pour i fini, — on n'est pas sûr à priori si une telle expression possède les propriétés d'une probabilité. De plus, on peut exprimer le même fait mathématique de la convergence par une autre définition équivalente et il n'est pas aussi évident à priori que les limites correspondantes à ces nouvelles définitions donnerons le même nombre.

Cependant le théorème B possède pour l'intuition un sens invariant, indépendant de l'une ou l'autre définition du fait de la convergence de la suite $\left\{ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{i} \right\}$.

En se servant de la notion du produit infini on peut exprimer

³³⁾ Ces produits se laissent réduire aux produits plus simples de la forme $\prod_{\nu=1}^{n+p} E_{\nu}$.

les théorèmes A et B d'une manière plus intuitive et dans un certain sens invariante.

On admet une suite de variables indépendantes, c.-à-d. dans notre interprétation une suite d'espaces E_1, \dots, E_i, \dots composés de nombres réels; pour tout E_i on définit une mesure (fonction de probabilité) telle que

$$\int x_i d(m(Z)) = 0; \int x_i^2 d(m(Z)) = b_i, \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} = o(n^2).$$

Dans l'espace $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}$, c.-à-d. dans l'espace des suites $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$

des nombres choisis de E_i , on peut considérer la fonction $\frac{s_i(x)}{i}$, où $s_i(x) = x_1 + \dots + x_i$. Sous lesdites conditions on a:

Théorème A*. La suite des fonctions $\frac{s_i(x)}{i}$ converge, dans $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}$, „en mesure“ vers 0³⁴⁾.

Cet énoncé n'est qu'une autre rédaction du th. A. Le théorème B au contraire admet un énoncé plus simple qu'auparavant.

Dans les hypothèses sur les espaces E_i , qui correspondent aux hypothèses du théorème B, on a:

Théorème B*. La mesure de l'ensemble des suites (situé dans l'espace $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}$) dont les moyennes arithmétiques convergent vers 0 est 1³⁵⁾.

Démonstration du th. A*.

Lemme a. (de Tchebycheff).

Désignons par $Z_n(\varepsilon)$ l'ensemble des points (x_1, \dots, x_n) dans le produit $\prod_{\nu=1}^n E_{\nu}$, pour lesquels $\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right| < \varepsilon$.

³⁴⁾ La convergence „en mesure“ de la suite des fonctions $f_n(x)$ vers $f(x)$ est définie comme il suit: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N(\varepsilon)$ tel que pour $n > N(\varepsilon)$ on a: $m(E[|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]) > 1 - \varepsilon$.

³⁵⁾ Ce théorème montre que la „convergence dans le sens du calcul des probabilités“ (notion introduite par M. Cantelli) peut-être regardée comme une convergence presque partout dans l'espace $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}$.

On a $m(Z_n(\varepsilon)) > 1 - \frac{\sum_{\nu=1}^n b_\nu}{n^2 \varepsilon^2}$.

Dans le théorème il s'agit de la mesure de l'ensemble des points x dans $\prod_{\nu=1}^\infty E_\nu$, tels que $\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \varepsilon$. Nous avons

$$E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \varepsilon \right] = Z_n(\varepsilon) \times \prod_{\nu=n+1}^\infty E_\nu$$

où l'ensemble $Z_n(\varepsilon)$ se compose des points situés dans le produit fini $\prod_{\nu=1}^n E_\nu$.

Les variables x_i étant indépendantes, on a

$$m \left(E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \varepsilon \right] \right) = m(Z_n(\varepsilon)) \cdot 1$$

comme $\sum_{\nu=1}^n b_\nu = o(n^2)$, on déduit du lemme *a* notre théorème.

Démonstration du th. B*.

Lemme b. (de M. Kolmogoroff).

Désignons par Z_{Nk}^p l'ensemble des points $(x_1, \dots, x_N, \dots, x_{N+p})$ (situés dans le produit $\prod_{\nu=1}^{N+p} E_\nu$) pour lesquels

$$\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \frac{1}{k}, \text{ pour } n = N, N+1, \dots, N+p,$$

c. à d. l'ensemble

$$Z_{Nk}^p = \prod_{n=N}^{N+p} E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \frac{1}{k} \right].$$

Si p croît, c'est une suite d'ensembles décroissants à partie commune Z_{Nk} .

La mesure de l'ensemble Z_{Nk}

$$m(Z_{Nk}) = \lim_{p \rightarrow \infty} m(Z_{Nk}^p).$$

M. Kolmogoroff prouve que ce nombre (qui, d'après nos remarques générales, peut être interprété comme une probabilité) tend pour $N \rightarrow \infty$ vers 1²⁷.

²⁶ V. p. ex. Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*, Bologna 1925, p. 60.

²⁷ V. Kolmogoroff, l. c. ²⁸ C'est une conséquence simple du th. I.

Dans le théorème il s'agit de la mesure de l'ensemble Z des suites pour lesquelles l'expression $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n(x)}{n} \right|$ existe et est égale à 0. Cet ensemble est de la forme:

$$Z = E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(x)}{n} = 0 \right] = \prod_{k=1}^\infty \sum_{N=1}^\infty \prod_{n=N}^\infty E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \frac{1}{k} \right].$$

(Cette forme s'obtient de la définition habituelle de la convergence d'une suite à l'aide p. ex. du procédé général des MM. Kuratowski et Tarski mentionné dans la première partie).

L'ensemble Z , s'exprimant par sommes et produits d'ensembles mesurables, est lui-même mesurable. Notre problème étant ainsi bien défini, il s'agit de calculer la mesure de Z .

Pour k croissant, les ensembles

$$Z_k = \sum_{N=1}^\infty \prod_{n=N}^\infty E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \frac{1}{k} \right]$$

constituent une suite d'ensembles décroissants. Z étant leur partie commune, on a $m(Z) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(Z_k)$.

Les ensembles

$$Z_{Nk} = \prod_{n=N}^\infty E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \frac{1}{k} \right]$$

constituent pour $N \rightarrow \infty$ une suite d'ensembles croissants. Z_k étant leur somme, on a $m(Z_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(Z_{Nk})$ et par conséquent

$$m(Z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} m(Z_{Nk})$$

Le lemme *b* nous assure que, pour tout $\eta > 0$ et N suffisamment grand, on a $m(Z_{Nk}) > 1 - \eta$.

Nous avons donc $m(Z) \geq 1 - \eta$, pour tout $\eta > 0$, ou $m(Z) = 1$, c. q. f. d.

Cette démonstration n'est, du reste, qu'une simple adaptation de celle de M. Kolmogoroff au langage des produits, mais on saisit de cette manière plus explicitement le contenu essentiel des lois-limites.

Remarques. 1. Si tous les espaces E_i se composent de deux éléments 0 et 1, et $m(0) = q$, $m(1) = 1 - q = p$, le théorème B^* nous donne le théorème de Cantelli dans le cas particulier de Bernoulli.

D'une manière analogue, si l'on fixe dans l'espace $E_i = (0, 1)$ la mesure: $m(0) = q_i$, $m(1) = 1 - q_i = p_i$, on obtient du théorème B^* l'énoncé suivant, connu comme théorème de Poisson:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{s_n}{n} - \frac{\sum_{\nu=1}^n p_\nu}{n} \right| = 0 \text{ avec une probabilité égale à } 1.$$

2. Dans le cas du théorème de Bernoulli notre interprétation identifie ce théorème au théorème de M. Borel, d'après lequel pour „presque tout“ point x (dans le sens de la mesure de Lebesgue) de l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, dans le développement dyadique de x le chiffre 0 et 1 ont la même fréquence.

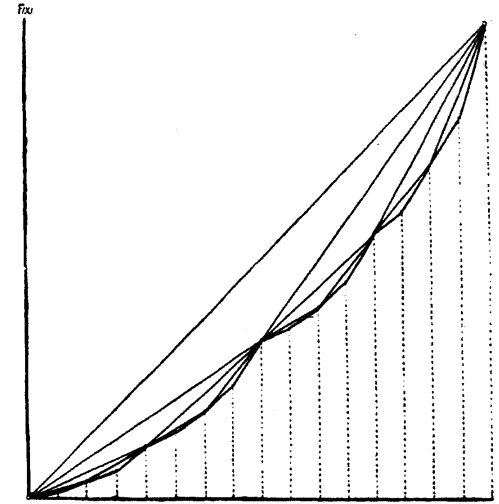
En effet, l'intervalle des nombres réels peut être considéré (exception faite d'un ensemble dénombrable des x qui ont un développement fini) comme le produit des ensembles $E_i = (0, 1)$; si la mesure dans E_i est telle que $m(0) = m(1) = \frac{1}{2}$, on obtient la mesure de Lebesgue par notre procédé de la définition de la mesure dans $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$, c. à d. dans l'intervalle $(0, 1)$, comme il est aisé de voir.

On peut obtenir une mesure différente de la mesure de Lebesgue en concevant, plus généralement, cet intervalle (abstraction faite d'un ensemble dénombrable) comme un produit des ensembles $E = (0, 1)$ avec la mesure $m(0) = q$, $m(1) = p$. Celle-ci correspond à la fonction de la probabilité totale $F(x) = x$. Dans le cas général on obtient pour la fonction de la probabilité totale la fonction suivante: Si $x = (0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots)$, où α_i est le i -ième chiffre du développement dyadique de x ,

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu p^{\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha_\mu} q^{\nu - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha_\mu}$$

Cette fonction, qui se réduit évidemment à x pour $p = q = \frac{1}{2}$, est continue, mais sa dérivée (pour $p \neq q$) n'existe pas dans un ensemble partout dense. Nous avons tracé sur la figure quelques premières approximations de la fonction $F(x)$.

Dans le cas du théorème de Poisson, si l'on veut représenter sur l'intervalle toutes les parties possibles du jeu de pile ou face



où la probabilité d'obtenir pile varie avec n , on aura

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \left(\prod_{\mu=1}^{\nu-1} p_\mu^{\alpha_\mu} q_\mu^{1-\alpha_\mu} \right) q_\nu^{\alpha_\nu}.$$

3. Les théorèmes A^* et B^* s'obtiennent à l'aide des lemmes qui servent à démontrer les théorèmes A et B et à l'aide des théorèmes sur la mesure dans les produits infinis.

On peut, d'une manière analogue, formuler pour les espaces des suites infinies d'autres théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités.

Considérons comme exemple la „loi du logarithme itéré“ de MM. Khintchine et Kolmogoroff.

Théorème C. Conservons les notations du théorème A. A condition que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = +\infty$$

et

$$|x_n| \leq m_n = o \left(\sqrt{\frac{B_n}{\log \log B_n}} \right),$$

l'ensemble de ces suites pour lesquelles on a:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\sqrt{2 B_n \log \log B_n}} = 1$$

a la mesure 1 dans l'espace $\prod_{v=1}^{\infty} E_v$.

MM. Khintchine et Kolmogoroff prouvent ³⁸⁾ que, pour η et δ positifs, il existe un N tel que la probabilité pour qu'une au moins des inégalités

$$s_n > \sqrt{2 B_n \log \log B_n} (1 + \delta), \quad (n = N, N+1, \dots, N+p)$$

soit remplie est plus petite que η , et, pour η, δ, N arbitraires, il existe un nombre p naturel tel que la probabilité pour que toutes les inégalités

$$s_n > \sqrt{2 B_n \log \log B_n} (1 - \delta) \quad (n = N, N+1, \dots, N+p)$$

soient remplies est plus petite que η .

M. Kolmogoroff formule la „loi du logarithme itéré“ de cette manière un peu compliquée parce qu'il ne voulait pas „employer des probabilités des relations qui ne peuvent être observées directement“ ³⁹⁾.

Il semble que l'existence de la mesure dans le produit infini permet d'éviter de telles objections en permettant de parler des probabilités des relations qui dépendent d'un nombre infini d'événements.

Il pourrait être intéressant d'étudier d'autres propriétés des séries infinies des variables éventuelles. Les lois des grands nombres expriment la sommabilité d'une suite de variables éventuelles par le procédé C_1 avec la probabilité 1. On peut demander de trouver tous les procédés de sommation pour lesquels il en est ainsi et cela déjà pour le cas des variables éventuelles les plus simples.

4. Suites de points uniformément denses.

Dans ce numéro nous formulons un théorème qui est intimement lié à la loi forte des grands nombres.

³⁸⁾ Khintchine l. c. ³¹⁾, Ch. III, Kolmogoroff, *Über das Gesetz des iterierten Logarithmus*, Math. Ann. 101, 1929.

³⁹⁾ Kolmogoroff, l. c. ³⁸⁾, p. 127.

Soit E un espace métrique et séparable à mesure complètement additive. La mesure est définie en particulier pour des régions G dans E (Une région dans un espace séparable se compose toujours d'un nombre dénombrable de „sphères rationnelles denses“).

Une suite de points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ est nommée uniformément dense si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout G il existe un N tel que pour tout $n > N$ le nombre des points de la suite qui appartiennent à G divisé par n , diffère de la mesure de G par un nombre plus petit que ε .

Une suite de points pris au hasard dans E peut être considérée comme élément du produit infini $\prod_{v=1}^{\infty} E_v$, où $E_i = E$ ($i = 1, 2, \dots$).

La mesure dans $\prod_{v=1}^{\infty} E_v$ est supposée déterminée conformément au théorème 2.

On peut alors se demander quelle est la probabilité pour qu'une suite de points pris au hasard soit uniformément dense.

Théorème D. La mesure de l'ensemble des suites uniformément denses dans l'espace E est 1.

Démonstration. L'espace E étant séparable et la mesure complètement additive, il en résulte aisément que pour qu'une suite soit uniformément dense dans le sens de notre définition, il suffit, qu'elle soit uniformément dense par rapport aux „sphères rationnelles denses“ R_i .

Désignons par $l_n(x)$ le nombre des points de l'intervalle (x_1, x_2, \dots, x_n) de la suite $x = (x_1, x_2, \dots)$ qui tombent dans R_j . En écrivant la définition d'une suite uniformément dense, on obtient l'ensemble de toutes ces suites sous la forme

$$Z = \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} E \left[\left| \frac{l_n(x)}{n} - m(R_j) \right| < \frac{1}{k} \right].$$

Les ensembles

$$Z_j = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} E \left[\left| \frac{l_n(x)}{n} - m(R_j) \right| < \frac{1}{k} \right].$$

ont la mesure 1. Pour s'en convaincre observons que pour un ensemble R_j donné $l_n(x)$ est une somme des variables éventuelles

indépendantes z définies de la manière suivante:

$$z'_i = 1 \text{ avec la probabilité } m(R_j)$$

$$z'_i = 0 \text{ avec la probabilité } 1 - m(R_j).$$

En utilisant le théorème B^* nous obtenons $m(Z_j) = 1$.

En tenant compte du fait que $CZ = \sum_{j=1}^{\infty} CZ_j$ et que la mesure donnée est complètement additive, on obtient $m(CZ) = 0$, c. q. f. d.

Remarques. Ce théorème d'un caractère géométrique qui est au fond une conséquence de la loi des grands nombres pour le cas de Bernoulli peut être regardé néanmoins comme une généralisation de cette loi.

En effet, dans le cas où l'ensemble E se compose des deux éléments 0 et 1 nous pouvons prendre pour des régions G les sous-ensembles (0) et (1). De la définition d'une suite $x = \{x_i\}$ uniformément dense il résulte que, si $s_n(x)$ désigne le nombre des points qui sont contenus dans la „région“ (1), c. à d. des chiffres 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(x)}{n} = m(1) = p \text{ avec la probabilité 1.}$$

Le théorème D se laisse généraliser pour le cas où la probabilité (la mesure dans E) varie pour les choix successifs, c. à d. avec n . Nous avons affaire à une suite $\{E_i\}$ d'espaces qui se composent des mêmes points mais où la mesure de la région G est $m_i(G)$. Une suite des points $x = \{x_i\}$ sera nommée uniformément dense si pour n suffisamment grand le nombre divisé par n des points qui tombent sur G approche la moyenne arithmétique des nombres $m_i(G)$. Le théorème D reste vrai et peut être regardé comme une généralisation de la loi des grands nombres dans le cas de Poisson.

5. Nombres normaux.

Dans un ordre d'idées analogues à celles du numéro précédent on peut envisager la notion d'un nombre normal, introduite par M. Borel⁴⁰⁾. Un nombre x est appelé normal (par rapport au développement dyadique) si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(x)}{n} = \frac{1}{2}$. Nous savons déjà que la

⁴⁰⁾ Borel, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, T. II, fasc. I, Ch. I. Paris 1926.

mesure de l'ensemble des nombres normaux est 1. M. Borel a étudié les nombres totalement normaux c.-à-d., normaux par rapport au développement en puissance des bases 2, 4, 8... (La définition d'un nombre normal par rapport à un développement n -adique est évidente).

La définition d'un nombre normal peut être généralisée dans deux directions d'une manière évidente. Pour le cas de Poisson la mesure dans l'intervalle (0, 1) est établie par la fonction $F(x)$ de la page 269. Un nombre sera appelé totalement normal si pour tous les systèmes finis des zéros et des unités $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ le nombre $s_n(x; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ désignant combien de fois ce système se trouve dans la n -ième approximation dyadique du nombre x , jouit de la propriété suivante:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(x; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)}{n} = p^{\sum_{v=1}^r \beta_v} q^{r - \sum_{v=1}^r \beta_v}$$

Autrement dit, un nombre est totalement normal si la fréquence de tout système fini de chiffres est, à la limite, égale à la probabilité de ce système. On prouve facilement que la mesure des nombres totalement normaux est 1.

Or, on peut généraliser cette remarque de la même manière suivant laquelle la loi des grands nombres est généralisée par le théorème D .

Soit E un espace remplissant les conditions du théorème D . A tout élément $x = \{x_i\}$ de l'espace $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$, où $E_i = E$, et à toute région G dans E correspond une suite des zéros et unités:

$$\varphi(x) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n), \dots)$$

où $\varphi(y)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble G (c. à d. $\varphi(y) = 0$ si $y \notin G$, $\varphi(y) = 1$ si $y \in G$). La suite x est appelée totalement uniformément dense si pour tout G et pour tout système $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(G; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)}{n} = [m(G)]^{\sum_{v=1}^r \beta_v} [1 - m(G)]^{r - \sum_{v=1}^r \beta_v}$$

où $s_n(G; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ exprime combien de fois le système $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ se trouve dans la suite $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n))$.

On prouve facilement le théorème suivant:

Dans l'espace $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}$, l'ensemble des suites totalement uniformément denses a la mesure 1.

On peut encore généraliser ce théorème pour le cas de Poisson, c.-à-d. pour le cas où la mesure dans l'espace E varie avec i . On doit modifier, bien entendu, la définition d'une suite totalement uniformément dense.

6. Convergence des séries.

Nous avons étudié la convergence des moyennes arithmétiques des suites à variables éventuelles. La notion du produit infini nous rend les mêmes services dans l'étude de la convergence des séries à variables éventuelles. Ce problème a été résolu dans quelques cas particuliers importants par M. Steinhaus⁴¹⁾. Pour obtenir une mesure dans les espaces correspondants à une infinité de dimensions il transformait ces espaces d'une manière biunivoque en l'intervalle des nombres réels. Une telle transformation étant convenablement choisie, on peut adopter comme mesure d'un ensemble la mesure de Lebesgue de l'ensemble linéaire correspondant. Ce procédé, un peu compliqué, conduit cependant à une solution rigoureuse du problème en question.

Le problème de la convergence des séries à variables éventuelles très générales a été résolu par MM. Khintchine, Kolmogoroff et P. Lévy⁴²⁾. La probabilité P de la convergence d'une série à variables éventuelles (à valeur réelle — cette supposition ne diminue pas la généralité) — y était définie de la manière suivante:

$$P = \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{w} \left[\max_{n \leq p \leq r \leq N} \left| \sum_{\nu=p}^r x_{\nu} \right| < \frac{1}{l} \right].$$

⁴¹⁾ Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenz-kreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*. Math. Zeit. 31 (1929); *Sur la probabilité de la convergence des séries*, Studia Math. T. II (1930).

⁴²⁾ Khintchine et Kolmogoroff, *Über Konvergenz von Reihen*, Rec. math. Soc. Math. Moscou Bd. 32 (1925), Kolmogoroff l. c. ⁴³⁾, P. Lévy, *Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes*. Studia Math. T. III (1931).

Dans ce cas encore on pourrait soulever l'objection que l'adoption de différentes définitions équivalentes du fait de la convergence pourrait conduire à des valeurs différentes des probabilités et qu'il n'est pas admissible *a priori* de parler de cette expression limite comme d'une probabilité. Or, l'existence de la mesure dans le produit infini montre qu'il n'en est pas ainsi, la définition précédente étant de cette manière justifiée.

La probabilité de la convergence d'une série est égale à la mesure de l'ensemble Z des suites, dans l'espace $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_{\nu}$, pour lesquelles les sommes partielles sont convergentes. Si l'on admet la définition habituelle (de Cauchy) de convergence, cet ensemble devient:

$$Z = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{p=N}^{\infty} \prod_{r=p}^{\infty} E \left[|x_p + x_{p+1} + \dots + x_r| < \frac{1}{i} \right].$$

On peut écrire aussi: $Z = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} Z(N, n, i)$, où

$$Z(N, n, i) = E \left[\max_{N \leq p \leq r \leq n} |x_p + x_{p+1} + \dots + x_r| < \frac{1}{i} \right].$$

Pour $n > n'$

$$Z(N, n, i) \subset Z(N, n', i)$$

donc

$$m \left(\prod_{n=N}^{\infty} Z(N, n, i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(Z(N, n, i) \right).$$

Les ensembles $\prod_{n=N}^{\infty} Z(N, n, i)$ sont tels que pour $N' > N$

$$\prod_{n=N'}^{\infty} Z(N', n, i) \supset \prod_{n=N}^{\infty} Z(N, n, i)$$

et

$$m \left(\sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} Z[N, n, i] \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} m \left(\prod_{n=N}^{\infty} Z[N, n, i] \right).$$

On a

$$\sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} Z[N, n, i] \supset \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} Z[N, n, i+1]$$

d'où

$$m(Z) = \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} m \left(E \left[\max_{N \leq p \leq r \leq n} |x_p + \dots + x_r| < \frac{1}{l} \right] \right).$$

De cette manière on parvient à la définition des MM. Khintchine et Kolmogoroff.

La méthode de M. Lévy nous permet de prévoir *a priori* que la probabilité en question peut être égale seulement à 1 ou à 0.

L'ensemble Z peut être représenté de deux manières:

$$Z = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} E \left[\max_{N \leq p \leq r \leq n} |s_r - s_p| < \frac{1}{i} \right]$$

$$Z = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} E \left[\max_{N \leq p \leq r \leq n} |s_r - s_p| < \frac{1}{i}; \max_{n \leq p \leq r \leq k} |s_r - s_p| < \frac{1}{i} \right].$$

En comparant les mesures de Z obtenues de la première resp. deuxième expression, nous obtenons

$$m(Z) = m^2(Z), \text{ d'où } m(Z) = 0 \text{ ou } m(Z) = 1.$$

La marche de la démonstration peut être étudiée en la comparant avec la démonstration d'un théorème analogue où se présentent, du reste, quelques difficultés supplémentaires⁴³⁾.

Étant donnée une suite de variables éventuelles générales, on peut démontrer que l'alternative suivante a nécessairement lieu: la loi des grands nombres est remplie ou bien la suite $s_n(x):n$ ne converge pas vers 0 avec la probabilité 1. D'une manière plus précise nous avons le

Théorème E. Soit, dans les notations du théorème A, $|x_i| < a_i$ et $\int x_i d(m(Z)) = 0$. L'ensemble Z des suites $x = \{x_i\}$ dans l'espace $\prod_{i=1}^{\infty} E_{a_i}$, pour lesquelles $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n(x)}{n}$ existe et est égale à 0, a la mesure 0 ou 1⁴⁴⁾.

⁴³⁾ L'idée essentielle de la démonstration est celle de M. P. Lévy, l. c.⁴²⁾, p. 124.

⁴⁴⁾ Cf. aussi M. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*, Anhang, Berlin 1933.

Démonstration. L'ensemble Z en question s'écrit:

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} E \left[\left| \frac{s_n(x)}{n} \right| < \frac{1}{k} \right].$$

En posant

$$Z(k, N, n, m) = E \left[\max_{N \leq p \leq n} \left| \frac{s_p(x)}{p} \right| < \frac{1}{3k}; \max_{3k\bar{n} \leq r \leq m} \left| \frac{s_r(x)}{r} \right| < \frac{1}{3k} \right]$$

où $\bar{n} = \max(n, \sum_{v=1}^n a_v)$, on a

$$Z = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} \prod_{m=3k\bar{n}}^{\infty} Z(k, N, n, m).$$

Mais

$$\frac{s_r(x)}{r} = \frac{s_n(x)}{r} + \frac{\sum_{v=n+1}^r x_v}{r}$$

et, comme pour $r > 3k\bar{n}$

$$\left| \frac{s_n(x)}{r} \right| < \frac{\bar{n}}{3k\bar{n}} = \frac{1}{3k},$$

on voit que l'inégalité $\left| \frac{s_r(x)}{r} \right| < \frac{1}{3k}$ implique $\left| \frac{\sum_{v=n+1}^r x_v}{r} \right| < \frac{2}{3k}$.

En posant

$$\bar{Z}(k, N, n, m) = E \left[\max_{N \leq p \leq n} \left| \frac{s_p(x)}{p} \right| < \frac{1}{3k}; \max_{3k\bar{n} \leq r \leq m} \left| \frac{\sum_{v=n+1}^r x_v}{r} \right| < \frac{2}{3k} \right],$$

nous avons donc

$$Z(k, N, n, m) \subset \bar{Z}(k, N, n, m).$$

Il en résulte que pour l'ensemble

$$\bar{Z} = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{N=1}^{\infty} \prod_{n=N}^{\infty} \prod_{m=3k\bar{n}}^{\infty} \bar{Z}(k, N, n, m) \text{ on a } m(\bar{Z}) \geq m(Z).$$

Posons

$$Z_{Nk} = \prod_{n=N}^{\infty} E \left[\max_{N \leq p \leq n} \left| \frac{s_p(x)}{p} \right| < \frac{1}{k} \right] \quad \text{et} \quad \bar{Z}_{Nk} = \prod_{n=N}^{\infty} \prod_{m=3k\bar{n}}^{\infty} \bar{Z}(k, N, n, m).$$

On voit facilement que

$$m(Z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} m(Z_{Nk}) \quad \text{et} \quad m(\bar{Z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} m(\bar{Z}_{Nk}).$$

Or, on a pour tout $M > N$, en posant $\bar{M} = \max_{v=1}^M a_v$:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_{Nk} &= \prod_{n=N}^{\infty} \prod_{m=3k\bar{n}}^{\infty} E \left[\max_{N \leq p \leq n} \left| \frac{s_p(x)}{p} \right| < \frac{1}{3k}; \max_{3k\bar{n} \leq r \leq m} \left| \frac{\sum_{v=n+1}^r x_v}{r} \right| < \frac{2}{3k} \right] \subset \\ &\subset E \left[\max_{N \leq p \leq M} \left| \frac{s_p(x)}{p} \right| < \frac{1}{3k} \right] \times \prod_{m=3k\bar{M}}^{\infty} E \left[\max_{3k\bar{M} \leq r \leq m} \left| \frac{\sum_{v=M+1}^r x_v}{r} \right| < \frac{2}{3k} \right] \end{aligned}$$

et comme dans les deux facteurs du dernier produit on a affaire à des variables x différentes et indépendantes, il vient

$$m(\bar{Z}_{Nk}) \leq m \left(E \left[\max_{N \leq p \leq M} \left| \frac{s_p(x)}{p} \right| < \frac{1}{3k} \right] \right) \cdot m \left(\prod_{m=3k\bar{M}}^{\infty} E \left[\max_{3k\bar{M} \leq r \leq m} \left| \frac{\sum_{v=M+1}^r x_v}{r} \right| < \frac{2}{3k} \right] \right).$$

Si M tend vers l'infini, le premier membre tend vers $m(Z_{N,3k})$. En majorant le deuxième membre par le nombre $m(Z_{3k\bar{M},k})$, on a pour $M = \infty$

$$m(\bar{Z}_{Nk}) \leq m(Z_{N,3k}) \cdot \lim_{M \rightarrow \infty} m(Z_{Mk}).$$

En passant à la limite pour $N = \infty$, $k = \infty$, il vient

$$m(\bar{Z}) \leq m(Z) \cdot m(Z)$$

d'où

$$m(Z) \leq m(\bar{Z}) \leq m^2(Z),$$

ce qui entraîne $m(Z) = 0$ ou $m(Z) = 1$, c. q. f. d.

Über innere Abbildungen

Von

F. Hausdorff (Bonn).

1. Zweck dieser Mitteilung ist zunächst der Beweis des Satzes:

I. Ist $y = \varphi(x)$ eine innere Abbildung des Raumes A auf den Raum $B = \varphi(A)$, d. h. eine stetige Abbildung, bei der jede in A offene Menge U ein in B offenes Bild $V = \varphi(U)$ hat, so ist zugleich mit A auch B topologisch vollständig.

Als topologisch vollständig wird ein Raum bezeichnet, der mit einem metrisch vollständigen Raum (in dem jede Fundamentalfolge konvergiert) homöomorph ist. Herr Sierpiński¹⁾ hat den Satz für Mengen in Euklidischen Räumen bewiesen; bei einer Gelegenheit²⁾ habe ich ihn in obigem Umfang ausgesprochen und möchte, einem Wunsch des Herrn Kuratowski entsprechend, nun den Beweis geben. Als Basis für den Raum A bezeichnet man ein System I' offener Mengen $\neq 0$ dieses Raumes derart, dass jede offene Menge $\neq 0$ Summe gewisser $U \in I'$ ist. Bedeutet U_x (Umgebung von x) eine den Punkt x enthaltende offene Menge, so soll also jede Umgebung jedes Punktes $x \in A$ eine Umgebung $U_x \in I'$ enthalten, x soll „beliebig kleine“ Umgebungen $U_x \in I'$ haben; im metrischen Raum kann man darunter Umgebungen mit beliebig kleinen Durchmessern verstehen.

Ein System von (beliebigen) Mengen $U \neq 0$ des Raumes A heisst geschlossen, wenn für jede Folge von Mengen $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ des Systems der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hüllen nicht leer ist: $\bar{U}_1 \bar{U}_2 \bar{U}_3 \dots \neq 0$.

¹⁾ Fund. Math. XVI (1930), p. 173–180.

²⁾ Journ. f. Math. 167 (1932), S. 301.