D'après (10) et (7) on a donc

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(\psi(x)) = f(x), \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1. \tag{11}$$

La suite infinie $\varphi_n(\psi(x))$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ étant ainsi convergente pour $0 < x < 1$, on conclut, d'après la définition de l'ensemble E, que $\psi(x) \in E$ pour $0 < x < 1$.

D'après (11) et (6) on trouve enfin la formule (2).

$\psi(x)$ est une fonction de classe $\leqslant \nu - 1$ (dans l'intervalle $0 < x < 1$) dont les valeurs appartiennent à E et $\varphi(x)$ est, d'après (6), une fonction de classe $\leqslant 1$ sur E (les fonctions $\varphi_n(x)$ étant continues sur E). Or, $f(x)$ est une fonction de classe ν (dans l'intervalle $0 < x < 1$). On en conclut tout de suite de (2) que $\varphi(x)$ ne peut être de classe < 1 sur E et que $\psi(x)$ ne peut être de classe $< \nu - 1$ dans l'intervalle $0 < x < 1$. La fonction $\varphi(x)$ est donc précisément de classe 1 sur E et la fonction $\psi(x)$ précisément de classe $\nu - 1$ dans l'intervalle $0 < x < 1$.

Notre lemme est ainsi démontré.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction d'une variable réelle de classe 3. D'après notre lemme, on a donc la formule (2), où $\psi(x)$ est une fonction de classe 2, dont les valeurs appartiennent à l'ensemble E. En appliquant notre lemme (pour $\nu = 2$) à la fonction $\psi(x)$, nous aurons

$$\psi(x) = \varphi(\vartheta(x)), \tag{12}$$

où $\vartheta(x)$ est une fonction d'une variable réelle de classe 1 dont les valeurs appartiennent à E.

D'après (2) et (12) on a la formule (1) et notre théorème est démontré.

Un théorème analogue subsiste, comme on voit sans peine, pour les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle d'une classe finie quelconque.

Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [1]).

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien M und N zwei metrische Räume, von denen mindestens einer kompakt ist. N^M bezeichnet den Raum, der als Elemente alle stetige Abbildungen φ von M in [2]) N hat und der durch die Formel $\varrho(\varphi, \varphi') = \sup\limits_{x \in M} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$ [3]) metrisiert ist. Je zwei, zu einer Komponente [4]) der Menge $Z \subset N^M$ gehörende Funktionen werden *äquivalent in* Z genannt. Eine Abbildung $\varphi \in N^M$ heisst *wesentlich* [5]), wenn jede mit φ in N^M äquivalente Abbildung M auf [2]) N abbildet.

Mit S_n werde ich die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} bezeichnen. Ist p ein beliebiger Punkt der Sphäre S_n, so bezeichnet p^* den zu p *antipodischen*, d. h. symetrisch zu p rel. zum Mittelpunkte von S_n gelegenen Punkt von S_n. Eine Funktion $f \in S_n^{S_n}$ wird *antipodentreu* genannt, wenn $f(p^*) = [f(p)]^*$ für jedes $p \in S_n$ gilt.

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meinem Sektionsvortrage auf dem Internationalen Math. Kongresse, Zürich 1932, vorgebracht worden.

[2]) φ bildet M *in* N ab, wenn $\varphi(M) \subset N$ ist; φ bildet M *auf* N ab, wenn $\varphi(M) = N$ ist. Vgl. z. B. H. Hopf, Math. Ann. 102, S. 572, Fussnote 14.

[3]) $\varrho(x, y)$ (bzw. $\varrho(A, B)$) bezeichnet, wie üblich, die Entfernung zwischen den Punkten x und y (bzw. Teilmengen A und B) eines metrischen Raumes.

[4]) Eine Komponente von Z ist eine grösste (in keiner von sich selbst Verschiedenen enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von Z.

[5]) Vgl. H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung 1930, S. 53.

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]. *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]. *Ist $f \in R^{n^{S_n}}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \dots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Bezeichnungen. Sind $M_1, M_2, \dots, M_n$ metrische Räume, so bezeichnet $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ das *Produkt* der Räume $M_1, M_2, \dots, M_n$, d. h. den Raum der als Elemente alle n-Tupeln $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hat, wo $x_i \in M_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$, und der durch die Formel $\varrho[(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i)^2}$ metrisiert ist. Ist insbesondere $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$, so werde ich M^n anstatt $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ schreiben. Ist insbesonderen M *die Menge R aller reellen Zahlen*, werde ich den Raum R^n, d. h. den euklidischen n-dimensionalen Raum als die Teilmenge des Raumes R^{n+1} auffassen, und zwar $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ mit $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in R^{n+1}$ identifizieren. Sind r und φ Polarkoordinaten des Punktes $(x_1, x_2) \in R^2$, so werde ich den Punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$ auch mit $([r, \varphi], x_3, \dots, x_n)$ bezeichnen.

[6]) Herr H. Hopf, dem ich den Satz I mitteilte, gab mir brieflich drei andere kürzere Beweise dieses Satzes an. Da aber diese Beweise auf tiefliegenden Ergebnissen der Theorie des Abbildungsgrades beruhen und mein Beweis im Grunde ganz elementar ist, halte ich seine Veröffentlichung für nicht überflüssig. Die Elementarisation (vor allem im Sinne der Vermeidung oder möglichen Reduktion der Anwendung von Begriffen und Methoden der algebraischen Topologie) der Sätze, welche die stetigen Abbildungen von Mengen und somit auch den Raum S_n^M betreffen, gewinnt eine Bedeutung, wenn man beachtet, dass die algebraischen Methoden, welche mit grossem Erfolge für den Fall der Komplexe angewandt werden, sich nur selten auf den allgemeinen Fall, wo M ein beliebiger metrischer Raum ist, anwenden lassen. Da aber die wichtigsten Eigenschaften (und zwar Dimensions- und Zerlegungseigenschaften) des Raumes M mit den Eigenschaften der stetigen Abbildungen dieses Raumes auf die Sphäre S_n eng verbunden sind, so ist gerade dieser allgemeine Fall von grösster Bedeutung. Vgl. P. Alexandroff, Math. Ann, 106, S. 223 u. 226 und K. Borsuk, Math. Ann. 106, S. 245 u. 247.

[7]) Dieser Satz wurde als Vermutung von St. Ulam aufgestellt.

Ohne die Allgemeinheit unserer Betrachtungen zu beschränken, kann man voraussetzen, dass S_n mit der Oberfläche der Vollkugel

$$Q_{n+1} = \underset{x \in R^{n+1}}{E}\left[x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \leqslant 1\right]^{8)},$$

d. h. mit der Menge $\underset{x \in R^{n+1}}{E}\left[x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right]$ identisch ist ist. Die Sphäre S_{n-1} bildet dann eine Teilmenge von S_n, welche S_n in zwei Gebiete $T_n^{(1)}$ und $T_n^{(-1)}$ zerschneidet, wo $T_n^{(j)} = \underset{x \in S_n}{E}[x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \operatorname{Sign} x_{n+1} = j]$ für $j = \pm 1$ ist. Die Punkte $b_n^{(j)} = (0, 0, \dots, 0, j) \in T_n^{(j)}$, $j = \pm 1$, werde ich *Pole* der Sphäre S_n nennen.

Sei f eine beliebige im metrischen Raume M definierte Funktion und E eine beliebig gegebene Menge. Mit $f^{-1}(E)$ werde ich die Menge $E[f(x) \in E]$, und mit f_E die in der Menge $M \cdot E$ durch die Formel $f_E(x) = f(x)$ definierte Funktion bezeichnen. Ist $f(M)$ Teilmenge eines metrischen Raumes N, f stetig und $E \subset M$, so heisst f eine *Erweiterung von f_E auf M relativ zu N*. Die Menge $E \subset M$ heisst *Retrakt* des Raumes M, wenn die identische Funktion $\varphi(x) \equiv x$ einer Erweiterung auf M rel. zu E fähig ist. Die mit Retrakten der Grundquaders Q_ω des Hilbertschen Raumes homöomorphe Mengen heissen *absolute Retrakte*.

Mit $F(E)$, wo $E \subset M$ ist, wird die *Begrenzung* von E in M, d. h. die Menge $\overline{M - E} \cdot \overline{E}$ bezeichnet; mit $U_\varepsilon(E)$, wo $\varepsilon > 0$, wird die *ε-Umgebung* von E in M, d. h. die Menge $\underset{x \in M}{E}[\varrho(x, E) < \varepsilon]$ bezeichnet.

Mit $N_{n,M}$ bezeichne ich die aus allen konstanten Funktionen bestehende Teilmenge des Raumes S_n^M, mit $\mathfrak{N}_{n,M}$ — die Summe aller Komponenten des Raumes S_n^M, welche Elemente von $N_{n,M}$ enthalten. Da $N_{n,M}$ mit der Sphäre S_n isometrisch ist, ist $\mathfrak{N}_{n,M}$ Summe zweier Komponenten von S_n^M falls $n = 0$ und nur einer, falls $n > 0$ ist. Mit $\mathfrak{A}_n$ wird die aus allen antipodentreuen Abbildungen von S_n bestehende Teilmenge von $S_n^{S_n}$ bezeichnet.

1. Wir haben zunächst:

1) *Ist $\varphi_0, \varphi_1 \in S_n^M$ (resp. $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{A}_n$), wobei $\varphi_0(x) \neq [\varphi_1(x)]^*$ für jedes $x \in M$ gilt, so sind die Funktionen φ_0 und φ_1 in S_n^M (resp. in $\mathfrak{A}_n$) äquivalent.*

Dies geht daraus hervor, dass die Funktionen φ_t, wo

$\varphi_t(x) =$ *Punkt, der den kleinsten geodätischen Bogen von S_n mit den Endpunkten $\varphi_0(x)$ und $\varphi_1(x)$ im Verhältnisse $t : 1 - t$ teilt,*

für $0 \leqslant t \leqslant 1$ im Raume S_n^M (resp. $\mathfrak{A}_n$) ein Streckenbild mit Endpunkten φ_0 und φ_1 bilden. Da ferner der Durchmesser dieses Streckenbildes gleich $\varrho(\varphi_0, \varphi_1)$ ist, ergibt sich daraus noch:

2) *Der Raum S_n^M (resp. $\mathfrak{A}_n$) ist lokal zusammenhängend.*

[8]) $\underset{x \in M}{E}[\ ]$ bedeutet, wie üblich, die aus allen Punkten x von der Eigenschaft $[\ ]$ bestehende Teilmenge von M.

Aus 1) folgt:

3) *Ist* $f \in S_n^M$ *und* $S_n - f(M) \neq 0$, *so ist* $f \in \mathfrak{N}_{n,M}$,

woraus folgt

4) $\mathfrak{N}_{n,M}$ *ist mit der Menge aller unwesentlichen Abbildungen von M in* S_n *identisch.*

5) *Voraussetzungen:* a) *Mindestens einer der metrischen Räumen M und N ist kompakt,*

b) $M \subset Q$, *wo Q ein absoluter Retrakt ist,*

c) *N enthält mindestens zwei Punkte,*

d) $f \in N^Q$.

Behauptung: Die Abbildung $f_M \in N^M$ *ist nicht wesentlich.*

Beweis. Da sich je zwei Elemente von Q^Q durch einen in Q^Q liegenden einfachen Bogen verbinden lassen [9]), gibt es eine einparametrige und stetige Funktionenschar [10]) φ^t, wo $0 \leqslant t \leqslant 1$, derart, dass $\varphi^t \in Q^Q$ für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi^0(x) = x$ und $\varphi^1(x) = const.$ für jedes $x \in Q$ ist. Die Funktionen $\psi_t = f\varphi_M^t$ bilden dann im Raume N^M ein stetiges Streckenbild, welches $\psi_0 = f_M$ mit $\psi_1 = const.$ verbindet. Nach c) ist dann $N - \psi_1(M) \neq 0$, d. h. f_M ist nicht wesentlich.

6) *Voraussetzungen:* a) *E ist abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes M,*

b) *Q ist ein absoluter Retrakt,*

c) *Die Abbildungen* $f_t \in Q^E$, *wo* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *bilden eine einparametrige und stetige Funktionenschar,*

d) φ_0 *und* φ_1 *sind entsprechend Erweiterungen von* f_0 *und* f_1 *auf M rel. zu Q.*

Behauptung: Es gibt eine einparametrige und stetige Funktionenschar φ_t, wo $0 \leqslant t \leqslant 1$, *derart, dass* φ_t *eine Erweiterung von* f_t *auf M rel. zu Q ist.*

Beweis. Sei f' die auf der abgeschlossenen Teilmenge $M \times (0) + E \times \langle 0, 1\rangle + M \times (1)$ des Raumes $M \times \langle 0, 1 \rangle$ [11]) folgendermassen definierte stetige Funktion:

[9]) K. Borsuk, Fund. Math. XVII, S. 170.

[10]) d. h. φ^t als Element des Raumes Q^Q betrachtet bildet eine stetige Funktion des Parameters t.

[11]) (x) bezeichnet die aus dem einzigen Elementen x bestehende Menge; $\langle 0, 1 \rangle = \underset{x \in R}{E}[0 \leqslant x \leqslant 1]$.

$$f'(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{für} \quad (x, 0) \in M \times (0),$$
$$f'(x, t) = f_t(x) \quad \text{für} \quad (x, t) \in E \times \langle 0, 1 \rangle,$$
$$f'(x, 1) = \varphi_1(x) \quad \text{für} \quad (x, 1) \in M \times (1).$$

Da die Werte von f' in Q liegen, gibt es [12]) eine Erweiterung φ' von f' auf $M \times \langle 0, 1 \rangle$ rel. zu Q. Um nun die gesuchte Funktionenschar zu bekommen, genügt es für jedes $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi_t(x) = \varphi'(x, t)$ zu setzen.

2. Von nun an werde ich voraussetzen, dass M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, d. h. ein zusammenhängender, in jedem seiner Punkte mit R^n homöomorpher Komplex ist. Die Summe von endlich vielen n-dimensionalen Simplexen einer simplizialen Zerlegung Σ von M, werde ich *elementare Figur* nennen. Ist A eine elementare Figur (bei der Zerlegung Σ), so werde ich jedes in $F(A)$ enthaltene $(n-1)$-dimensionale Simplex von Σ, eine *Seite* von A nennen.

Hilfssatz [13]). *Sind A und B zwei elementare Figuren einer gegebenen simplizialen Zerlegung* Σ *von M, und gilt*

1⁰ $B = A + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k$,

2⁰ Δ_i *ist ein n-dimensionales Simplex von* Σ, *für* $i = 1, 2, \ldots, k$,

3⁰ *Es gibt eine Komponente* Γ *von* $M - A$ *derart, dass* $B - A \subset \Gamma$ *gilt,*

4⁰ $\Delta_i \neq \Delta_j$ *für* $i \neq j$,

5⁰ *Die Menge* $\Gamma - B$ *ist zusammenhängend und nicht leer,*

so gibt es eine endliche Folge $A_0, A_1, \ldots, A_k$ *von elementaren Figuren, die folgende Eigenschaften haben:*

a) $A_0 = A$; $A_k = B$,

b) *Die Menge* $\Gamma - A_i$ *ist zusammenhängend für* $i = 0, 1, \ldots, k$,

c) $A_i \subset A_{i+1}$ *und* $\overline{A_{i+1} - A_i} = \Delta_{j_i}$, *wo* $1 \leqslant j_i \leqslant k$ *für* $i = 0, 1, \ldots, (k-1)$.

Beweis *). Nach 3⁰ und 5⁰ ist $B \subset A + \Gamma$, und es existiert eine Seite W von B, welche in $\overline{\Gamma}$, aber nicht in A enthalten ist. Diese Seite ist dann gemeinsam für genau zwei Simplexe der Zerlegung Σ,

[12]) l. c., S. 161.

[13]) Vgl. K. Borsuk, Math. Ann. 106, S. 245, **9**.

*) Zusatz bei der Korrektur. In diesem Beweise lässt sich, ohne weiteres, die Voraussetzung dass M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit durch die schwächere, dass M eine (geschlossene oder berandete) Pseudomannigfaltigkeit ist ersetzen. Dasselbe betrifft den Hilfssatz **3.** und die im Zusatz 21) enthaltene Bemerkungen.

von welchen eines zur Folge $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ gehört und etwa mit Δ_k identisch ist, und das Innere des anderen in $\Gamma - B$ enthalten ist. Der Zusammenhang von $\Gamma - B$ hat dann den Zusammenhang von $\Gamma - \overline{B - \Delta_k}$ zur Folge. Wenn wir nun $B' = \overline{B - \Delta_k} = A + \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1}$ setzen, so ist B' eine elementare Figur und die Menge $\Gamma - B' \supset \supset \Gamma - B$ zusammenhängend und nicht leer. So ist der Beweis von k auf den Fall $k-1$ zurückgeführt, was wegen der offenbaren Gültigkeit der Behauptung für $k=1$, die allgemeine Gültigkeit ergibt.

3. Hilfssatz. *Ist $f \in S_{n-1}^E$, wo E eine abgeschlossene Teilmenge einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M ist, so gibt es eine endliche Folge $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ von Komponenten der Menge $M - E$ derart, dass für jedes Punktsystem $p_1, p_2, \ldots, p_r$, wo $p_i \in \Gamma_i$ für $i = 1, 2, \ldots, r$, f eine Erweiterung auf $M - (p_1) - (p_2) - \ldots - (p_r)$ rel. zu S_{n-1} besitzt.*

Beweis [14]). Es gibt [15]) eine Erweiterung von f auf eine Umgebung $U \subset M$ von E rel. zu S_{n-1}. Man betrachte eine simpliziale Zerlegung Σ' von M, deren sämtliche Simplexe einen Durchmesser $< \varrho(E, M - U)$ haben und bezeichne durch A' die Summe aller mit E nicht punktfremden Simplexe dieser Zerlegung. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ seien alle Komponenten von $M - E$, welche Punkte von $M - A'$ enthalten. Nehmen wir ein beliebiges Punktsystem $p_1, p_2, \ldots, p_r$ derart, dass $p_i \in \Gamma_i$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ ist, und verbinden jede in Γ_i enthaltene Komponente von $M - A'$ mit dem Punkte p_i durch einen einfachen Bogen $\subset \Gamma_i$. Es bezeichne Λ die Summe aller dieser Bögen. Man betrachte eine Simpliziale Unterzerlegung Σ von Σ', deren sämtliche Simplexe einen Durchmesser $< \varrho(\Lambda, E)$ haben, wobei man voraussetzen kann (indem man eventuell die Zerlegung Σ' etwas modifiziert) dass p_i (für $i = 1, 2, \ldots, r$) im *Innern* eines n-dimensionalen Simplexes Δ_i von Σ liegt. Setzen wir $\mathfrak{S} =$ *Summe aller mit Λ nicht punktfremden Simplexe von Σ*, $A = \overline{A' - \mathfrak{S}}$ und $B = = \overline{A + \Gamma_i - \Delta_i}$. Es folgt aus unserer Konstruktion, dass die elementaren Figuren A und B und die Menge $\Gamma = \Gamma_i \cdot (M - A)$ alle Voraussetzungen des Hilfssatzes **2.** erfüllen. Es gibt also eine endliche Folge $A_0, A_1, \ldots, A_k$ von elementaren Figuren, welche die Bedingungen a), b) und c) von **2.** erfüllen. Da $A = \overline{A' - \mathfrak{S}} \subset A' \subset U$

[14]) Vgl. l. c. S. 245, **10.**

[15]) l. c. S. 241, **5.** Vgl. auch Fund. Math. XIX, S, 224, **7** u. 227, **10.**

ist, hat f eine Erweiterung auf A_0 rel. zu S_{n-1}. Um nun zu zeigen, dass f eine Erweiterung auf $A_k = B$ hat, genügt es zu beweisen, dass jede Funktion $\varphi \in S_{n-1}^{A_j}$ (wo $0 \leqslant j < k$) eine Erweiterung auf A_{j+1} rel. zu S_{n-1} besitzt. Da für ein Simplex Δ von Σ, $A_{j+1} = A_j + \Delta$ gilt, wobei die Mengen $\Gamma_i - A_j$ und $\Gamma_i - A_{j+1}$ nicht leer und zusammenhängend sind, so gibt es eine Seite W von Δ, die in A_j nicht enthalten ist. Da die Menge $Q = \overline{F(\Delta) - W}$ zu $Q_{n-1} \subset R^{n-1}$ homöomorph ist, so ist φ (nur auf $A_j \cdot Q$ betrachtet) einer Erweiterung auf Q rel. zu S_{n-1} fähig [16]), und da Q ein absoluter Retrakt ist [17]), so hat [18]) φ eine Erweiterung auf Δ und somit auf $A_{j+1} = A_j + \Delta$ rel. zu S_{n-1}.

Es ist also gezeigt, dass f eine Erweiterung auf B rel. zu S_{n-1} hat. Aber die Menge B ist ein Retrakt der Menge $A + \Gamma_i - (p_i) = = B - \Delta_i - (p_i)$ (die retrahierende Funktion kann man z. B. als Projektion der Menge $\Delta - (p_i)$ auf $F(\Delta) \subset B$ vom Punkte p_i definieren), die Funktion f lässt sich somit [18]) auch auf die Menge $A + \Gamma_i - (p_i)$ rel. zu S_{n-1} erweitern.

Um nun unsere Behauptung zu erhalten, braucht man nur das obige Verfahren für $i = 1, 2, \ldots, r$ zu wiederholen.

4. Hilfssatz. *Sind $p_0, p_1, \ldots, p_r$ Punkte der Sphäre S_n ($n \geqslant 2$), wobei $p_i \neq p_j \neq p_j^*$ für jedes $0 \leqslant i, j \leqslant r$, $i \neq j$ ist, so gibt es ein Gebiet* [19]) *$\Gamma \subset S_n$, welches sämtliche Punkte p_i enthält und dessen Durchmesser kleiner als der Durchmesser von S_n ist.*

Beweis. Es bezeichne $K_{i,j}$ (wo $i \neq j$ ist) den durch Punkte p_i und p_j auf S_n bestimmten grossen Kreis. Da $n \geqslant 2$ ist, gibt es einen Punkt $p' \in S_n - \sum_{i,j} K_{i,j}$. Ist nun L_i der kleinste geodätische Bogen mit den Endpunkten p' und p_i, so ist für jeden Punkt $p \in \sum_{i=0}^{r} L_i$, $p^* \in S_n - \sum_{i=0}^{r} L_i$. Daraus, und da die Menge $\sum_{i=0}^{r} L_i$ ein Kontinuum ist, folgt, dass die offene Menge $U_\varepsilon(\sum_{i=0}^{r} L_i)$ (wo $\varepsilon > 0$) zusammenhängend ist und für

[16]) l. c. S. 244, **8.**

[17]) l. c. S. 160, **17** Beispiel.

[18]) l. c. S. 157, **10.**

[19]) d. h. eine offene und zusammenhängende Teilmenge von S_n.

hinreichend kleines ε einen kleineren Durchmesser als der Durchmesser von S_n hat, w. z. b. w.

5. Eine Funktion $f \epsilon S_n^{S_n}$ (wo $n \geqslant 1$) nennen wir eine *Potenzabbildung* von S_n, wenn $f([r,\varphi], x_2, \ldots, x_n) = ([r, m\varphi], x_2, \ldots, x_n)$ für jedes $([r,\varphi], x_2, \ldots, x_n) \epsilon S_n$ gilt, wobei m eine ganzzahlige Konstante ist. Da jedes, keinen Pol enthaltende Teilgebiet von S_n m Male durch die Bildmenge $f(S_n)$ positiv überdeckt ist, so ist die Konstante m mit dem *Grade*[20]) von f identisch. Da zwei in $S_n^{S_n}$ äquivalente Abbildungen den gleichen Grad haben[20]) und der Grad einer konstanten Abbildung gleich Null ist[20]), wird der Beweis des Satzes I vollendet, wenn wir folgenden Hilfssatz beweisen:

6. Hilfssatz. *Jede Abbildung $f \epsilon \mathfrak{A}_n$ ist in $\mathfrak{A}_n$ einer Potenzabbildung mit einem ungeraden Grade äquivalent.*

Beweis[21]). Beweisen wir zunächst unsere Behauptung im Falle $n = 1$. Man kann jeder Funktion $f_1 \epsilon S_1^{S_1}$ eine stetige Funktion g der Winkelkoordinate φ zuordnen[22]) derart, dass $f([1,\varphi]) = [1, g(\varphi)]$ für jedes $[1,\varphi] \epsilon S_1$ und dass

$$(1) \qquad g(\varphi + 2\pi) - g(\varphi) = 2m\pi \quad \text{für jedes } \varphi,$$

wo m eine ganzzahlige Konstante ist.

[20]) L. E. J. Brouwer, Math. Ann. 71, S. 105 u. 106.

[21]) Es sei Δ ein beliebiges n-dimensionales Simplex einer simplizialen Zerlegung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Da die Begrenzung $F(\Delta)$ mit der $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Sphäre homöomorph ist, dürfen wir annehmen, dass $F(\Delta)$ mit S_{n-1} *identisch* ist. Eine Abbildung $f \epsilon S_n^M$ werden wir dann *regulär* nennen, wenn $f(M - \Delta) \subset T_n^{(1)}$ und $f(\Delta - \overline{M - \Delta}) \subset T_n^{(-1)}$ gilt, wobei $f_{F(\Delta)} \epsilon S_{n-1}^{S_{n-1}}$ eine Potenzabbildung ist. Durch eine kleine Abänderung unseres Beweises von **6.** kann man leicht, und zwar auch ohne die Begriffe und Methoden der algebraischen Topologie zu gebrauchen, den folgenden Satz erhalten: *Jede Abbildung $f \epsilon S_n^M$ ist in S_n^M einer regulären Abbildung äquivalent.* Dieser Satz bildet ein elementares Korrelat des wichtigen Satzes von H. Hopf (Math. Ann. 96, S. 209—224) wonach zwei Abbildungen gleichen Grades einer n-dimensionalen, *orientierbaren* Mannigfaltigkeit M in S_n im Raume S_n^M stets äquivalent sind. Vgl. auch H. Hopf, Com. Math. Helv. 5, S. 39—54, wo dieser Satz weit verallgemeinert ist.

[22]) Man kann $g(\varphi)$ (bis auf eine Konstante) als Zuwachs des Winkels zwischen der x-Achse und dem Vektor $\overrightarrow{0f([1,t])}$ definieren, wenn t von 0 bis φ sich ändert Die Konstante m ist durch die Formel $m = \frac{1}{2\pi}[g(2\pi) - g(0)]$ gegeben.

Ist insbesondere $f \epsilon \mathfrak{A}_n$, so gilt $f([1, \varphi + \pi]) = (f([1,\varphi]))^*$ für jedes φ und somit

$$(2) \qquad g(\varphi + \pi) - g(\varphi) = (2l + 1)\pi,$$

wo l eine ganze Zahl ist, welche wegen der Stetigkeit von g, konstant ist. Es ist somit auch

$$g(\varphi + 2\pi) - g(\varphi + \pi) = (2l + 1)\pi$$

woraus (nach (1) und (2)) folgt:

$$(3) \qquad m = 2l + 1.$$

Setzen wir nun für jedes φ und $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$(4) \qquad g_t(\varphi) = m\varphi + (1 - t)\cdot[g(\varphi) - m\varphi].$$

Nach (2) und (3) gilt:

$$g_t(\varphi + \pi) = m\varphi + m\pi + (1 - t)\cdot[g(\varphi) + m\pi - m(\varphi + \pi)] = \\ = g_t(\varphi) + (2l + 1)\pi$$

woraus folgt, dass die Funktionen

$$(5) \qquad f_t([1,\varphi]) = [1, g_t(\varphi)] \quad \text{für} \quad [1,\varphi] \epsilon S_1,$$

für $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine stetige, einparametrige Schar antipodentreuer Abbildungen von S_1 bilden. Die Funktion $f = f_0$ ist somit der Funktion f_1 in $\mathfrak{A}_1$ äquivalent. Da aber, nach (5) und (4), f_1 eine Potenzabbildung von S_1 vom Grade $m = 2l + 1$ ist, ist unser Hilfssatz für $n = 1$ bewiesen.

Nehmen wir nun unsere Behauptung für $n - 1$ (wo $n \geqslant 2$) als bewiesen an. Um den Beweis für n durchzuführen, genügt es zu zeigen, dass für eine beliebig gegebene Funktion $f_0 \epsilon \mathfrak{A}_n$ die Funktionen f_1, f_2 und f_3 existieren, die folgende Eigenschaften aufweisen:

$$(6_i) \qquad f_i \text{ und } f_{i-1} \text{ sind in } \mathfrak{A}_n \text{ äquivalent,}$$

wo $i = 1, 2, 3$ ist und wo f_3 eine Potenzabbildung von ungeradem Grade ist.

Konstruieren wir zunächst eine Funktion f_1, welche neben der Eigenschaft (6_1) folgende Eigenschaft hat:

(7) *Es gibt ein Gebiet Γ vom Durchmesser < 2, für das $f_1^{-1}(T_n^{(1)}) + (b_n^{(1)}) \subset \Gamma \subset f_1^{-1}(\overline{T}_n^{(1)})$ ist.*

Zu diesem Zwecke setzen wir $E = f_0^{-1}(S_{n-1})$ und wenden den Hilfssatz **3.** für die Funktion $f_{0,E} \in S_{n-1}^E$ an. Es gibt eine endliche Folge $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ von Komponenten der Menge $f_0^{-1}(T_n^{(1)})$, so dass $f_{0,E}$ eine Erweiterung φ rel. zu S_{n-1} auf die Menge $E + f_0^{-1}(T_n^{(1)}) - (p_1) - (p_2) - \ldots - (p_r)$ hat, wo $p_i \in \Gamma_i$ für $i = 1, 2, \ldots, r$ ist. Setzen wir $p_0 = b_n^{(1)}$. Da die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entsprechend in den Gebieten $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ beliebig angenommen werden können, kann man voraussetzen, dass:

$$p_i \neq p_j \neq p_j^* \text{ ist, für } i, j = 0, 1, \ldots, r;\ i \neq j.$$

Nach dem Hilfssatze **4.** gibt es dann ein Gebiet Γ vom Durchmesser < 2, welches sämtliche Punkte $p_0, p_1, \ldots, p_r$ enthält. Nehmen wir eine positive Zahl ε so klein, dass

$$U_\varepsilon(p_i) \subset \Gamma \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, r,$$

$$U_\varepsilon(p_i) \cdot U_\varepsilon(p_j) = 0 \quad \text{für} \quad i, j = 0, 1, \ldots, r; \quad i \neq j,$$

$$U_\varepsilon(p_i) \subset f_0^{-1}(T_n^{(1)}) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

und bezeichnen mit C_i die Begrenzung von $U_\varepsilon(p_i)$. Es sei ψ_i eine Erweiterung von φ_{c_i} auf $\overline{U_\varepsilon(p_i)}$ rel. zu $\overline{T_n^{(1)}}$. Setzen wir

$$f_1(x) = \varphi(x) \quad \text{für} \quad x \in f_0^{-1}(\overline{T_n^{(1)}}) - \sum_{i=1}^{r} U_\varepsilon(p_i),$$

$$f_1(x) = \psi_i(x) \quad \text{für} \quad x \in U_\varepsilon(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

und vervollständigen ihre Bestimmung auf der Menge $f_0^{-1}(T_0^{(-1)})$ durch die Voraussetzung $f_1 \in \mathfrak{A}_n$, d. h. durch die Bedingung:

$$f_1(x) = [f_1(x^*)]^* \quad \text{für} \quad x \in f_0^{-1}(T_n^{(-1)}).$$

Die so definierte Funktion f_1 erfüllt konstruktionsgemäss die Bedingung (7). Es ist weiter für jedes $x \in E$, $f_0(x) = f_1(x)$ und für jedes $x \in f_0^{-1}(T_n^{(j)})$, $f_1(x) \in \overline{T_n^{(j)}}$ (wo $j = \pm 1$), und somit jedenfalls $\varrho[f_0(x), f_1(x)] < 2$, was nach **1.** 1) die Bedingung (6_1) ergibt.

Konstruieren wir ferner die Funktion f_2, welche (6_2) und folgende Bedingung erfüllt:

$$(8) \qquad f_2^{-1}(T_n^{(j)}) \subset T_n^{(j)} \quad \text{für} \quad j = \pm 1.$$

Setzen wir $P = f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}}) - \Gamma$. Nach (7) und nach dem Hilfssatze **3.** gibt es eine Erweiterung φ' der Funktion $f_{1,P} \in S_{n-1}^P$ auf $f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}}) - (b_n^{(1)})$ rel. zu S_{n-1}. Es bezeichne ψ' eine Erweiterung von φ'_{c_0} auf $\overline{U_\varepsilon(p_0)} \subset T_n^{(1)}$ rel. zu $\overline{T_n^{(1)}}$. Die Funktion g, wo

$$g(x) = \varphi'(x) \quad \text{für} \quad x \in f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}}) - U_\varepsilon(p_0)$$

$$g(x) = \psi'(x) \quad \text{für} \quad x \in U_\varepsilon(p_0)$$

bildet nun eine Erweiterung von $f_{1,P}$ auf $f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}})$ rel. zu $\overline{T_n^{(1)}}$. Nach **1.** 6) ist diese Erweiterung im Raume $(\overline{T_n^{(1)}})^{f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}})}$ der Funktion $f_{1, f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}})}$ äquivalent. Daraus folgt, dass die Funktion f_2, welche auf $f_1^{-1}(\overline{T_n^{(1)}})$ durch die Formel $f_2(x) = g(x)$ und in der Menge $f_1^{-1}(T_n^{(-1)})$ durch die Formel $f_2(x) = [f_2(x^*)]^*$ definiert ist, der Funktion f_1 in $\mathfrak{A}_n$ äquivalent ist. Die Bedingung (6_2) ist somit erfüllt. Es ist ferner nach unserer Konstruktion $f_2^{-1}(T_n^{(j)}) \subset U_\varepsilon(b^{(j)}) \subset T_n^{(j)}$ für $j = \pm 1$. Also ist auch die Bedingung (8) erfüllt.

Es bleibt nur übrig, eine die Bedingung (6_3) erfüllende Potenzabbildung f_3 von ungeradem Grade zu konstruieren. Nach Voraussetzung, gibt es eine Potenzabbildung ψ_1 von S_{n-1} mit ungeradem Grade m, welche der Abbildung $\psi_0 = f_{2,S_{n-1}} \in \mathfrak{A}_{n-1}$ in $\mathfrak{A}_{n-1}$ äquivalent ist. Daraus und aus **1.** 2) folgt[23]), dass es eine einparametrige stetige Funktionenschar $\psi_t \in \mathfrak{A}_{n-1}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ gibt. Die Funktion $f_3([r, \varphi], x_3, \ldots, x_{n+1}) = ([r, m\varphi], x_3, \ldots, x_{n+1})$ bildet dann eine Erweiterung von ψ auf S_n rel. zu S_n. Nach **1.** 6) gibt es eine stetige einparametrige Funktionenschar $\varphi_t \in \overline{T_n^{1)}}^{\overline{T_n^{(1)}}}$, die folgende Eigenschaften aufweist: $\varphi_0 = f_{2, \overline{T_n^{(1)}}}$; $\varphi_1 = f_{3, \overline{T_n^{(1)}}}$ und φ_t ist eine Erweiterung von ψ_t auf $\overline{T_n^{(1)}}$ rel. zu $\overline{T_n^{(1)}}$. Wenn man ferner $\varphi_t(x) = (\varphi_t(x^*))^*$ für jedes $x \in T_n^{(-1)}$ setzt, so bekommt man die Funktionen φ_t, welche im Raume $\mathfrak{A}_n$ eine stetige Funktionenschar bilden, welche f_2 mit f_3 verbindet. Es folgt daraus, dass die Bedingung (6_3) erfüllt ist.

So ist der Beweis des Hilfssatzes **6.** und somit auch des Satzes I vollendet.

[23]) Auf Grund des Satzes, dass je zwei in derselben Komponente eines metrischen, vollständigen, lokal zusammenhängenden Raumes liegende Punkte, durch einen in dieser Komponente liegenden einfachen Bogen verbindbar sind. Siehe z. B. C. Kuratowski, Fund. Math. XV, S. 306. Auch R. L. Moore, Trans. Amer. Math. Soc. 17. S. 135, und N. Aronszajn, Fund. Math. XV, S. 228—241.

7. Beweis des Satzes II. Wäre der Satz II falsch, so würde eine Funktion $f \in R^{n^{S_n}}$ existieren, für die $f(p) \neq f(p^*)$ für jedes $p \in S_n$ wäre. Wenn wir nun

$\varphi(p) =$ *Ende des zum Vektor* $\overrightarrow{f(p)\,f(p^*)}$ *parallelen Einheitsvektors mit dem Anfangspunkte* 0,

für jedes $p \in S_n$ setzen, so bildet φ die Sphäre S_n in S_{n-1} stetig ab, wobei $\varphi(p^*) = [\varphi(p)]^*$ ist. Es ist also $\varphi \in \mathfrak{A}_n$. Da aber $S_n - \varphi(S_n) \supset$ $\supset S_n - S_{n-1} \neq 0$ ist, so ist nach **1.** 3) und 4) φ unwesentlich, was dem Satze I widerspricht.

8. Hilfssatz. *Jede stetige Funktion f, welche eine abgeschlossene Teilmenge E eines metrischen Raumes M in die Vollkugel Q_n abbildet, hat eine stetige Erweiterung φ auf M mit der Eigenschaft $\varphi(M-E) \subset$ $\subset Q_n - S_{n-1}$.*

Beweis. Da Q_n ein absoluter Retrakt ist [17]), gibt es [18]) eine Erweiterung ψ von f auf M rel. zu Q_n. Die Funktion

$\varphi(x) =$ *der um* $\frac{1}{2}\,\varrho(0, \psi(x)) \cdot [(1 - \varrho(x, E)) + |1 - \varrho(x, E)|]$ *von* 0 *entfernter Punkt der Strecke* $\overline{0\,\psi(x)}$

erfüllt die Bedingungen unseres Hilfssatzes.

9. Hilfssatz. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen eines metrischen Raumes M, wobei $M = \sum_{i=0}^{n} A_i$ ist, so gibt es eine stetige Funktion f, welche M in R^n derart abbildet, dass für jeden Punkt $p \in f(M)$ die Urbildmenge $f^{-1}(p)$ in mindestens einer der Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ enthalten ist.*

Beweis. Sei Δ ein n-dimensionales Simplex im Raume R^n mit dem Schwerpunkte c. Betrachten wir eine simpliziale Zerlegung von Δ in n-dimensionale Simplexe $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ mit gemeinsamem Eckpunkte c. Es bezeichne M_i die Menge aller Punkte des Raumes M, welche gleichzeitig zu *mindestens* $(n+1-i)$ der Mengen $A_0, A_1, \ldots, A_n$ gehören. Setzen wir:

$$f_0(x) = c \quad \textit{für jedes} \quad x \in M_0. \tag{9}$$

Die Funktion f_0 werden wir nun, der Reihe nach, auf die Mengen $M_0, M_1, \ldots, M_n = M$ erweitern und zwar derart, dass die entsprechenden Erweiterungen $f_0, f_1, \ldots, f_n$ folgende Eigenschaften aufweisen:

(10_i) *Die Funktion f_i ist eine Erweiterung von f_0 auf M_i rel. zu Δ,*

(11_i) *$f_i(x) \subset \Delta_k$ dann und nur dann, wenn $x \in A_k$.*

Da f_0 die Bedingung (10_0) und (11_0) erfüllt, und da eine die Bedingungen (10_n) und (11_n) erfüllende Funktion den Bedingungen unserer Behauptung entspricht, bleibt nur übrig zu zeigen, dass eine Funktion f_i, $(0 \leqslant i < n)$, welche die Eigenschaften (10_i) und (11_i) aufweist, eine Erweiterung f_{i+1} hat, die (10_{i+1}) und (11_{i+1}) genügt.

Man betrachte die Gleichheit

$$M_{i+1} - M_i = \sum \Big(A_{k_0} A_{k_1} \ldots A_{k_{n-i-1}} - \sum A_j\Big), \tag{12}$$

wo das äussere Summenzeichen sich auf alle Indexsysteme $k_0, k_1, \ldots, k_{n-i-1}$ bezieht, wo $0 \leqslant k_l < k_{l+1} \leqslant n$ für $0 \leqslant l < n-i-1$ ist, und das innere auf alle im Systeme $k_0, k_1, \ldots, k_{n-i-1}$ *nicht* auftretenden Indexe j. Es gilt ferner:

$$A_{k_0} A_{k_1} \ldots A_{k_{n-i-1}} - \sum A_j = M_{i+1} - \sum A_{j_0} A_{j_1} \ldots A_{j_{n-i-1}}, \tag{13}$$

wo die letzte Summe sich über alle mit $k_0, k_1, \ldots, k_{n-i-1}$ nicht identische Indexsysteme $j_0, j_1, \ldots, j_{n-i-1}$ $(0 \leqslant j_l < j_{l+1} \leqslant n$ für $0 \leqslant l <$ $< n-i-1)$ erstreckt. Aus der Gleichheit (13) folgt, dass die Summanden der rechten Seite der Formel (12) in M_{i+1} offen und paarweise punktfremd sind. Aber die Begrenzung (rel. zu M_{i+1}) der Menge $A_{k_0} A_{k_1} \ldots A_{k_{n-i-1}} - \Sigma A_j$ ist in der Menge $A_{k_0} A_{k_1} \ldots A_{k_{n-i-1}} \cdot$ $\cdot \sum_j A_j \subset M_i$ enthalten und es bildet somit (nach (11_i)) f_i diese Begrenzung in $\Delta_{k_0} \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_{n-i-1}} \cdot \sum_j \Delta_j \subset F(\Delta_{k_0} \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_{n-i-1}})$ ab. Da aber $\Delta_{k_0} \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_{n-i-1}}$ mit der Vollkugel $Q_{n-(n-i-1)} = Q_{i+1}$ und $F(\Delta_{k_0} \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_{n-i-1}})$ mit der Sphäre S_i homöomorph sind, so lässt sich — nach dem Hilfssatze **8.** — f_i auf jede der Mengen $A_{k_0} A_{k_1} \ldots A_{k_{n-i-1}}$ derart erweitern, dass die so erhaltene Funktion f_{i+1} die Bedingung

$$f_{i+1}\Big(A_{k_0} A_{k_1} \ldots A_{k_{n-i-1}} - \sum_j A_j\Big) \subset \Delta_{k_0} \Delta_{k_1} \ldots \Delta_{k_{n-i-1}} - \sum_j \Delta_j \tag{14}$$

für jedes System $k_0, k_1, \ldots, k_{n-i-1}$, wo $0 \leqslant k_l < k_{l+1} \leqslant n$ für $0 \leqslant l < n-i-1$, erfüllt.

Die so definierte Funktion f_{i+1} erfüllt nach (12) die Bedingung (10_i). Die Bedingung (11_i) wird hingegen unmittelbare Folge der Inklusion (14).

10. Beweis des Satzes III*). Es seien $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen, für welche $S_n \subset \sum_{i=0}^{n} A_i$ ist. Auf Grund des Hilfssatzes 9. gibt es eine derartige stetige Abbildung $f \in R^{n^{S_n}}$, dass für jedes $p \in f(S_n)$ die Urbildmenge $f^{-1}(p)$ in einer der Menge $A_0 \cdot S_n$, $A_1 \cdot S_n, \ldots, A_n \cdot S_n$, etwa in $A_{i_p} \cdot S_n$ enthalten ist. Aber nach dem Satze II gibt es ein solches $p_0 \in S_n$, dass $f(p_0) = f(p_0^*)$ ist und somit die antipodischen Punkte p_0 und p_0^* in der Menge $A_{i_{p_0}}$ enthalten sind, w. z. b. w.

11. Der Satz III lässt sich noch folgendermassen formulieren:

Bei jeder Zerlegung einer n-dimensionalen euklidischen Vollkugel in n Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Kugel gleich.

Daraus ergibt sich folgendes

Korollar. *Bei jeder Zerlegung einer Vollkugel im Hilbertschen Raume in endlich viele Mengen ist der Durchmesser mindestens einer von diesen Mengen dem Durchmesser der ganzen Vollkugel gleich.*

Bemerkung. Es gibt eine Zerlegung von S_n in $(n+2)$ Mengen, von denen jede einen kleineren Durchmesser als S_n hat. In der Tat, betrachten wir die simpliziale Zerlegung eines der S_n umgeschriebenen regelmässigen Simplexes Δ in $(n+2)$ Simplexe $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n+2}$, welche als gemeinsamen Eckpunkt den Mittelpunkt von S_n haben. Die gesuchte Zerlegung ist dann durch die Formel $S_n = \sum_{i=1}^{n+2} \Delta_i \cdot S_n$ gegeben.

Die folgende Frage bleibt offen: *Lässt sich jede beschränkte Teilmenge E des Raumes R^n in $(n+1)$ Mengen zerlegen, von denen jede einen kleineren Durchmesser als E hat?*

*) Herr H. Hopf hat mich in freundlicher Weise aufmerksam gemacht, dass der Satz III befindet sich auch in der in russischer Sprache erschienenen Abhandlung von Herren L. Lusternik u. L. Schnierelmann „Méthodes topologiques dans les problémes variationnels", Issledowatelskij Institut Matematiki i Mechaniki pri I M. G. U., Moskau 1930, S. 26, Hilfssatz 1. Der Beweis von Herren L. Lusternik u. L. Schnielermann unterscheidet sich übrigens wesentlich von dem meinen.

Sur un théorème fondamental concernant le nerf d'un système d'ensembles [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

M. P. Alexandroff a démontré [2]) qu'étant donné, dans un espace compact $\mathfrak{X}$, un système γ d'ensembles fermés $A_0, \ldots, A_n$ tels que

$$\mathfrak{X} = A_0 + \ldots + A_n \tag{1}$$

et η désignant un nombre supérieur aux diamètres [3]) $\delta(A_i)$ des ensembles A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$, on peut transformer l'espace $\mathfrak{X}$ en un sous-ensemble du nerf du système γ à l'aide d'une fonction continue $y = f(x)$ de manière qu'on ait, pour chaque y, l'inégalité $\delta[f^{-1}(y)] < \eta$.

Rappelons que le „nerf" du système γ est, par définition, le complexe (géométrique) composé de tous les simplexes $i_0 \ldots i_k$ tels que $A_{i_0} \cdot \ldots \cdot A_{i_k} \neq 0$, $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Pour fixer les idées, nous imaginons les chiffres $0, \ldots, n$ (par lesquels les sommets du complexe sont désignés) comme sommets d'un simplexe S à n dimensions [4]).

Je vais démontrer dans cette note le théorème précédent d'une façon qui parait être plus directe et bien simple, en généralisant, d'ailleurs, un peu et en précisant le théorème même.

[1]) Présenté à la Soc. Pol. de Math. le 7. I. 1933 à Lwów.

[2]) Comptes rendus 183 (1926), p. 640, Math. Ann. 98 (1928), p. 635, Ann. of Math. 30 (1928), p. 6.

[3]) diamètre d'un ensemble = borne supérieure des distances mutuelles de ses points.

[4]) Tous les simplexes dont il sera question dans cette note auront pour sommets des chiffres $\leqslant n$; ce seront donc des „faces k-dimensionnelles" $(-1 \leqslant k \leqslant n)$ de S. Un simplexe sera toujours conçu comme *simplexe ouvert* (sans bord).