ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Un théorème sur les transformations biunivoques.

Par

S. Banach (Léopol = Lwów).

En analysant les différentes démonstrations du théorème connu de Schröder-Bernstein sur l'égalité des puissances de deux ensembles (*Aequivalenzsatz*), p. ex. la démonstration dûe à J. König[1]), on peut constater que toutes ces démonstrations font usage d'une façon implicite d'un théorème général concernant les transformations biunivoques. Je me propose dans cette Note d'établir ce théorème et d'en tirer quelques conséquences immédiates; une de ces conséquences jouera un rôle important dans la Note: „*Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*" que je vais publier avec M. Tarski dans ce Volume.

Notations.

Soit φ une fonction définie pour tous les éléments d'un ensemble A. X étant un sous-ensemble de A, $\varphi(X)$ désigne l'ensemble de tous les éléments $\varphi(a)$, où a appartient à $X (a \varepsilon X)$. ψ étant une fonction définie pour les éléments de l'ensemble $\varphi(A)$, je pose: $\psi\varphi(a) = \psi[\varphi(a)]$ pour a appartenant à A.

Si la fonction φ remplit la condition: $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, lorsque a_1 et a_2 appartiennent à A et $a_1 \neq a_2$, nous allons dire que cette fonction transforme d'une façon biunivoque l'ensemble A en l'ensemble $B = \varphi(A)$. Dans ce cas φ^{-1} est la fonction inverse par rapport à φ; c'est-à-dire, b étant un élément de B, $\varphi^{-1}(b)$ désigne l'élément a de A, qui vérifie la formule: $b = \varphi(a)$.

Théorème 1. *Si la fonction φ transforme d'une façon biunivoque l'ensemble A en un sous-ensemble de B et de même la fonction ψ transforme un sous-ensemble de A en l'ensemble B, il existe une*

[1]) C. R. **143**, Paris 1906. Cf. A. Schoenflies: „*Entwickelung der Mengenlehre*", Leipzig und Berlin 1913, p. 36.

décomposition des ensembles A et B:

$$A = A_1 + A_2, \quad B = B_1 + B_2,$$

qui satisfait aux conditions:

$$A_1 \times A_2 = 0 = B_1 \times B_2, \quad \varphi(A_1) = B_1 \ \textit{et} \ \psi(A_2) = B_2.$$

Démonstration. a étant un élément arbitraire de A, il existe des sous-ensembles X de A (p. ex. l'ensemble A lui-même), qui remplissent les conditions suivantes:

I. $a \varepsilon X$;

II. si $x \varepsilon X$, on a $\psi^{-1}\varphi(x) \varepsilon X$;

III. si $x \varepsilon X$ et $\varphi^{-1}\psi(x)$ existe, on a $\varphi^{-1}\psi(x) \varepsilon X$.

Désignons par $C(a)$ la partie commune (le produit) de tous les sous-ensembles X de A, qui satisfont aux conditions I—III. On peut facilement se convaincre que l'ensemble $C(a)$ se compose de tous les termes de la suite suivante (du type ω ou bien $\omega^* + \omega$):

(S) $$\ldots \varphi^{-1}\psi(a), \ a, \ \psi^{-1}\varphi(a), \ \psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi(a) \ldots$$

On en conclut que les ensembles $C(a)$ jouissent de propriétés suivantes:

(1) pour tout $a \varepsilon A$, $C(a)$ remplit les conditions I—III;

(2) si $a_1 \varepsilon A$ et $a_2 \varepsilon A$, on a $C(a_1) = C(a_2)$ ou bien $C(a_1) \times C(a_2) = 0$.

Désignons ensuite par A_2 l'ensemble de tous les éléments a de A qui vérifient la formule

$$C(a) \subset \psi^{-1}(B);$$

l'ensemble A_2 se compose donc de tous les éléments a tels que l'ensemble $C(a)$ peut être réprésenté par la suite (S) du type $\omega + \omega^*$ ou bien du type ω, dont le prémier terme appartient à $\psi^{-1}(B)$.

Soit:

(3) $$A_1 = A - A_2;$$

on a évidemment:

(4) $$A = A_1 + A_2,$$

(5) $$A_1 \times A_2 = 0.$$

Observons quelques propriétés des ensembles A_1 et A_2:

(6) Si $b \varepsilon B$ et $\psi^{-1}(b) = a \varepsilon A_1$, $\varphi^{-1}(b)$ existe.

Si, en effet, $\varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}\psi(a)$ n'existait pas, la suite (S) serait du type ω et aurait pour premier terme l'élément a, qui appartient, en vertu de l'égalité: $a = \psi^{-1}(b)$, à l'ensemble $\psi^{-1}(B)$. On pourrait en déduire que $a \varepsilon A_2$ contrairement à (3).

(7) Si $b \varepsilon B$ et un des éléments $a_1 = \psi^{-1}(b)$ et $a_2 = \varphi^{-1}(b)$ appartient à $\mathfrak{A}_1$, le second lui appartient aussi.

Comme $a_1 = \psi^{-1}\varphi(a_2)$, (7) résulte aussitôt de (1), (2) et (3). Suivant (1), I et la définition de A_2, on obtient encore sans peine:

(8) $$A_2 \subset \psi^{-1}(B).$$

Posons, conformément à (8) et à l'hypothèse du théorème:

(9) $$B_1 = \varphi(A_1),\ B_2 = \psi(A_2),$$

d'où

(10) $$B_1 + B_2 \subset B.$$

Pour établir l'inclusion inverse, envisageons un élément arbitraire b de B. Si $\psi^{-1}(b) \varepsilon A_2$, b appartient évidemment à $\psi(A_2) = B_2$. Si, par contre, $\psi^{-1}(b) \varepsilon A_1$, on déduit selon (6) et (7) que $\varphi^{-1}(b)$ existe et appartient à A_1, d'où $b \varepsilon \varphi(A_1) = B_1$. On peut donc conclure que

(11) $$B \subset B_1 + B_2.$$

Les inclusions (10) et (11) donnent aussitôt l'identité:

(12) $$B = B_1 + B_2.$$

Il résulte encore de (7) et (9) que

(13) $$B_1 \times B_2 = 0.$$

Les formules (4) et (12) nous fournissent une décomposition des ensembles A et B; en vertu de (5), (9) et (13), cette décomposition remplit toutes les conditions de la thèse du théorème.

R e m a r q u e. On prouve sans peine que l'ensemble A_1 déterminé dans la démonstration précédente vérifie la formule:

$$A_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n,$$

où $C_0 = A - \psi^{-1}(B)$, $C_n = \psi^{-1}\varphi(C_{n-1})$ pour tout n naturel.

Définition 1. *La relation R possède la propriété (α), lorsque:*

I. cette relation ne peut subsister qu'entre des ensembles;

II. la condition ARB implique l'existence d'une fonction φ, qui transforme d'une façon biunivoque A en B de sorte que l'on ait $XR\varphi(X)$ pour tout sous-ensemble X de A.

Conformément à cette définition, le théorème 1 implique immédiatement le suivant:

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki

Théorème 2. *La relation R possédant la propriété (α), si $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, ARB_1 et A_1RB, on peut décomposer chacun des ensembles A et B en deux sous-ensembles disjoints:*

$$A = A_1 + A_2, \quad B = B_1 + B_2,$$

tels que l'on ait:

$$A_1RB_1 \text{ et } A_2RB_2.$$

On peut appliquer directement le théorème précédent à des diverses relations connues qui possèdent la propriété (α). Telles sont p. ex. les relations suivantes: *l'ordre semblable* des ensembles ordonnés, *la congruence* ou *la similitude géométrique* des ensembles de points situés dans un espace métrique, *l'homéomorphie* des ensembles de points situés dans un espace topologique.

En ce qui concerne cette dernière relation, on peut énoncer le corollaire suivant (en appelant avec M. Fréchet[1]) ensembles du même type de dimension deux ensembles dont chacun est homéomorphe à un sous-ensemble de l'autre):

Corollaire 2′. *Si les ensembles de points A et B ont le même type de dimension, on peut décomposer chacun d'eux en deux sous-ensembles disjoints, respectivement homéomorphes.*

Définition 2. *La relation R possède la propriété (β), lorsque*

I. cette relation ne peut subsister qu'entre des ensembles;

II. les conditions A_1RB_1, A_2RB_2 et $A_1 \times A_2 = 0 = B_1 \times B_2$ impliquent que $(A_1 + A_2)R(B_1 + B_2)$.

Suivant la définition précédente, on déduit aussitôt du théorème 2 le suivant:

Théorème 3. *La relation R possédant les propriétés (α) et (β), si $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, ARB_1 et A_1RB, on a ARB.*

En appliquant ce théorème à la relation de *l'égalité des puissances* des ensembles arbitraires, on obtient le théorème connu de Schröder-Bernstein. Son application aux autres relations connues, qui possèdent les propriétés (α) et (β), notamment à *l'équivalence par décompositon finie* ou *dénombrable* des ensembles de points situés dans un espace métrique, va être étudiée dans l'ouvrage de M. Tarski et de moi, mentionné au début de cette Note.

[1]) Math. Ann. 68, 1910, p. 145.

ICM Biblioteka Wirtualna Matematyki