

## Un continu dont tout sous-continu est indécomposable <sup>1)</sup>.

Par

Bronisław Knaster (Varsovie).

Un continu est dit *indécomposable*, lorsqu'il n'est pas somme de deux continus différents de lui <sup>2)</sup>.

Je me propose dans cet ouvrage de résoudre par affirmative le problème de l'existence <sup>3)</sup> d'un continu ne contenant que des sous-continus indécomposables et quelques autres problèmes s'y rattachant de près.

Les solutions que je présente consistant en des exemples, il m'a fallu disposer d'une méthode de construction des continus indécomposables qui soit capable à en fournir des définitions et à en assurer les démonstrations des propriétés.

La méthode de construction que j'adopte ici est basée sur une idée, d'abord très sommaire et à destination différente, qui m'a été obligeamment communiquée par M. Sierpiński en 1918. Elle consiste en une application des suites infinies de polygones emboîtés les uns dans les autres et de plus en plus éfilés, dont chacun (c'est le caractère essentiel de l'idée) est soumis à une division en parties, dans lesquelles les polygones suivants effectuent un certain nombre d'oscillations. Les continus que l'on obtient à la limite de ce procédé peuvent présenter des caractères topologiques fort différents, suivant le mode de subdivision de ces polygones.

<sup>1)</sup> Thèse présentée en décembre 1921 à l'Université de Varsovie pour obtenir le grade de Docteur en Philosophie.

<sup>2)</sup> S. Janiszewski et C. Kuratowski, *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, p. 210; cf. aussi L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68, 1910, p. 426.

<sup>3)</sup> Fund. Math. II, p. 285, problème 15.

Après avoir surmonté les difficultés, liées à la réalisation mathématique de cette idée, je suis parvenu à un procédé assez général pour qu'il mérite, à mon avis, d'être traité comme une méthode de construction de continus indécomposables (th. VII). Je le décris dans la première partie de cet ouvrage sous le nom de „méthode des bandes“. Je passe rapidement en revue les éléments purement géométriques de cette méthode, pour n'en étudier minutieusement que les propriétés topologiques qui interviennent dans les applications.

La seconde partie de l'ouvrage est entièrement consacrée aux définitions des exemples et à l'étude de leurs propriétés au point de vue de l'Analysis Situs. Je montre, en particulier, que les exemples  $\mathcal{K}_2$  et  $\mathcal{K}_3$  sont des continus qui ne renferment aucune ligne de Jordan.

Je tiens à remercier ici mes Professeurs MM. Mazurkiewicz et Sierpiński pour leurs précieux conseils et M. Kuratowski pour sa collaboration à mes recherches sur les continus indécomposables et pour les simplifications qu'il a su apporter à mes raisonnements.

### Méthode des bandes.

**Notions préliminaires.** Soit  $R_n$  le réseau des carrés égaux, déterminé sur le plan par l'ensemble des droites

$$x = \frac{k}{5^n} \quad \text{et} \quad y = \frac{k}{5^n}$$

où  $k$  prend toutes les valeurs entières.

Appelons deux carrés du réseau  $R_n$  *contigus*, lorsque leur produit (l'ensemble de leurs points communs) est un côté pour chacun d'eux.

Je donne le nom de *bande du réseau  $R_n$*  à tout polygone  $B$  qui se compose d'une suite finie de carrés de ce réseau

$$(1) \quad C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_m$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes:

$$(2) \quad \text{chaque } C_i (1 \leq i < m) \text{ est contigu à } C_{i+1}$$

$$(3) \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq (m - i) \text{ on a } C_i \times C_{i+k} \subset C_i \times C_{i+1}.$$

Cette condition implique que

$$(4) \quad \text{si } C_i \times C_{i+k} \neq 0, \text{ on a } k \leq 2.$$

En effet, on a d'après (3) pour  $k \geq 3$ :

$$C_i \times C_{i+k} = C_i \times (C_{i+1} \times C_{i+k}) = C_i \times C_{i+1} \times C_{i+2} \times C_{i+k}.$$

Or, si  $C_i \times C_{i+k} \neq 0$ , il y a un point commun aux quatre carrés  $C_i$ ,  $C_{i+1}$ ,  $C_{i+2}$  et  $C_{i+k}$ . Ces carrés forment donc un carré plus grand. Mais dans ce cas il y a un côté commun aux carrés  $C_i$  et  $C_{i+k}$ ; ce côté étant évidemment distinct du côté  $C_i \times C_{i+1}$ , on est en contradiction avec (3).

Ainsi l'inégalité  $C_i \times C_{i+k} \neq 0$  n'est réalisée pour  $k > 0$  que si  $k = 1$  ou  $k = 2$ . On remarquera que le produit  $C_i \times C_{i+2}$  est vide ou se réduit à un seul point.

Le côté commun aux carrés  $C_i$  et  $C_{i+1}$  sera nommé *cloison* et désigné par  $F_i$ . En outre, désignons par  $F_0$  un côté de  $C_1$  distinct de  $F_1$  et par  $F_m$  un côté de  $C_m$  distinct de  $F_{m-1}$ . Les côtés  $F_0$  et  $F_m$  de  $B$  seront appelés aussi *base initiale* et *base finale* de cette bande. Une extrémité quelconque de  $F_0$  portera le nom de *point initial* de  $B$ .

Tous ces noms sont évidemment de pure convention et ne serviront d'ailleurs qu'à éviter des périphrases.

Envisageons la suite

$$(5) \quad F_0, F_1, \dots, F_i, \dots, F_m.$$

J'appelle  $C_i$  *carré d'inflexion*, lorsque  $F_{i-1} \times F_i \neq 0$ .  $C_i$  étant un carré d'inflexion, l'ensemble  $F_{i-1} \times F_i$  se réduit à un seul point, à savoir, au point  $C_{i-1} \times C_{i+1}$  (en cas où  $0 < i < m$ ). J'affirme que

$$(6) \quad \text{Si } F_i \times F_{i+2} \neq 0, \text{ on a } i = 0 \text{ ou bien } i + 2 = m.$$

En effet, si  $i \neq 0$ , l'inégalité  $F_i \times F_{i+2} \neq 0$  entraîne l'inégalité  $C_i \times C_{i+1} \times F_{i+2} \neq 0$ . Donc, si  $i + 2 \neq m$ , on a  $F_{i+2} \subset C_{i+3}$  et  $C_i \times C_{i+1} \times C_{i+3} \neq 0$ , contrairement à (4).

Une suite

$$(7) \quad C_i, C_{i+1}, \dots, C_j$$

extraite de la suite (1) forme également une bande. J'appellerai cette bande *portion* de la bande primitive. Convenons que

$$(8) \quad \text{ce soient les cloisons } F_{i-1} \text{ et } F_j \text{ de } B \text{ qui serviront des bases à la portion } C_i + C_{i+1} + \dots + C_j, \text{ notamment, } F_{i-1} \text{ sera la base initiale de cette portion et } F_j \text{ la base finale.}$$

Une somme de bandes en peut également former une. Appelons, par extension, *contigues* deux bandes dont le produit se réduit à un

coté commun de leurs carrés extrêmes. On voit facilement par un arrangement convenable des indices que

- (9) *la somme de deux bandes contigües est également une bande; elle a pour carrés extrêmes ceux des bandes primitives qui ne sont pas contigües l'un à l'autre.*

La définition de la bande montre que le contour d'une bande est une ligne brisée fermée sans points multiples. Les deux bases, prises sans extrémités, coupent cette ligne en deux lignes brisées disjointes  $L'$  et  $L''$ , dont chacune s'étend d'une extrémité de  $F_0$  à une extrémité de  $F_m$ ; soit  $L'$  celle de ces lignes qui contient le point initial de la bande.

Dans le cas où  $F_0 \times F_m \neq 0$ , une des lignes  $L'$  et  $L''$  se réduit à un point, notamment au point  $F_0 \times F_m$ . Appelons *point final* de  $B$  le point  $L'' \times F_m$  dans les cas où  $F_0 \times F_m = 0$ , et le point  $L' \times F_m$  dans le cas contraire. On remarquera que dans ce dernier cas la bande  $B$  se compose, conformément à (6), de trois carrés au plus.

La fonction  $f(B)$ . Je vais introduire une fonction  $f(B)$ , qui fera correspondre à toute bande  $B$  du réseau  $R_n$  une bande du réseau  $R_{n+1}$  contenue dans  $B$ .

Supposons à ce but qu'il ait été donné d'avance

1° lesquels de cotés de  $C_1$  et  $C_m$  distincts de  $F_1$  et  $F_{m-1}$  sont désignés respectivement par  $F'_0$  et  $F'_m$

2° laquelle des deux extrémités de  $F_0$  est considérée comme point initial de  $B$ .

Par cela les lignes  $L'$  et  $L''$  ainsi que les deux points extrêmes de  $B$  sont déterminés d'une façon univoque.

Or, le réseau  $R_{n+1}$  découpe tout carré de  $R_n$  en 25 carrés plus petits. Désignons par  $H_1$  le polygone composé de tous les petits carrés qui sont contenus dans  $B$  et qui ont des points communs avec  $L'$ . Soit, d'une façon générale,  $H_k$  ( $1 < k \leq 5$ ) la somme des carrés de  $R_{n+1}$  contenus dans  $B$  et ayant des points communs avec  $H_{k-1}$ .

- (10) *Le polygone  $H_1$  est une bande du réseau  $R_{n+1}$ .*

On constate en effet que pour  $m=1$   $H_1$  est une bande composée de 1, 5 ou 9 carrés de  $R_{n+1}$  suivant que

$$F'_0 \times F'_m = L', \quad F_0 \times F_m = 0 \quad \text{ou} \quad F_0 \times F_m = L''.$$

En outre, les carrés extrêmes de  $H_1$  viennent se placer respectivement aux extrémités  $F_0 \times L'$  de  $F_0$  et  $F_m \times L'$  de  $F_m$ . On prouve à l'aide de (9) par induction que, si pour un  $m = m_0$  le polygone  $H_1$  forme une bande, il en est de même pour  $m = m_0 + 1$ . Le trajet des  $H_k$  étant parallèle à celui de  $H_1$ , on démontre par un raisonnement analogue que  $H_2, H_3, H_4$  et  $H_5$  sont également des bandes. La bande  $H_5$  est composée de carrés de  $R_{n+1}$  contenus dans  $B$  et disposés le long de  $L''$ .

Pour tout  $k = 1, 2, \dots, 5$  chacun des produits  $H_k \times F_0$  et  $H_k \times F_m$  se réduit à un côté du carré extrême correspondant de  $H_k$ . Convenons de considérer ces côtés comme bases de  $H_k$ , la base initiale de  $H_k$  étant celle qui est située sur la base initiale de  $B$ . Par cela l'ordre des carrés de chaque  $H_k$  est établi d'une façon univoque.

Admettons maintenant que  $F_0 \times F_m = 0$ .

Soit  $I_1$  la portion de  $H_1$  formée de carrés qui précèdent tous ceux qui ont des points communs avec  $F_m$ . On a donc  $I_1 \times F_m = 0$ .

Soit d'une façon analogue  $I_5$  la portion de  $H_5$  formée de carrés qui succèdent à tous les carrés de cette bande ayant des points communs avec  $F_0$ . On a donc  $I_5 \times F_0 = 0$ .

Désignons par  $I_2$  le carré de  $H_2$  contigu au dernier carré de  $I_1$ . Un tel carré existe en vertu de la définition de  $H_2$ ; on pourrait d'ailleurs prouver qu'il n'y en a qu'un. Désignons par  $I_4$  le carré de  $H_4$  analogue à  $I_2$ , mais contigu au premier carré de  $I_5$ .

Enfin, soit  $I_3$  la portion de  $H_3$  contigue à  $I_2$  et  $I_4$  à la fois.

Posons:

$$(11) \quad \text{lorsque } F_0 \times F_m = 0 \quad f(B) = \sum_{k=1}^5 I_k$$

$$(12) \quad \text{et lorsque } F_0 \times F_m \neq 0 \quad f(B) = H_1.$$

Ces formules permettent de prouver que  $f(B)$  est une bande. En vertu de (10) la démonstration se réduit au cas où  $F_0 \times F_m = 0$  et consiste à appliquer la proposition (9) quatre fois de suite.

Tout  $I_k$  est une bande comme portion de  $H_k$ . Les bandes  $H_k$  et  $H_{k+2}$  étant par définition disjointes, les bandes  $I_k$  et  $I_{k+2}$  le sont à plus forte raison. Or,  $I_2$  étant par définition contigu à  $I_1$ , la somme  $I_1 + I_3$  forme, d'après (9), une bande et  $I_5$  en est un carré extrême.  $I_3$  étant disjoint de  $I_1$  et contigu par définition à  $I_2$ , les bandes  $(I_1 + I_2)$  et  $I_3$  sont contigues et leur somme  $I_1 + I_2 + I_3$

forme par conséquent une bande en vertu de (9). En raisonnant ainsi de suite, on trouve finalement que la somme (11) est en effet une bande.

On remarque que, dans le cas où  $F_0 \times F_m = 0$ , la bande  $f(B)$  effectue dans  $B$  une sorte d'oscillation (voir fig. I et II, p. 257).

Je vais établir à présent quelques propriétés de  $f(B)$  dont je ferai usage dans la suite.

On voit des formules (11) et (12) qu'un des carrés extrêmes de  $f(B)$  vient se placer à une extrémité de la base initiale de  $B$  (notamment au point initial de cette bande) et que l'autre carré extrême de  $f(B)$  est situé à une extrémité de la base finale de  $B$  (notamment au point final de cette bande). Convenons donc que

- (13) *ce soit le point initial de  $B$  que l'on regardera comme point initial de  $f(B)$  et que ce soient les cotés de  $f(B)$ , situés sur les bases de  $B$ , qui seront considérés comme bases de  $f(B)$ .*

L'ordre des carrés de  $f(B)$  est ainsi établi. J'affirme que

- (14) *l'ensemble  $f(B) \times F_0$  se réduit à la base initiale de  $f(B)$  et l'ensemble  $f(B) \times F_m$  se réduit à la base finale de  $f(B)$ .*

Considérons en effet l'ensemble  $f(B) \times F_0$ . On peut se borner évidemment au cas où  $F_0 \times F_m = 0$ .

La base  $F_0$  ne contient un côté que du premier carré de  $I_1$ . Il s'agit donc de prouver que

$$(15) \quad (I_2 + I_3 + I_4 + I_5) \times F_0 = 0.$$

Désignons par  $R$  le rectangle formé par les carrés de  $H_2, H_3, H_4$  et  $H_5$  dont un côté est situé sur  $F_0$ . Pour tout  $1 < k < 5$  le carré de  $H_k$  contenu dans  $R$  n'est contigu qu'aux carrés de  $H_{k-1}$  et  $H_{k+1}$  qui sont situés dans le même rectangle. Cependant,  $I_5$  étant par définition disjoint de  $F_0$ , aucun carré de  $I_5$  n'est contenu dans  $R$ . Il en est donc de même du carré  $I_4$ , qui est contigu à  $I_5$ . D'autre part, étant donné que  $F_0 \times F_m = 0$ , la bande  $I_1$  se compose d'au moins 4 carrés du réseau  $R_{n+1}$  de sorte que le dernier carré de  $I_1$  n'est pas situé dans  $R$ . Ce rectangle ne contient donc  $I_2$ , puisque  $I_1$  n'est contigu qu'au dernier carré de  $I_1$ . Enfin, la bande  $I_3$  étant contigue aux carrés  $I_2$  et  $I_4$ , les carrés extrêmes de cette bande ne sont pas contenus dans  $R$ . Ce rectangle ne contient donc non plus d'autre carrés de  $I_3$ , puisque le seul carré de  $H_3$  situé dans  $R$  est un carré extrême de cette bande et, partant, de toute portion dont il fait partie.

L'égalité (15) est ainsi établie. Le raisonnement pour l'ensemble  $f(B) \times F_m$  est tout à fait analogue.

C'est justement pour que la propriété (14) de la bande  $f(B)$  soit réalisée que j'ai défini cette bande de façon à écarter ses deux „tournants“ des bases  $F_0$  et  $F_m$ . Voyons l'étendue de cet écart.

$C_v$  désignant le carré de la suite (1) qui contient  $I_4$  et  $C_w$  le carré de cette suite qui contient  $I_2$ , posons

$$V(B) = C_1 + \dots + C_v \quad \text{et} \quad W(B) = C_w + \dots + C_m.$$

J'affirme que:

$$(16) \quad v \leq 3 \quad \text{et} \quad m - w \leq 2.$$

On remarquera pour s'en convaincre qu'un carré de  $H_k$  situé dans  $C_i$  n'est jamais contigu à un carré de  $H_{k-1}$  ou de  $H_{k+1}$  contenu dans un  $C_j \neq C_i$ . Il en résulte que le premier carré de  $I_5$  est situé dans  $C_v$ , ce qui prouve que tout carré de  $H_5$  situé dans  $C_{v-1}$  a des points communs avec  $F_0$ . On a donc  $F_{v-1} \times F_0 \neq 0$ , puisque dans le cas contraire le carré de  $H_5$  situé dans  $C_{v-1}$  à l'extrémité de la cloison  $F_{v-1}$  serait également disjoint de  $F_0$ . Or, l'inégalité qui précède entraîne en vertu de (4) que  $v \leq 3$ , c. q. f. d.

La démonstration pour  $w$  est analogue.

La bande  $f(B)$  possède enfin la propriété suivante (qui n'interviendra d'ailleurs que dans l'exemple  $\mathcal{K}_2$ ):

(17) *Quatre carrés d'inflexion de  $f(B)$  ne sont jamais successifs.*

On prouve, en effet, en examinant les deux cas

$$F_{i-1} \times F_i = 0 \quad \text{et} \quad F_{i-1} \times F_i \neq 0,$$

qu'une portion de  $H_1$ , de  $H_3$  ou de  $H_5$  située dans  $C_i$  ne contient jamais deux carrés d'inflexion successifs. Il en résulte que deux carrés d'inflexion de  $H_1$  étant contigus, ils sont situés à un sommet commun de deux carrés successifs de  $B$ . On en conclut en vertu de (6) que si trois carrés d'inflexion de  $H_1$  sont successifs, on a  $F_0 \times F_m \neq 0$ . Par conséquent  $H_1$  ne se compose que de ces trois carrés d'inflexion et  $f(B) = H_1$  conformément à la formule (12).

Admettons donc que  $F_0 \times F_m = 0$ . Par suite  $H_1$  ne contient que tout au plus deux carrés d'inflexion successifs. Par raison de symétrie il en est de même de  $H_5$ . Enfin, comme aucun carré de  $H_3$  n'est situé à un sommet de  $C_i$ , jamais deux carrés successifs de  $H_3$  ne sont des carrés d'inflexion.

Or, les carrés extrêmes des bandes  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I_5$  deviennent dans  $f(B)$  des carrés d'inflexion à cause du contact latéral avec  $I_2$  et  $I_4$ ; donc jamais plus que trois carrés d'inflexion ne sont successifs dans ces bandes. Enfin, le carré  $I_2$  étant contigu à la fois à un carré de  $H_1$  et à un carré de  $H_3$ , il n'est pas un carré d'inflexion. Par raison de symétrie il en est de même de  $I_4$ . Les carrés  $I_2$  et  $I_4$  étant interposés entre  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I_5$  et par conséquent, entre les carrés d'inflexion de ces bandes, la propriété (17) se trouve établie aussi pour le cas où  $F_0 \times F_m = 0$ .

La fonction  $f(B, S)$ . Soit  $S$  une suite quelconque

$$(18) \quad F_0, F_1, \dots, F_i, \dots, F_k$$

extraite de la suite (5) et assujettie aux conditions

$$i_0 = 0 \quad \text{et} \quad i_k = m.$$

La suite  $S$  détermine une décomposition de la bande  $B$  en  $k$  portions

$$(19) \quad P_1, P_2, \dots, P_n, \dots, P_k$$

où  $P_n$  est une bande formée de carrés  $C_{i_{n-1}+1}, C_{i_{n-1}+2}, \dots, C_{i_n}$  de  $B$ . La portion  $P_n$  s'étend par conséquent de  $F_{i_{n-1}}$  à  $F_{i_n}$ .

Pour que la bande  $f(P_n)$  soit définie, il faut satisfaire aux conditions préalables 1° et 2°, page 250. La condition 1° étant remplie par (8), il nous reste à indiquer le point initial de  $P_n$ .

Je vais le choisir de façon que la somme  $\sum_{k=1}^k f(P_n)$  constitue une bande. Convenons donc que

(20) *le point initial de  $P_1$  coïncide avec celui de la bande  $B$  et pour tout  $1 < h \leq k$  le point initial de  $P_h$  coïncide avec le point final de  $P_{h-1}$ .*

Posons:

$$(21) \quad f(B, S) = \sum_{h=1}^k f(P_h).$$

Cette formule représente  $f(B, S)$  sous forme d'une bande du réseau  $R_{n+1}$ . Pour s'en convaincre, supposons qu'une somme partielle  $\sum_{g=1}^h f(P_g)$  forme une bande dont la base finale coïncide avec celle de  $f(P_h)$ . Il s'agit de prouver qu'il en est de même de la somme  $\sum_{g=1}^{h+1} f(P_g)$ .

Or, en vertu de (20) la base finale de  $f(P_1)$ , et partant, de la somme considérée, coïncide avec la base initiale de  $f(P_{h+1})$ . Le produit de ces bandes contient donc cette base commune.

D'autre part, comme  $f(P_h) \subset P_h$ , on a pour tous  $g, h = 1, 2, \dots, k$

$$f(P_g) \times f(P_h) \subset P_g \times P_h$$

d'où

$$f(P_g) \times f(P_h) \subset F_{i_g}$$

puisque la condition (3) est vérifiée pour la bande  $B$ .

On a par conséquent

$$(22) \quad \left[ \sum_{g=1}^h f(P_g) \right] \times f(P_{h+1}) \subset F_{i_h}.$$

La cloison  $F_{i_h}$  étant selon (8) la base finale de  $P_h$ , elle ne contient en vertu de (14) que la base finale de  $f(P_h)$ . D'autre part, la même cloison étant selon (8) la base initiale de  $P_{h+1}$ , elle ne contient en vertu de (14) que la base initiale de  $f(P_{h+1})$ . Or, la base finale de  $f(P_h)$  coïncidant par hypothèse avec celle de  $\sum_{g=1}^h f(P_g)$ , le produit (22) se réduit à la base commune des bandes  $\sum_{g=1}^h f(P_g)$

et  $f(P_{h+1})$ . Ces deux bandes sont donc contigues et leur somme constitue en vertu de (9) une bande nouvelle dont la base finale coïncide avec celle de  $f(P_{h+1})$ .

Ainsi il est établi que  $f(B, S)$  est une bande. En vertu de (13) on peut admettre la convention suivante :

(23) *la bande  $f(B, S)$  a pour point initial le point initial de  $B$  et les bases de  $f(B, S)$  sont situées respectivement sur celles de la bande  $B$ .*

Par cela l'ordre des carrés de  $f(B, S)$  se trouve déterminé. On remarquera que dans le cas où  $F_0 \times F_m = 0$  la bande  $f(B, S)$  effectue une sorte d'oscillation dans chaque partie de  $B$  déterminée par  $S$ . En particulier, lorsque  $S$  se réduit à  $F_0$  et  $F_m$  on a

$$f(B, S) = f(B).$$

La convention (23) implique que

(24) *la propriété (14) de  $f(B)$  subsiste pour  $f(B, S)$ .*

On peut prouver également que

(25) *la propriété (17) de  $f(B)$  subsiste pour  $f(B, S)$ .*

Supposons en effet que quatre carrés d'inflexion de  $f(B, S)$  soient successifs. D'après (17) ces carrés ne peuvent pas être situés dans une bande  $f(P_h)$ .

D'autre part, on a vu déjà (page 253) que deux carrés d'inflexion contigus d'un  $H_1$  ou  $H_2$  sont situés toujours à un sommet commun de deux carrés  $C_i$  et  $C_{i+1}$  de  $B$ . Par conséquent, si les quatre carrés en question se trouvaient situés

dans deux bandes  $f(P_h)$  et  $f(P_{h+1})$ , une d'elles en contiendrait au moins deux et on aurait

$$F_{i_h-3} \times F_{i_h} \neq 0 \quad \text{et} \quad F_{i_h} \times F_{i_h+1} \neq 0$$

ou bien

$$F_{i_h-2} \times F_{i_h} \neq 0 \quad \text{et} \quad F_{i_h} \times F_{i_h+2} \neq 0$$

ou bien

$$F_{i_h-1} \times F_{i_h} \neq 0 \quad \text{et} \quad F_{i_h} \times F_{i_h+3} \neq 0.$$

Il en résulte d'après (20) que

$$F_{i_h-3} \times F_{i_h+1} \neq 0 \quad \text{ou bien} \quad F_{i_h-2} \times F_{i_h+2} \neq 0 \quad \text{ou bien} \quad F_{i_h-1} \times F_{i_h+3} \neq 0$$

contrairement à (4).

Enfin, si les quatre carrés envisagés étaient disposés dans plus de deux bandes  $f(P_h), f(P_{h+1}), \dots, f(P_{h+l})$  où  $l \leq 4$ , une au moins de ces bandes ne serait composée que des carrés d'inflexion, le nombre de ces carrés ne dépassant pas 2. Une telle bande est donc représentée par la formule (12) et ses bases ont par conséquent un point commun.

Dans toutes les trois alternatives, qui peuvent alors se présenter, on prouve par un raisonnement analogue au précédent que ce point se trouve situé, en vertu de (20), sur plus que trois cloisons de  $B$ , contrairement à (4).

La suite  $\{Q_n\}$ . La définition de la fonction  $f(R, S)$  a été établie dans l'hypothèse que  $S$  est une suite extraite de (5). Je vais étendre cette définition au cas où  $S$  est formé par des segments quelconques qui servent de cotés aux mailles d'un réseau arbitraire  $R_n (n \leq \infty)$ .

Désignons notamment par  $S'$  la suite qui contient les bases de  $B$  et toutes les cloisons de cette bande situées sur les segments de  $S$  et posons

$$f(B, S') = f(B, S).$$

Ceci établi, envisageons une suite infinie quelconque

$$(26) \quad S_0, S_1, \dots, S_n, \dots$$

où  $S_n$  désigne un ensemble quelconque de segments du réseau  $R_n$ .

Soit  $Q_0$  le carré de réseau  $R_0$  à sommets opposés  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ . Ce carré sera considéré comme une bande du réseau  $R_0$ . Convenons que son côté parallèle à l'axe des  $x$  soit la base initiale de  $Q_0$ , que le côté situé sur cet axe soit la base finale de  $Q_0$  et que le point  $(0, 1)$  en soit le point initial. C'est donc le point  $(1, 0)$  qui est le point final de  $Q_0$ .

Enfin posons pour tout  $n \geq 1$

$$(27) \quad Q_n = f(Q_{n-1}, S_{n-1})$$

et

$$(28) \quad \mathcal{K} = \prod_{n=0}^{\infty} Q_n.$$

Tout  $Q_n$  est donc une bande du réseau  $R_n$  contenue dans  $Q_{n-1}$ . En vertu de (23) et (27) tout  $Q_n$  a le point  $(0, 1)$  pour point initial et les bases de  $Q_n$  sont situées respectivement sur les droites  $y = 1$  et  $y = 0$ .

Il en résulte que  $\mathcal{K}$  contient le point  $(0, 1)$  et un point de l'axe des  $x$ . Comme produit d'une suite décroissante des continus qui ne se réduit pas à un point,  $\mathcal{K}$  est donc un continu.

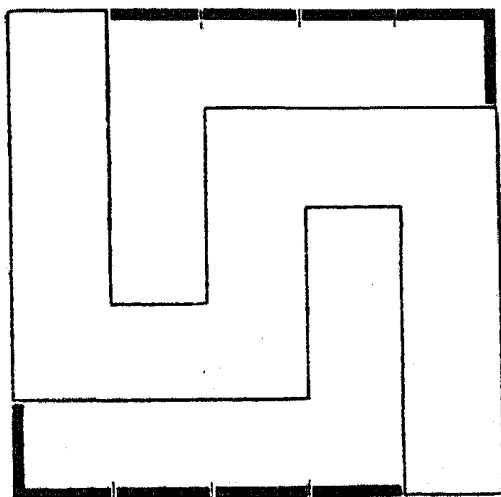


Fig. I.

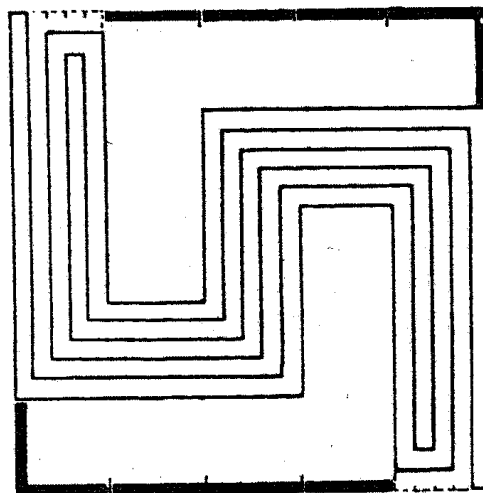


Fig. II.

Ces figures représentent respectivement les bandes  $Q_1$  et  $Q_2$ , inscrites dans  $Q_0$  dans l'hypothèse que  $S_1 = S_2$  n'est composée que de bases de  $Q_0$  et, par conséquent, que

$$Q_1 = f(Q_0) \quad \text{et} \quad Q_2 = f(Q_1).$$

Tous les continus que je définirai à l'aide de la méthode des bandes seront donnés par la formule (28), seule la suite (26), qui détermine le mode de subdivision des bandes  $Q_n$ , variant d'un cas à l'autre. Les propriétés de  $\mathcal{K}$  ne dépendent donc que de la définition de la suite (26), qui doit être par conséquent convenablement choisie.

**Bandes de passage.** Avant de passer aux propriétés topologiques de la méthode des bandes, je vais démontrer deux théorèmes auxiliaires concernant des propriétés géométriques de ces polygones.

Appelons pour plus de brièveté une bande  $B'$  d'un réseau quelconque *bande de passage par  $B$* , lorsque  $B' \subset B$  et les bases de  $B'$  sont situées respectivement sur celles de  $B$ .

Ainsi, par exemple,  $f(B)$  et  $f(B, S)$  sont en vertu de (13) et (23) des bandes de passage par  $B$ . De même, pour tout  $n_1 \leq n_2$  la bande  $Q_{n_2}$  est une bande de passage par  $Q_{n_1}$ .

**Théorème I.** *Étant donnée une bande (d'un réseau quelconque)*

$$B' = C'_1 + C'_2 + \dots + C'_{m'}.$$

*contenue dans  $B$  et contenant des carrés situés dans les carrés  $C_h$  et  $C_k$  ( $1 \leq h < k-1 < m$ ) de  $B$ , il existe dans  $B'$  une portion*

$$P' = C'_{i'+1} + C'_{i'+2} + \dots + C'_{j'-1} \quad (i' \geq 1, j' \leq m')$$

*qui est une bande de passage par la portion*

$$P = C_{h+1} + C_{h+2} + \dots + C_{k-1}$$

*de  $B$ .*

**Démonstration.** Posons

$$T_1 = C_1 + C_2 + \dots + C_h \quad \text{et} \quad T_2 = C_k + C_{k+1} + \dots + C_m.$$

Par hypothèse, il existe au moins deux carrés de  $B'$  dont l'un est contenu dans  $T_1$  et l'autre dans  $T_2$ . On peut supposer les carrés de la bande  $B'$  ordonnés de façon que le premier précède l'autre.

Soit donc  $C'_h \subset T_1$ ; soit  $C'_{j'}$  le premier des carrés de  $B'$ , contenus dans  $T_2$ , qui succède à  $C'_h$ ; soit enfin  $C'_{i'}$  le dernier des carrés de la portion  $C'_h + C'_{h+1} + \dots + C'_{j'}$ , qui sont situés dans  $T_1$ . On a donc  $i' \geq 1$  et  $j' \leq m'$ . Je vais prouver que la portion

$$P' = C'_{i'+1} + C'_{i'+2} + \dots + C'_{j'-1}$$

est une bande de passage par  $P$ .

On a en effet  $P' \subset P$  en vertu de la définition de  $i'$  et  $j'$ . Envisageons donc les bases  $F'_{i'}$  et  $F'_{j'-1}$  de  $P'$ .

Comme  $C'_i \subset T_1$  et  $C'_{i+1} \subset P$ , on a

$$C'_i \times C'_{i+1} \subset T_1 \times P$$

Or,  $C'_i \times C'_{i+1} = F'_{i'}$  et en vertu de (3)  $T_1 \times P \subset T_1 \times C_{h+1} = F_h$ . L'inclusion précédente donne par conséquent  $F'_{i'} \subset F_h$ . On démontre d'une façon tout à fait analogue que  $F'_{j'-1} \subset F_{k-1}$ . Les bases de  $P'$  sont donc situées sur celles de  $P$ , c. q. f. d.

**Théorème II.** *Étant données deux portions*

$$P = C_h + C_{h+1} + \dots + C_k, \quad T = C_j + C_{j+1} + \dots + C_l$$

(où  $h < j$  et  $k < l$ ) de  $B$  et deux portions

$$P' = C'_{h'} + C'_{h'+1} + \dots + C'_{k'}, \quad T' = C'_{j'} + C'_{j'+1} + \dots + C'_{l'}$$

de  $B'$ , dont  $P'$  est une bande de passage par  $P$  et  $T'$  par  $T$ , l'inégalité

$$P' \times T' \neq 0$$

entraîne que la plus petite portion de  $B'$  contenant  $P' + T'$  est une bande de passage par la plus petite portion de  $B$  contenant  $P + T$ .

**Démonstration.** Soit  $S$  la plus petite portion de  $B$  qui contient  $P + T$ . Si  $j \leq k + 1$ , on a évidemment

$$S = P + T.$$

Dans le cas contraire, on a selon (4)  $j = k + 2$ , puisque l'inégalité  $P' \times T' \neq 0$  implique, en vertu des hypothèses:  $P' \subset P$  et  $T' \subset T$ , que  $P \times T \neq 0$ . Le produit  $P \times T$  se réduit donc dans ce cas à un point et on a

$$S = P + C_{k+1} + T.$$

Ainsi, en tout cas, ce sont les cloisons  $F_{k-1}$  et  $F_l$  de  $B$  qui servent de bases à la portion  $S$ .

Ceci établi, envisageons les portions  $P'$  et  $T'$  de  $B'$ .

En vertu de l'hypothèse que  $h < j$  et  $k < l$  aucune des portions  $P$  et  $T$  n'est contenue dans l'autre.  $P'$  et  $T'$  étant des bandes de passage, tout carré de  $P$  contient des carrés de  $P'$  et tout carré de  $T$  contient des carrés de  $T'$ . Il en résulte donc qu'aucune des portions  $P'$  et  $T'$  n'est contenue dans l'autre. On peut évidemment supposer les carrés de la bande  $B'$  ordonnés de façon que ce soit  $P'$  qui contienne un carré qui précède ceux de  $T'$ . On aura par conséquent  $h' < j'$ , ce qui entraîne que  $k' < l'$ , puisqu'en cas contraire  $T'$  serait contenu dans  $P'$ .

Soit  $S'$  la plus petite portion de  $B'$  qui contient  $P' + T'$ . Si  $j' \leq k' + 1$ , on a  $S' = P' + T'$ . Dans le cas contraire, on a, en vertu de (4):  $j' = k' + 2$ , puisque, par hypothèse,  $P' \times T' \neq 0$ . Il en résulte que dans ce cas  $S' = P' + C'_{k'+1} + T'$ , le produit  $P' \times T'$  se réduisant à un seul point. En tout cas les inégalités  $h' < j'$  et

$k' < l'$  montrent que  $F'_{h-1}$  et  $F'_l$  sont les bases de  $S'$ . Or, elles montrent en même temps que  $S' \subset S$ .

En effet, on a par hypothèse  $P' + T' \subset P + T \subset S$ . Supposons donc que le carré  $C'_{k'+1}$  n'est pas situé dans  $P + T$ . Il en est donc de même du carré de  $B$  qui contient  $C'_{k'+1}$ . Cependant,  $C'_{k'+1}$  étant contigu aux carrés  $C'_k \subset P' \subset P$  et  $C'_{k'+2} \subset T' \subset T$ , chacun des produits  $C'_{k'+1} \times P$  et  $C'_{k'+1} \times T$  constitue un segment. Le carré de  $B$  qui contient  $C'_{k'+1}$  doit par conséquent avoir une segment commun avec chacune des portions  $P$  et  $T$ . Or, il n'existe dans une bande qu'un seul carré ayant des segments communs avec deux de ses portions sans y être contenu: à savoir, le carré situé entre ces portions. Comme le seul carré de  $B$  qui puisse être situé entre  $P$  et  $T$ , c'est le carré  $C_{k+1}$  (en cas où  $j = k + 2$ ), on a  $C'_{k'+1} \subset C_{k+1}$ , et comme  $C_{k+1} \subset S$ , on obtient  $C'_{k'+1} \subset S$ . L'inclusion  $S' \subset S$  est donc établie.

Il nous reste à prouver que  $F'_{h-1} \subset F_{h-1}$  et  $F'_l \subset F_l$ . Or,  $P'$  étant une bande de passage par  $P$ , il n'y a que  $F'_{h-1}$  et  $F'_k$  qui puissent être situés sur la base  $F_{h-1}$  de  $P$ .

Cependant, comme

$$F'_k = C'_k \times C'_{k'+1} \subset C'_{k'+1} \text{ et } F_{h-1} = C_{h-1} \times C_h \subset C_{h-1},$$

on a  $F_{h-1} \times F'_k \subset C_{h-1} \times C'_{k'+1}$ . Si  $j' \leq k' + 1$ , on a  $C'_{k'+1} \subset T' \subset T$ , d'où  $F_{h-1} \times F'_k \subset C_{h-1} \times T$ . Comme, par hypothèse  $h < j$ , le produit  $C_{h-1} \times T$  est vide ou se réduit à un point, à savoir au point  $F_{h-1} \times F_j$ . À plus forte raison il en est donc autant du produit  $F_{h-1} \times F'_k$ , et par conséquent  $F'_k$  n'est pas dans ce cas situé dans  $F_{h-1}$ .

Tout pareillement, lorsque  $j' = k' + 2$  et, par suite,  $C'_{k'+1}$  n'est pas situé dans  $T'$ , on a, comme on vient de voir,  $j = k + 2$  et  $C'_{k'+1} \subset C_{k+1}$ . On a donc dans ce cas  $F_{h-1} \times F'_k \subset C_{h-1} \times C_{k+1}$  et, la portion  $P$  étant interposée entre ces carrés, leur produit est vide ou se réduit au point  $F_{h-1} \times F_k$ . Il en est donc de même du produit  $F_{h-1} \times F'_k$ , de sorte qu'en tout cas  $F'_k$  n'est pas situé sur  $F_{h-1}$ . C'est donc  $F'_{h-1}$  qui remplit l'inclusion  $F'_{h-1} \subset F_{h-1}$ .

On démontre par un raisonnement analogue que  $F'_l \subset F_l$ . La portion  $S'$  est donc une bande de passage par  $S$ , c. q. f. d.

On remarquera que  $S'$  ne diffère de  $P' + T'$  que tout au plus d'un seul carré, à savoir, du carré  $C'_{k'+1} \subset C_{k+1}$ .

## Propriétés topologiques des bandes.

**Théorème III.**  $C_h$  et  $C_k$  étant deux carrés quelconques de la bande  $B$  et  $L$  désignant un sous-continu de cette bande, les inégalités

$$(29) \quad L \times C_h \neq 0 \quad \text{et} \quad L \times C_k \neq 0$$

entraînent l'inégalité

$$(30) \quad L \times F_i \neq 0$$

pour tout  $h \leq i \leq k$ .

**Démonstration.** Désignons respectivement par  $T_1$  et  $T_2$  les portions

$$C_1 + C_2 + \dots + C_i \quad \text{et} \quad C_{i+1} + C_{i+2} + \dots + C_m$$

de la bande  $B$ . On a en vertu de (4):  $T_1 \times T_2 = F_i$ . Les ensembles  $L \times T_1$  et  $L \times T_2$  étant fermés et, selon (29), non vides, on a  $L \times T_1 \times T_2 \neq 0$ , d'où  $L \times F_i \neq 0$ , c. q. f. d.

Comme, par définition,  $F_i \subset C_i$ , on peut remplacer  $F_i$  par  $C_i$  dans l'énoncé du théorème III, de sorte que l'inégalité (30) prenne la forme  $L \times C_i \neq 0$ .

Ce théorème montre que toute cloison ainsi que toute portion d'une bande coupe cette bande entre les carrés qui la précèdent et ceux qui la suivent.

Il en résulte, en particulier, que  $I_2$  coupe  $f(B)$  entre tout carré de  $I_1$  et de  $I_3 + I_4 + I_5$ ; de même  $I_4$  coupe cette bande entre tout carré de  $I_1 + I_2 + I_3$  et de  $I_5$ . Par conséquent, comme

$$I_2 \subset W(B) \quad \text{et} \quad I_4 \subset V(B),$$

chacune des portions  $W(B)$  et  $V(B)$  coupe la bande  $f(B)$  en deux parties (pourvu, bien entendu, que l'une des portions  $W(B)$  et  $V(B)$  ne soit pas contenue dans l'autre). Comme tout carré de  $B$  qui n'est situé ni dans  $W(B)$ , ni dans  $V(B)$  contient des carrés de  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I_5$ , on arrive au théorème suivant:

**Théorème IV.** Lorsque  $F_0 \times F_m = 0$  et  $B' = f(B)$ , il existe pour tout point  $p$  de  $B'$  un tel carré  $C'_i$  de  $B'$  que la distance

$$\varrho(p, C'_i) \leq \frac{4\sqrt{2}}{5^n} \quad \text{et que tout continu } M \text{ satisfaisant aux formules}$$

$$M \subset f(B), \quad (p) \subset M, \quad \text{et} \quad M \times C'_i \neq 0$$

remplit l'inégalité

$$(31) \quad M \times W(B) \neq 0.$$

Démonstration. Si  $(p) \subset W(B)$ , l'inégalité (31) est remplie en vertu de l'hypothèse que  $(p) \subset L$ . Admettons donc que le point  $p$  n'est pas situé dans  $W(B)$  et soit  $C_i$  le carré de  $B$  contenant ce point. Le carré  $C_i$  précède donc ceux de  $W(B)$ .

Comme  $(p) \subset f(B)$ , le point  $p$  est situé soit dans  $I_1$ , soit dans  $I_3 + I_4 + I_5$ . S'il est situé dans  $I_1$ , on désignera par  $C'_i$  un carré arbitraire de  $I_3 + I_4 + I_5$  situé dans  $C_i$ , lorsque  $i > 3$ , et dans  $C_4$  en cas contraire. Un tel carré de  $I_3 + I_4 + I_5$  existe dans  $C_i$ , puisque, en vertu de (16),  $C_4$  n'est pas contenu dans  $V(B)$ . La distance des deux points situés dans un même carré du réseau  $R_n$  ne dépassant pas  $\frac{\sqrt{2}}{5^n}$ , la distance  $\varrho(p, C'_i)$  ne dépasse pas  $\frac{\sqrt{2}}{5^n}$ , lorsque  $i > 3$ , et  $\frac{4\sqrt{2}}{5^n}$ , lorsque  $i < 4$ . Si, au contraire, le point  $p$  est situé dans  $I_3 + I_4 + I_5$ , on désignera par  $C'_i$  un carré quelconque de  $I_1$  situé dans  $C_i$ . Comme  $C_i$  précède les carrés de  $W(B)$ , un tel carré de la bande  $I_1$  existe en vertu de la définition de cette bande.

L'inégalité  $\varrho(p, C'_i) \leq \frac{4\sqrt{2}}{5^n}$  est donc remplie en tout cas.

Or,  $W(B)$  coupe la bande  $f(B)$  entre les carrés de  $I_1$  et ceux de  $I_3 + I_4 + I_5$ . Par conséquent le sous continu  $M$  de  $f(B)$  contenant des points situés dans ces deux bandes doit traverser  $W(B)$ . L'inégalité (31) est ainsi établie.

La propriété analogue subsiste pour  $V(B)$ , de sorte que l'on peut remplacer dans l'énoncé du théorème précédent  $W(B)$  par  $V(B)$ . L'inégalité (31) se transformera alors en  $M \times V(B) \neq \emptyset$ .

Je dis qu'un continu  $L$  est un *continu de passage*, lorsqu'il est produit d'une suite de bandes

$$B_n, B_{n+1}, B_{n+2}, \dots$$

satisfaisant pour tout  $r \geq n$  aux conditions suivantes

(32)  $B_r$  est une portion de  $Q_r$ .

(33)  $B_{r+1}$  est une bande de passage par  $B_r$ .

La condition (32) n'interviendra d'ailleurs que dans la discussion des exemples, où je m'appuierai sur les propriétés spéciales des bandes  $\{Q_n\}$ . Pour le moment je ne ferai usage que de la propriété de  $Q_r$  d'être une bande du réseau  $R_r$  inscrite dans  $Q_{r-1}$ .

La définition montre que

- (34) le continu de passage  $L$  contient des points situés sur les deux bases de  $B_r$  pour tout  $r \geq n$ .

Désignons, en effet, par  $F_0^{r+1}$  la base de  $B_{r+1}$  située sur la base  $F_0^r$  de  $B_r$  et par  $F_{m_r}^{r+1}$  l'autre base de  $B_{r+1}$ . Comme  $F_0^r \subset B_r$ , on a

$\prod_{r=n}^{\infty} F_0^r \subset \prod_{r=n}^{\infty} B_r = L$ . Or, l'ensemble  $\prod_{r=n}^{\infty} F_0^r$ , comme produit d'une suite décroissante des segments

$$F_0^n \supset F_0^{n+1} \supset F_0^{n+2} \supset \dots$$

(de longueur tendant vers 0) n'est pas vide en vertu du *Durchschnitts*-satz de G. Cantor (et se réduit à un point). Comme il est contenu dans tout  $F_0^r$  et dans  $L$ , on a pour tout  $r \geq n$   $L \times F_0^r \neq 0$ . On démontre l'inégalité  $L \times F_{m_r}^r \neq 0$  par un raisonnement tout à fait analogue. Ainsi la proposition (34) est démontrée.

On voit que tout continu  $\mathcal{K}$  défini par la formule (28) est toujours un continu de passage.

Désignons désormais par  $m_n$  le nombre de carrés du réseau  $R_n$  qui forment la bande  $Q_n$  et par  $C_i^n$  le  $i$ -ème carré de cette bande. Étant donné un sous continu quelconque  $M$  de  $\mathcal{K}$ , désignons par  $P_M^n$  la plus petite portion de  $Q_n$  qui contient  $M$ .

D'après cette notation on a  $M \subset P_M^n$ , quel que soit  $n$ , et comme les carrés extrêmes de  $P_M^n$  contiennent des points de  $M$ , le théorème III implique que

- (35) tout carré de  $P_M^n$  contient des points de  $M$ .

De même, pour tout  $n_1 < n_2$  les carrés de  $P_M^{n_1}$  contiennent des carrés de  $P_M^{n_2}$ . En effet, si un carré extrême de  $P_M^{n_1}$  ne contenait aucun carré de la portion  $P_M^{n_2}$ , cette dernière serait contenue dans la portion de  $Q_{n_1}$  plus petite que  $P_M^{n_1}$  et comme  $M \subset P_M^{n_2}$ , la portion  $P_M^{n_1}$  ne serait pas la plus petite portion de  $Q_{n_1}$  qui contienne  $M$ , contrairement à la définition de  $P_M^{n_1}$ .

Il en résulte donc en vertu du théorème III que

- (36) pour tout  $n_1 < n_2$  chaque carré de  $P_M^{n_1}$  contient au moins un carré de  $P_M^{n_2}$ .

La proposition (35) implique que l'on a

$$(37) \quad M = \prod_{n=0}^{\infty} P_M^n,$$

puisque le diamètre des carrés de  $P_M^n$  tend vers 0 lorsque  $n$  croît indéfiniment

**Théorème V.** Dans tout sous-continu  $M$  de  $\mathcal{H}$  il existe une suite infinie de continus de passage  $\{L_r\}$  telle que pour une suite infinie quelconque  $\{L_{r_i}\}$  extraite de  $\{L_r\}$  on a l'inégalité

$$(38) \quad \overline{\sum_{i=1}^{\infty} L_{r_i}} = M.$$

**Démonstration.** Envisageons la suite  $\{P_M^n\}$ . Le continu  $M$  ne se réduisant pas à un point, on peut évidemment trouver un  $n$  assez grand pour que la portion  $P_M^n$  contienne plus de deux carrés de  $Q_a$ . Soient  $C_{h_n}^n$  et  $C_{k_n}^n$  ses carrés extrêmes et posons:

$$B_0 = C_{h_{n+1}}^n + C_{h_{n+1}+1}^n + \dots + C_{k_{n+1}-1}^n$$

En posant dans le théorème I

$$B = P_M^n, \quad B' = P_M^{n+1} \quad \text{et} \quad P = B_0,$$

on en conclut en vertu de (36) qu'il existe dans  $P_M^{n+1}$  une portion

$$C_{i_{n+1}}^{n+1} + C_{i_{n+1}+1}^{n+1} + \dots + C_{j_{n+1}-1}^{n+1}$$

telle que

$$i_{n+1} \geq h_{n+1} \quad \text{et} \quad j_{n+1} \leq k_{n+1},$$

et que la bande

$$B_1 = C_{i_{n+1}+1}^{n+1} + C_{i_{n+1}+2}^{n+1} + \dots + C_{j_{n+1}-1}^{n+1}$$

est une bande de passage par  $B_0$ .

Supposons à présent que pour un  $r > 0$  il existe dans  $P_M^{n+r}$  une portion

$$B_r = C_{i_{n+r+1}}^{n+r} + C_{i_{n+r+1}+1}^{n+r} + \dots + C_{j_{n+r+1}-1}^{n+r}$$

qui est une bande de passage par  $B_{r-1}$  et que  $i_{n+r} \geq h_{n+r}$ ,  $j_{n+r} \leq k_{n+r}$ . Comme en vertu de (36) les carrés  $C_{i_{n+r}}^{n+r}$  et  $C_{j_{n+r}}^{n+r}$  contiennent des carrés de  $P_M^{n+r+1}$ , le théorème I implique l'existence d'une portion

$$B_{r+1} = C_{i_{n+r+1}+1}^{n+r+1} + C_{i_{n+r+1}+2}^{n+r+1} + \dots + C_{j_{n+r+1}-1}^{n+r+1}$$

de  $P_M^{n+r+1}$  qui est une bande de passage par  $B_r$  et telle que

$$i_{n+r+1} \geq h_{n+r+1}, \quad j_{n+r+1} \leq k_{n+r+1}.$$

Il existe donc une suite de bandes  $\{B_r\}$  qui remplit les conditions (32) et (33). Le produit

$$L_0 = \prod_{r=0}^{\infty} B_r$$

est donc un continu de passage.

Comme pour tout  $r > 0$ , on a  $B_r \subset P_M^{n+r}$ , on conclut que

$$L_0 = \prod_{r=0}^{\infty} B_r \subset \prod_{r=0}^{\infty} P_M^{n+r}, \text{ d'où selon (37) } L_0 \subset M$$

De plus, tout carré de  $P_M^n$  contient d'après le théorème III, des points de  $L_0$ . puisqu'en vertu de (34) le continu  $L_0$  contient des points situés sur les bases  $F_{h_n}^n = C_{h_n}^n \times C_{h_n+1}^n$  et  $F_{k_n-1}^n = C_{k_n-1}^n \times C_{k_n}^n$  de  $B$ . On en conclut selon (35) que  $p$  désignant un point arbitraire de  $M$ , on a

$$\varrho(p, L_0) \leq \frac{\sqrt{2}}{5^n}.$$

En procédant pour un  $r > 0$  avec la portion  $P_M^{n+r}$  tout comme je viens de le faire avec  $P_M^n$ , on montre que  $P_M^{n+r+1}$  contient un sous-continu  $L_r$ , qui est un continu de passage, et tel que  $p$  désignant un point arbitraire de  $M$ , on a l'inégalité

$$(39) \quad \varrho(p, L_r) \leq \frac{\sqrt{2}}{5^{n+r}}.$$

On parvient donc à une suite infinie  $\{L_r\}$  de continus de passage situés dans  $M$ . Étant donnée une suite infinie quelconque  $\{L_{r_i}\}$  extraite de  $\{L_r\}$  et un  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver pour tout point  $p$  de  $M$  un tel nombre naturel  $t$  que l'on ait l'inégalité

$$\frac{\sqrt{2}}{5^{n+r_i}} \leq \varepsilon$$

et, comme d'après (39)

$$\varrho(p, L_{r_i}) \leq \frac{\sqrt{2}}{5^{n+r_i}},$$

que l'on ait l'inégalité

$$\varrho(p, L_{r_i}) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, dans tout entourage d'un point arbitraire  $p$  de  $M$  on trouve des points de  $\sum_{i=1}^{\infty} L_{r_i}$ . L'égalité (38) est donc établie.

Les mêmes prémisses, que j'ai employées pour prouver l'existence dans la portion  $C_{h_r+1}^r + C_{h_r+2}^r + \dots + C_{k_r-1}^r$  de  $P_M^r$  du continu de passage  $L_r$  situé dans  $M$ , permettent de montrer aussitôt que

(40) toute portion  $P = C_{i_r}^r + C_{i_r+1}^r + \dots + C_{j_r}^r$  ( $h_r < i_r, j_r < k_r, r \geq n$ )

de  $P_M^r$  contient un continu de passage  $L = \prod_{r=1}^{\infty} B_r$  situé dans  $M$ ,

où  $B_1 = P$ .

Je m'appuierai sur cet énoncé dans la discussion de l'exemple  $\mathcal{H}_2$ .

**Théorème VI.** *La somme de deux continus de passage ayant des points communs est un continu de passage.*

**Démonstration.** Soient  $L$  et  $N$  deux continus de passage ayant des points communs et n'étant pas contenus l'un dans l'autre. Soit  $\{P^r\} (r \geq n_1)$  la suite des bandes de passage correspondante à  $L$  et  $\{T^r\} (r \geq n_2)$  la suite analogue correspondante à  $N$ .

On peut trouver un  $n$  plus grand que  $n_1$  et  $n_2$  et assez grand pour que chacune des bandes  $P^r$  et  $T^r$  pour tout  $r \geq n$  contienne des carrés qui ne sont pas situés dans l'autre. On aura donc

$$(41) \quad L = \prod_{r=n}^{\infty} P^r \quad \text{et} \quad N = \prod_{r=n}^{\infty} T^r.$$

Les suites (41) satisfaisant par hypothèse aux conditions (32) et (33), pour tout  $r \geq n$  la bande  $P^{r+1}$  est une bande de passage par  $P^r$  et  $T^{r+1}$  par  $T^r$ . Comme d'après l'hypothèse, on a  $L \times N \neq 0$ , la somme  $L + N$  est un continu. En même temps cette inégalité entraîne pour tout  $r \geq n$  que  $P^r \times T^r \neq 0$ . En désignant par  $S^r$  la plus petite portion de  $Q_r$  qui contient  $P^r + T^r$ , on conclut, en posant dans l'énoncé du théorème II:

$$\begin{array}{lll} P = P^r & T = T^r & S = S^r \\ P' = P^{r+1} & T' = T^{r+1} & S' = S^{r+1} \end{array}$$

que  $S^{r+1}$  est une bande de passage par  $S^r$ , quel que soit  $r \geq n$ .

La suite  $\{S^r\}$  satisfait donc également aux conditions (32) et (33), ce qui prouve que le produit  $\prod_{r=n}^{\infty} S^r$  est un continu de passage.

Or, d'après (34)  $L$  contient des points des deux bases de  $P^r$  et  $N$  contient de ceux des deux bases de  $T^r$  pour tout  $r \geq n$ . Tout  $S^r$  ayant, par définition, pour bases une des bases de  $P^r$  et une de celles de  $T^r$ , le continu  $L + N$  a des points communs avec les deux bases de tout  $S^r$ . Il en résulte en vertu du théorème III que tout carré de  $S^r$  contient des points de  $L + N$ , quel que soit  $r \geq n$ . On en conclut donc que

$$L + N = \prod_{r=n}^{\infty} S^r \quad \text{c. q. f. d.}$$

**Théorème VII.**  $L$  étant un continu de passage et  $\{B_r\}$  la suite correspondante à  $L$  — si on a pour une infinité de valeurs de  $r$ :

$$(42) \quad B_{r+1} = f(B_r),$$

le continu  $L$  est indécomposable.

Démonstration. On a par hypothèse

$$L = \prod_{r=n}^{\infty} B_r$$

Admettons que  $L$  ne se réduit pas à un point. Pour démontrer que  $L$  est un continu indécomposable, il suffit de prouver que tout vrai sous-continu de  $L$  en est un continu de condensation<sup>1)</sup>, c'est-à-dire, que  $M$  désignant un vrai sous-continu quelconque de  $L$  et  $p$  un point arbitraire de  $M$ , on trouve des points de l'ensemble  $L - M$  situés à une distance de  $p$  aussi petite que l'on veut. On l'exprime tout court par la formule  $\overline{L - M} = L$ .

Soit  $q$  un point de  $L - M$ . Parmi les nombres satisfaisant à l'égalité (42) on peut trouver un  $r$  assez grand pour que l'on ait:

$$\varrho(q, M) > \frac{3\sqrt{2}}{5^r}.$$

La bande  $B_r$  contient alors au moins trois carrés successifs (dont un contient en tout cas le point  $q$ ) et qui sont tous disjoints

<sup>1)</sup> S. Janiszewski et C. Kuratowski, l. c. p. 212, théorème II.

de  $M$ . Il en résulte en vertu du théorème III que soit trois premiers, soit trois derniers carrés de  $B_r$  sont disjoints de  $M$ . On peut évidemment admettre que c'est la première de ces alternatives qui se présente.  $B_r$  contenant plus que trois carrés du réseau  $R_r$ , les bases de  $B_r$  sont selon (6) disjointes et par suite c'est la formule (11) qui représente la bande  $f(B_r)$ . En vertu de (16) on a donc

$$(43) \quad M \times V(B_r) = 0.$$

Or, d'après le théorème IV, il existe dans  $f(B_r)$  un tel carré  $C_{r+1}^{r+1}$  que l'on ait

$$(44) \quad \varrho(p, C_{r+1}^{r+1}) \leq \frac{4\sqrt{2}}{5^r}$$

et que les formules

$$M \subset f(B_r) \quad (p) \subset M \quad M \times C_{r+1}^{r+1} \neq 0$$

entraînent l'inégalité  $M \times V(B_r) \neq 0$ .

La formule (43) implique donc par contraposition que

$$(45) \quad M \times C_{r+1}^{r+1} = 0.$$

En même temps,  $C_{r+1}^{r+1}$  étant en vertu de (42) un carré de la bande  $B_{r+1}$ , le théorème III implique selon (34) que  $L \times C_{r+1}^{r+1} \neq 0$ . Soit donc  $g$  un point de  $L \times C_{r+1}^{r+1}$ . On a d'après (45)

$$(g) \subset L - M$$

et, le diamètre du carré  $C_{r+1}^{r+1}$  étant  $\frac{\sqrt{2}}{5^{r+1}}$ , l'inégalité (44) donne

$$(46) \quad \varrho(p, g) \leq \frac{4\sqrt{2}}{5^r} + \frac{\sqrt{2}}{5^{r+1}} < \frac{\sqrt{2}}{5^{r-1}}.$$

Comme le nombre  $r$  peut être par hypothèse aussi grand que l'on veut, la distance  $\varrho(p, g)$  pour un  $p$  fixe peut être faite en vertu de (46) inférieure à tout  $\varepsilon > 0$  donné à l'avance, c. q. f. d.

**Corollaire VIII.** Si pour une infinité de valeurs de  $n$  on a  $Q_{n+1} = f(Q_n)$ , le continu  $\mathcal{H}$  est indécomposable.

Le théorème VII qui vient d'être démontré est essentiel pour la méthode de construction des bandes  $\{Q_n\}$  présentée ici. Il garantit la formation des sous-continus indécomposables de  $\mathcal{H}$  entre toutes deux cloisons arbitrairement choisies dans un  $Q_n$ , pourvu que la suite  $S_n$  ait été définie de façon que l'opération  $f$  soit effectuée une infinité de fois sur les portions situées entre ces cloisons.

Ce théorème nous donne donc un moyen de condenser autant que l'on veut la propriété d'un continu de contenir les sous-continus indécomposables. Les exemples  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$ , que je vais construire, en présentent trois degrés d'application.

On remarquera aussi que la méthode des bandes se prête immédiatement à une généralisation sur l'espace à  $n > 2$  dimensions, sans que les propriétés fondamentales de la „méthode des tubes“ ainsi conçue diffèrent de celles qui ont été établies pour les bandes.

### Exemples.

( $\mathcal{H}_1$ ) Exemple d'un continu indécomposable. Assignons à tout terme  $S_n$  de la suite (26) une valeur constante; posons notamment

$$S_n = \text{les bases de } Q_0.$$

Comme les bases de  $Q_0$  ne coupent par définition aucun  $Q_n$ , on a donc pour tout  $n > 0$

$$(47) \quad Q_n = f(Q_{n-1}, S_{n-1}) = f(Q_{n-1})$$

et, en vertu du corollaire VIII, le continu

$$\mathcal{H}_1 = \prod_{n=0}^{\infty} Q_n$$

est un continu indécomposable (voir fig. III, p. 270).

D'après un théorème de M. Mazurkiewicz<sup>1)</sup> il existe dans tout continu indécomposable trois points tels que ce continu est irréductible entre tous deux de ces points. Or, en remarquant que tout  $Q_n$  (et par suite le continu  $\mathcal{H}_1$ ) est symétrique par rapport au point  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , on peut prouver que  $\mathcal{H}_1$  est irréductible entre tous deux des points

$$(0, 1) \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad (1, 0).$$

Le continu  $\mathcal{H}_1$  équivaut au sens d'Analysis Situs<sup>2)</sup> à un continu que j'ai construit antérieurement d'une façon diffé-

<sup>1)</sup> S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les continus indécomposables*, *fund. Math.* I, p. 38.

<sup>2)</sup> Deux ensembles  $A$  et  $B$  sont équivalents au sens d'Analysis Situs, lorsque non seulement ils sont homéomorphes, mais aussi il existe une transformation biunivoque et bicontinue de l'espace (du plan) tout entier en lui même qui transforme  $A$  en  $B$ .

rente et dont M. Kuratowski a trouvé des applications intéressantes<sup>1)</sup>.

Le continu  $\mathcal{K}_1$  équivaut également dans le même sens au continu un peu plus compliqué, qui fut construit récemment par

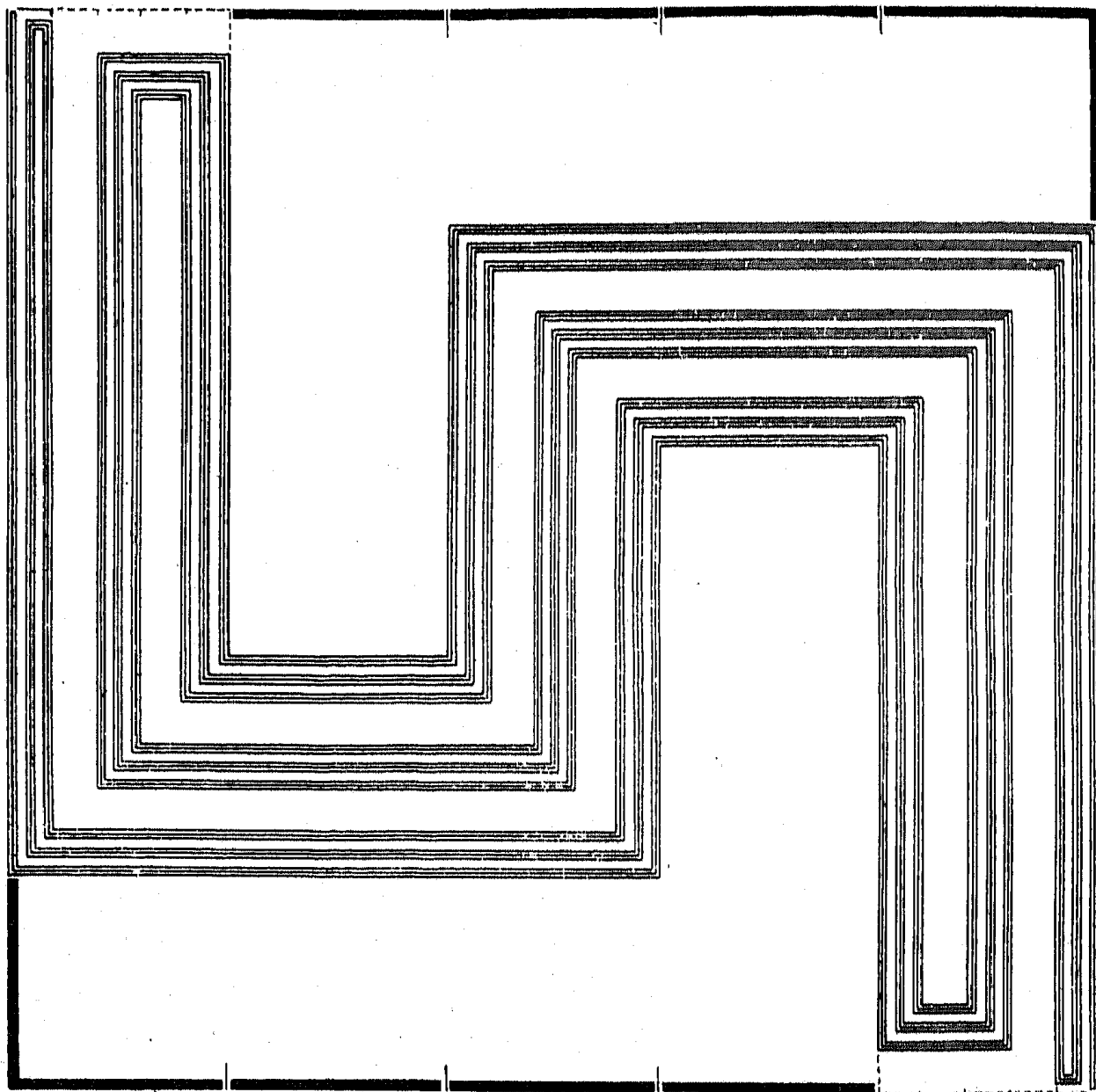


Fig. III.

Cette figure représente cinq premiers termes de la suite  $\{Q_n\}$  définis par la formule (47).

Les parties de  $Q_0$  qui ne sont pas comprises dans  $Q_1$  sont délimitées par un large trait noir, les parties analogues de  $Q_1$  par un trait fin discontinu et celles de  $Q_2$  par un trait fin continu.  $Q_3$  est représenté en blanc et  $Q_4$  en noir.

<sup>1)</sup> La définition remarquablement simple de ce continu (accompagnée d'une figure) est citée dans l'ouvrage: C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles*, Fund. Math. ce volume, p. 216

M. Vietoris<sup>1)</sup> à titre d'exemple d'un continu irréductible entre deux points  $a$  et  $b$  qui ne contient aucun ensemble connexe irréductible („Linienstück“) entre ces points.

Or, cette propriété est commune à tous les continus indécomposables irréductibles entre  $a$  et  $b$  (voir p. 286) et elle peut être condensée autant que l'on veut. Je vais démontrer notamment que le continu  $\mathcal{H}_3$  ne contient aucun ensemble connexe irréductible entre deux points, quels qu'ils soient.

( $\mathcal{H}_2$ ) Exemple d'un continu dont tout sous-continu contient des continus indécomposables. Le nombre naturel  $n$  étant mis sous la forme

$$n = 2^v + v \quad \text{où} \quad v < 2^n,$$

soit dans la formule (26)

(48)  $S_n =$  les bases et les cloisons de la bande  $Q_v$

Le continu  $\mathcal{H}_2 = \prod_{n=0}^{\infty} Q_n$  répond au problème.

Soit, en effet,  $M$  un sous-continu quelconque de  $\mathcal{H}_2$ . Je vais prouver qu'il contient un continu indécomposable.

$M$  ne se réduisant pas à un point, on peut trouver un nombre naturel  $v$  assez grand pour que  $P_M^v$  (c'est-à-dire la plus petite portion de  $Q_v$  contenant  $M$ ) soit composée de plus que cinq carrés. Il suffit pour cela que l'on ait

$$\delta(M) > \frac{5\sqrt{2}}{5^v},$$

$\delta(M)$  désignant le diamètre de  $M$ . Parmi les carrés de cette portion situés entre ses carrés extrêmes  $C_{h_v}^v$  et  $C_{k_v}^v$  se trouve au moins un qui n'est pas un carré d'inflexion, puisque, en vertu de (25), jamais quatre carrés successifs d'un  $Q_n$  ne sont des carrés d'inflexion.  $C_{i_v}^v$  désignant ce carré de  $P_M^v$ , on a donc

$$(49) \quad h_v < i_v < k_v$$

et

$$(50) \quad F_{i_v-1}^v \times F_{i_v}^v = 0.$$

<sup>1)</sup> Vietoris, *Stetige Mengen*, Monatschr. für Math. u. Phys. XXXI, Vienne 1921, p. 198.

L'inégalité (49) montre en vertu de (40) que  $C_{i_n}^v$  contient un continu de passage  $L$  situé dans  $M$  et tel que

$$B_v, B_{v+1}, B_{v+2} \dots$$

désignant la suite des bandes correspondante à  $L$ , on a  $B_v = C_{i_n}^v$ . En même temps l'inégalité (50) montre en vertu de (34) que  $L$

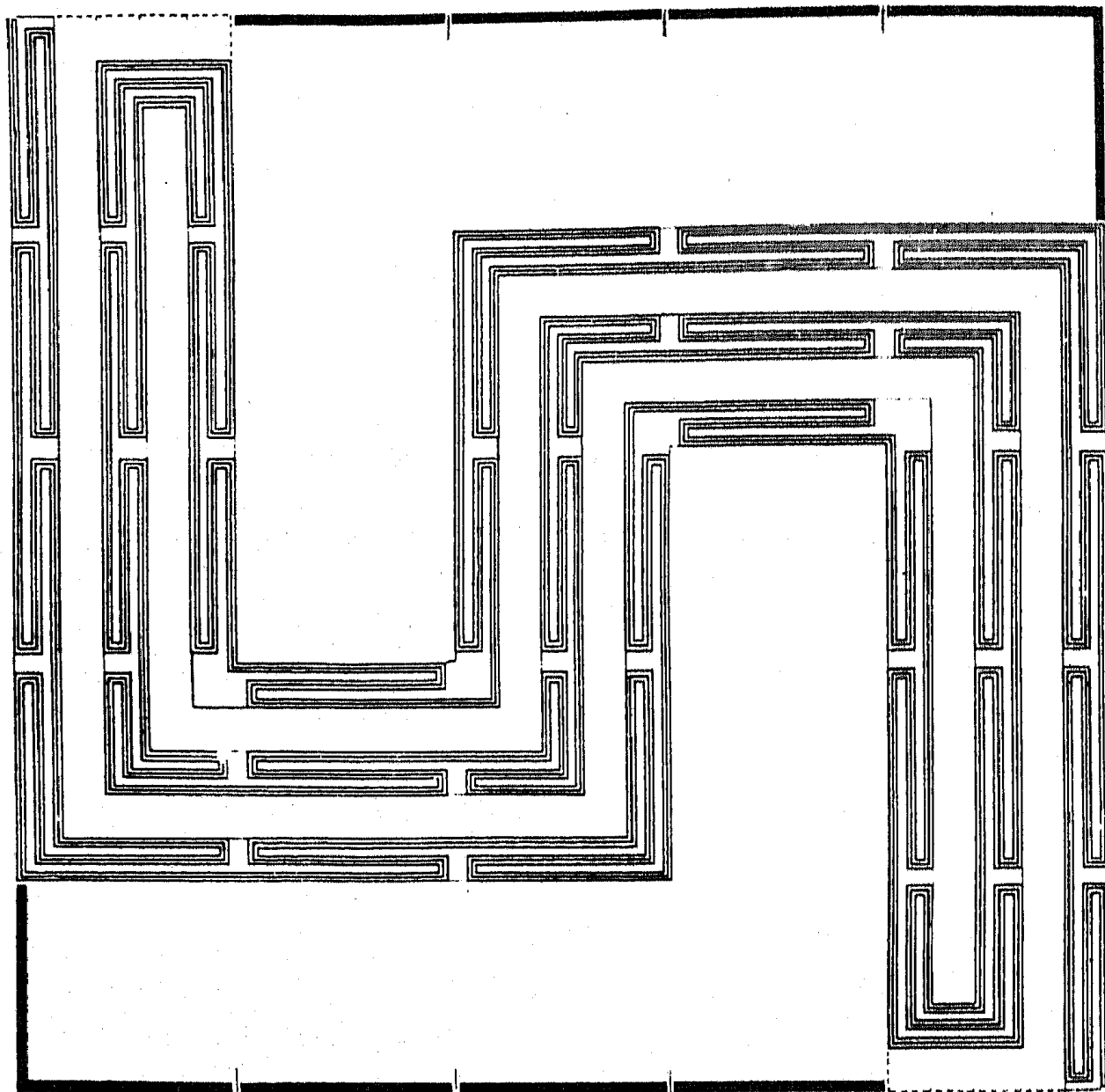


Fig. IV.

Cette figure représente cinq premiers termes de la suite  $\{Q_n\}$  déterminés selon la formule (48). Pour la description graphique se reporter à la fig. III.

ne se réduit pas à un seul point. Je dis que  $L$  est un continu indécomposable.

Soit  $r$  un nombre naturel quelconque de la forme

$$(51) \quad r = 2^n + v \quad \text{où} \quad v < 2^n.$$

On a donc par définition de  $S_n$  (la formule (48):

$$(52) \quad S_r = F_0^v, F_1^v, \dots, F_{m_r}^v.$$

Soit

$$(53) \quad F_0^r, F_{i_1}^r, F_{i_2}^r, \dots, F_{i_h}^r, \dots, F_{m_r}^r,$$

la suite composée de bases et de cloisons de  $Q_r$  situées sur celles de  $Q_v$ , c'est-à-dire, sur celles qui figurent dans la suite (52).

La suite (52) détermine — comme il a été dit, p. 254 — une décomposition de  $Q_r$  en  $k$  portions  $\{P_h\} (h=1, 2, \dots, k)$  telles que

$$(54) \quad f(Q_r, S_r) = \sum_{h=1}^k f(P_h), \quad \text{d'où selon (27)} \quad Q_{r+1} = \sum_{h=1}^k f(P_h).$$

La bande  $B_r$  étant en vertu de (33) une bande de passage par  $C_{i_v}^v$ , ses bases sont situées respectivement sur  $F_{i_v-1}^v$  et  $F_{i_v}^v$ ; elles figurent donc dans la suite (53). D'autre part elles y figurent l'une immédiatement après l'autre, car s'il n'en était pas ainsi, la cloison figurant dans (53) entre les bases de  $B_r$  serait une cloison de  $B_r$ ; or, aucune cloison de  $B_r$  n'est située sur un terme de (52), puisque  $B_r \subset C_{i_v}^v$ .

Ainsi, parmi les portions  $\{P_h\}$  il existe une qui est identique à  $B_r$ . On a donc d'après (54)  $f(B_r) \subset Q_{r+1}$ . Or,  $f(B_r)$  étant selon (13) une bande de passage par  $B_r$  et  $Q_{r+1}$  n'en contenant selon (54) aucune autre bande de passage par  $B_r$ , on a

$$B_{r+1} = f(B_r).$$

Cette égalité étant réalisée pour chaque valeur de  $r$  assujettie à la formule (51), on conclut en vertu du théorème VII que  $L$  est un continu indécomposable, c. q. f. d.

On remarque en outre qu'en posant  $M = \mathcal{H}_2$ ,  $C_{i_v}^v = Q_0$  et  $r = 0, 2^0, 2^1, \dots, 2^u, \dots$  on arrive à la conclusion que  $\mathcal{H}_2$  est lui-même un continu indécomposable. Comme la symétrie des  $Q_n$ , observée pour  $\mathcal{H}_1$ , persiste pour  $\mathcal{H}_2$ , on peut montrer que  $\mathcal{H}_2$  est également un continu irréductible entre tous deux des points

$$(0, 1) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (1, 0).$$

La propriété d'être un continu indécomposable étant un invariant de l'Analysis Situs, il en est de même de la propriété

de  $\mathcal{K}_2$ , d'après laquelle tout sous-continu de  $\mathcal{K}_2$  contient un continu indécomposable.

Or, cette propriété de  $\mathcal{K}_2$  en implique d'autres, (également invariantes) sur lesquelles je vais m'arrêter un instant.

Elle implique notamment que  $\mathcal{K}_2$  ne contient aucun arc simple, puisque tout sous-continu d'un arc simple est un arc simple, et partant, un continu décomposable. Comme, d'autre part toute ligne de Jordan contient un arc simple <sup>1)</sup>, il en résulte que

*$\mathcal{K}_2$  ne contient aucune ligne de Jordan.*

L'existence d'un continu qui ne contient aucune ligne de Jordan a été signalée par S. Janiszewski en 1912 dans une communication <sup>2)</sup> faite au Congrès International des Mathématiciens à Cambridge. On obtiendrait ce continu comme „limite d'une suite de

lignes dont la première est  $y = \sin \frac{1}{x}$  et les suivantes s'en obtiennent

par la méthode de condensation des singularités en remplaçant partout les arcs simples par des lignes homéomorphes de la première. Il faut cependant procéder de façon que les modifications introduites convergent suffisamment vite vers 0<sup>4</sup>. La remarque, qui accompagne cette brève indication, nous apprend que le même exemple était déjà connu de M. L. E. J. Brouwer.

Le passage cité ne peut évidemment servir ni de définition exacte ni de démonstration de la propriété considérée de ce continu et il paraît d'ailleurs impossible d'en donner une en des termes si concis. Or, autant que je sais, aucune définition d'un pareil continu n'a été publiée depuis, de sorte que  $\mathcal{K}_2$  serait le premier exemple d'un continu possédant la singularité en question.

Janiszewski a signalé l'application suivante de la ligne cantorienne ne contenant aucune ligne de Jordan: *une surface de cylindre construite sur une telle „ligne“, prise comme directrice* (c'est-à-dire, par exemple, la somme des normales dressées au plan  $z = 0$  à tous les points de  $\mathcal{K}_2$ ), *ne contient aucune image homéomorphe de l'intérieur d'un cercle.*

En effet, tous deux points de l'intérieur d'un cercle s'y laissent relier par un arc simple, tandis que deux points de cette „surface“ situés sur des génératrices différentes ne se laissent relier que par un continu dont la projection sur le plan  $z = 0$  contient un continu indécomposable.

<sup>1)</sup> S. Mazurkiewicz, *Sur l'arithmétisation des continus* (en polonais), C. R. de la Soc. des Sc. de Varsovie, 1913. R. L. Moore, *A theorem concerning continuous curves*, Bull. Amer. Math. Soc., t. XXIII, 1917.

<sup>2)</sup> *Ueber die Begriffe „Linie“ und „Fläche“*, p. 3.

Le continu  $\mathcal{H}_2$  fournit donc un exemple bien déterminé d'une surface pareille.

( $\mathcal{H}_3$ ) Exemple d'un continu dont tout sous-continu est indécomposable. Pour obtenir ce continu, je vais définir la suite (26) par induction à l'aide d'une suite auxiliaire

$$(55) \quad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

de nombres naturels.

Soit  $u_1 = 1$  et  $S_1 =$  les bases du carré  $Q_0$ .

Admettons que les  $u_p$  pour tous  $p \leq n$  ainsi que les  $S_q$  pour tous  $q \leq u_n$  soient définis. On en obtient la définition du nombre  $u_{n+1}$  et de la suite

$$(56) \quad S_{u_n+1}, S_{u_n+2}, \dots, S_{u_{n+1}}$$

de la façon suivante:

Considérons tous les couples

$$(57) \quad F_i^{u_n}, F_j^{u_n} \quad (0 \leq i < j \leq m_{u_n})$$

extraits de la suite

$$F_0^{u_n}, F_1^{u_n}, \dots$$

des bases et cloisons de la bande  $Q_{u_n} = f(Q_{u_n-1}, S_{u_n-1})$ . Soit  $t_n$  le nombre de ces couples (on prouve par voie de calcul que  $m_{u_n}$  désignant le nombre de carrés de  $Q_{u_n}$ , on a toujours  $t_n = \frac{m_{u_n}(m_{u_n}+1)}{2}$ ).

Posons

$$u_{n+1} = u_n + t_n$$

et rangeons les couples (57) en une suite, en désignant par  $S_{u_n+v}$  ( $1 \leq v \leq t_n$ ) le  $v$ -ème couple de cette suite.

Le nombre  $u_{n+1}$  et la suite (56) se trouve ainsi défini. Il en est donc de même de la suite (26) tout entière et de celle des  $Q_n$ .

Le continu

$$\mathcal{H}_3 = \prod_{n=0}^{\infty} Q_n$$

présente la singularité signalée.

Il s'agit de prouver que tout sous-continu de  $\mathcal{H}_3$  est un continu indécomposable. La démonstration résulte des trois propriétés suivantes de  $\mathcal{H}_3$ , que je vais établir au préalable.

(58) *Tout continu de passage  $L$  situé dans  $\mathcal{H}_3$  est indécomposable.*

$\{B_r\} (r \geq n_0)$  désignant la suite des bandes correspondante à  $L$ , soit  $u_n$  un nombre quelconque de la suite (55) plus grand que  $n_0$ . La définition de la suite (56) montre qu'il existe dans cette suite un terme  $S_r (u_n \leq r \leq u_{n+1})$  tel que l'on ait

$$S_r = \text{les bases de } B_{u_n}.$$

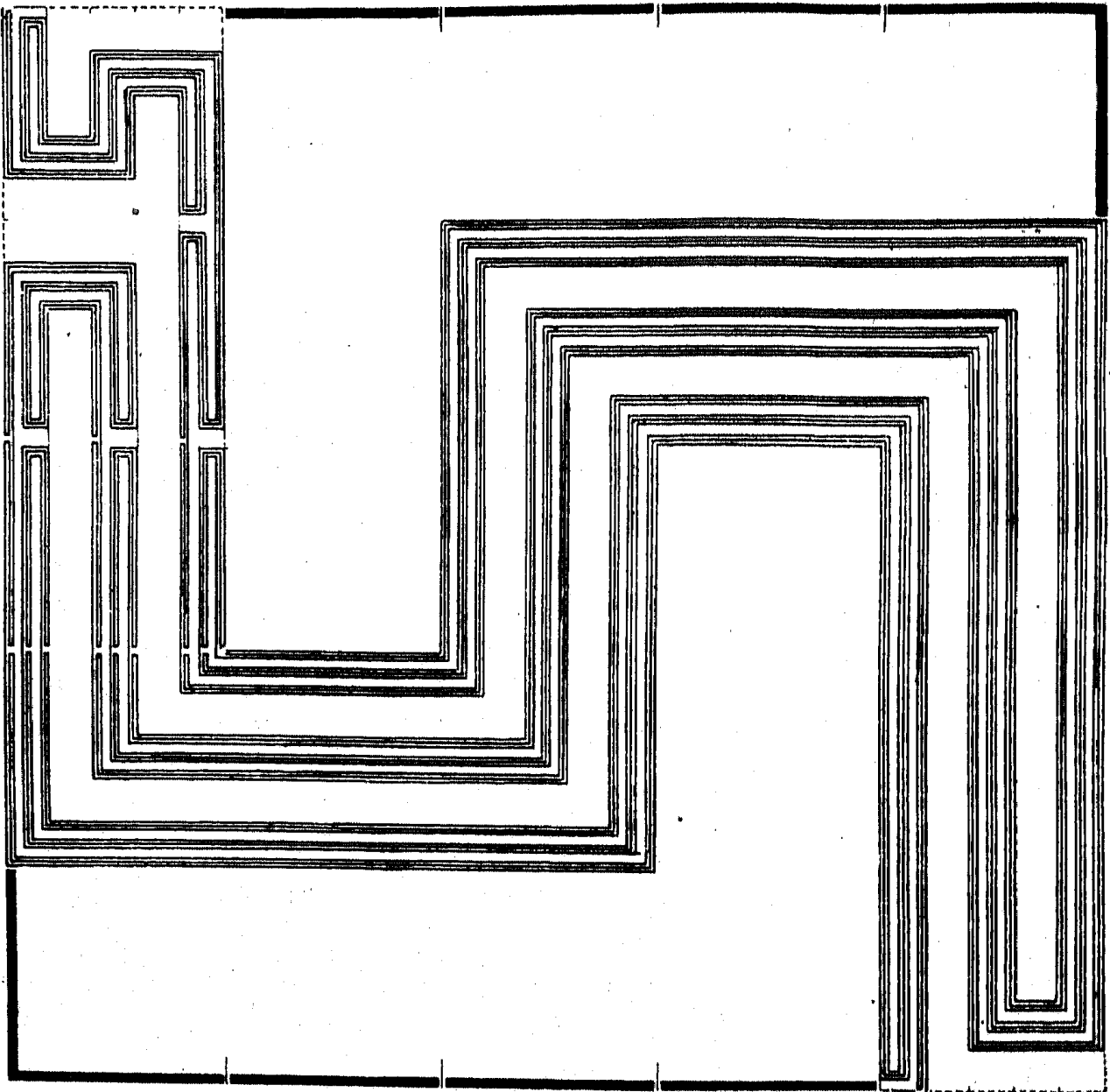


Fig. V.

Cette figure représente cinq premiers termes de la suite  $\{Q_n\}$ , en supposant les couples des bases et cloisons de  $Q_1$  ordonnés de façon que l'on ait:

$$S_1 = F_0^1, F_1^1; \quad S_2 = F_1^1, F_2^1 \quad \text{et} \quad S_3 = F_2^1, F_3^1.$$

On voit que les bandes  $Q_2, Q_3, \dots$  ne sont pas symétriques dans ce cas.

La description graphique coïncide avec celle de la fig. III, p. 270.

J'affirme que

$$(59) \quad B_{r+1} = f(B_r).$$

Le couple  $S$ , détermine une décomposition de la bande  $Q_r$  en portions

$$P_1^r, P_2^r, \dots, P_{h_r}^r, \dots, P_{k_r}^r$$

et on a selon (21) et (27)

$$(60) \quad Q_{r+1} = \sum_{h_r=1}^{k_r} f(P_{h_r}^r).$$

Comme les bases de  $B_r$  sont en vertu de (33) situées sur celles de  $B_{u_n}$  et aucune cloison de  $B_r$  n'y est située (puisque on a  $B_r \subset B_{u_n}$ ), il existe une telle valeur de  $h_r$  que  $B_r = P_{h_r}^r$ . Or,  $f(B_r)$  étant selon (13) une bande de passage par  $B_r$  et en même temps la seule qui soit — d'après (60) — contenue dans  $Q_{r+1}$ , on obtient, en vertu de (32), précisément l'égalité (59).

Comme il existe une infinité de valeurs de  $n$  telles que  $u_n > n_0$  et, par conséquent, une infinité de valeurs de  $r$  ( $u_n \leq r \leq u_{n+1}$ ) qui remplissent la formule (59), on en conclut en vertu du théorème VII

que le continu de passage  $L = \prod_{r=n_0}^{\infty} B_r$  est indécomposable.

(61) *M étant un sous-continu quelconque de  $\mathcal{H}_3$ , tout continu de passage  $L$  tel que  $L \subset M$  et  $L \neq M$  est un continu de condensation de  $M$ .*

Il existe d'après le théorème V, une suite  $\{L_r\} (r \geq 0)$  de continus de passage telle que pour une suite infinie quelconque

$$(62) \quad r_1, r_2, \dots, r_i, \dots$$

on a

$$(63) \quad M = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} L_{r_i}}.$$

Or, si pour tout  $t \geq 1$  on a  $L \times L_{r_t} = 0$ , on conclut que

$$\sum_{i=1}^{\infty} L_{r_i} \subset M - L, \text{ d'où } \sum_{i=1}^{\infty} L_{r_i} \subset \overline{M - L} \text{ et en vertu de (63):}$$

$$M = \overline{M - L},$$

ce qui prouve que  $L$  est continu de condensation de  $M$ .

Supposons donc qu'à partir d'un certain  $r = r'$  on ait

$$(64) \quad L \times L_r \neq 0.$$

Il en résulte qu'à partir d'un certain  $r = r''$  on a

$$(65) \quad L \neq L + L_r.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait former la suite (62) de façon que l'on ait pour tout  $t \geq 1$

$$L = L + L_{r_t}$$

d'où  $L = L + \sum_{t=1}^{\infty} L_{r_t}$  et,  $L$  étant par définition un ensemble fermé,

$$L = L + \overline{\sum_{t=1}^{\infty} L_{r_t}}, \text{ ce qui implique selon (63) que } L = L + M. \text{ Or,}$$

comme  $L \subset M$ , on aurait donc  $L = M$ , contrairement à l'hypothèse.

Ainsi  $r_0$  désignant le plus grand des nombres  $r'$  et  $r''$ , il est établi que les inégalités (64) et (65) subsistent simultanément pour tout  $r \geq r_0$ .

Cependant, le continu  $L + L_r$  est, selon le théorème VI, un continu de passage. Il est donc en vertu de (58) un continu indécomposable.  $L$  étant d'après (65) un vrai sous-continu de  $L + L_r$ , on conclut que  $L$  est un continu de condensation de  $L + L_r$ , donc à plus forte raison, de  $M$ , puisque  $L + L_r \subset M$ . La propriété (61) est ainsi établie.

(66)  *$N$  étant un sous-continu arbitraire de  $\mathcal{H}_3$  et  $L$  un continu de passage situé dans  $\mathcal{H}_3$ , les inégalités*

$$N \times L \neq 0 \quad \text{et} \quad N - L \neq 0$$

*entraînent l'inclusion  $L \subset N$ .*

En vertu de (61)  $L$  est un continu de condensation du continu  $N + L$ , c'est-à-dire, que l'on a

$$\overline{(N + L)} - L = N + L.$$

Il en résulte selon l'identité  $(N + L) - L = N - L$  que

$$\overline{N - L} = N + L$$

et comme on a toujours pour les ensembles fermés

$$\overline{N-L} \subset N \subset N+L,$$

on conclut que  $N = N+L$ , d'où  $L \subset N$ .

Ceci établi, je passe à la démonstration que *tout sous-continu  $M$  de  $\mathcal{H}_3$  est indécomposable*. Il s'agit de prouver que tout vrai sous-continu  $N$  de  $M$  est un continu de condensation de  $M$ .

Posons donc

$$(67) \quad N \subset M \text{ et } M - N \neq 0$$

et soit, comme auparavant,  $\{L_r\}$  la suite des continus de passage situés dans  $M$  et établis par le théorème V. En vertu de ce théorème,  $N$  ne peut contenir une infinité  $\{L_r\}$  de ces continus de

passage, car on aurait  $M = \sum_{r=1}^{\infty} L_r \subset N$  et, par suite,  $M - N = 0$ ,

contrairement à (67). Il en résulte par contraposition de (66) que dans le cas où  $N \times L_r \neq 0$  pour une infinité de valeurs de  $r$ , on a  $N - L_r = 0$ , d'où  $N \subset L_r$ . Or, tout  $L_r$  étant d'après (61) un continu de condensation de  $M$ , il en est de même de  $N$  à plus forte raison.

Il ne nous reste donc à envisager que le cas contraire, notamment celui, où à partir d'un certain  $r = r_0$  on a  $N \times L_r = 0$ . Or, on a dans ce cas  $\sum_{r=r_0}^{\infty} L_r \subset M - N$ , d'où  $\sum_{r=r_0}^{\infty} L_r \subset \overline{M - N}$ . En posant dans le théorème V  $r_t = r_0 + t$ , on en conclut que  $M = \overline{M - N}$ , ce qui prouve que  $N$  est dans ce cas également un continu de condensation de  $M$ , c. q. f. d. Il est donc établi que  $\mathcal{H}_3$  ne contient que des continus indécomposables<sup>1)</sup>.

Je vais discuter, pour terminer, quelques problèmes de topologie qui se rattachent étroitement à cette singularité de  $\mathcal{H}_3$  et qu'elle permet facilement de résoudre.

**Problèmes connexes.** Appelons  $\omega$  la propriété d'un continu de ne contenir que des continus indécomposables et désignons par  $K$  un continu borné quelconque jouissant de la propriété  $\omega$  (cette propriété est évidemment aussi un invariant de l'Analysis Situs).

<sup>1)</sup> Il en résulte immédiatement que  $\mathcal{H}_3$  ne contient à plus forte raison aucune ligne de Jordan.

**1. Théorème.** *Pour qu'un continu borné  $K$  possède la propriété  $\omega$ , il suffit que tout vrai sous-continu de  $K$  soit indécomposable.*

Démonstration. Supposons, par contre, que l'on ait

$$(68) \quad K = K_1 + K_2 \quad \text{où} \quad K_1 \neq K \neq K_2.$$

Soit  $a$  un point quelconque de l'ensemble  $K_1 \times K_2$  et  $b$  un point arbitraire de l'ensemble  $K_2 - K_1$  situé sur le composant  $\mathfrak{P}(a, K_2)^1$  de  $K_2$ . Un tel point existe, puisque  $K_2$  étant par hypothèse un vrai sous-continu de  $K$ , il est un continu indécomposable borné, ce qui implique que tout composant de  $K_2$  est dense dans  $K_2$  <sup>2</sup>).  $H$  désignant un continu tel que

$$(a) + (b) \subset H \subset \mathfrak{P}(a, K_2),$$

on n'a ni  $H \subset K_1$  (puisque  $b$  appartient à  $H - K_1$ ), ni  $K_1 \subset H$  (puisque cette inclusion entraîne  $K_1 \subset K_2$  et, par suite,  $K = K_2$ , contrairement à l'hypothèse).

Ainsi on a  $K_1 \neq K_1 + H \neq K$ , ce qui prouve que le continu  $K_1 + H$  est décomposable. Il en résulte par hypothèse que  $K_1 + H$  n'est pas un vrai sous-continu de  $K$ . On a donc  $K = K_1 + H$ , d'où  $K - H \subset K_1$  et

$$(69) \quad \overline{K - H} \subset K_1.$$

Or,  $K_2$  étant un continu indécomposable et  $H$  étant par définition un vrai sous-continu de  $K_2$ , on conclut que  $H$  est un continu de condensation de  $K_2$ , donc à plus forte raison, de  $K$ , puisque  $K_2 \subset K$ . Par conséquent  $\overline{K - H} = K$ , ce qui implique en vertu de (69) que  $K \subset K_1$ , et, comme on a d'autre part  $K_1 \subset K$ , on obtient l'égalité  $K_1 = K$ , contrairement à l'hypothèse. La décomposition (68) de  $K$  est donc impossible, c. q. f. d.

**2.** Désignons par  $\mathfrak{R}$  la classe de tous les sous-continus de  $K$  qui contiennent un point donné  $p$  de  $\mathfrak{R}$  (l'ensemble composé du seul point  $p$  étant aussi regardé comme continu). La classe  $\mathfrak{R}$  possède les propriétés suivantes:

<sup>1</sup>) C'est-à-dire, l'ensemble de tous les points de  $K_2$  qui peuvent être reliés au point  $a$  par un vrai sous-continu de  $K_2$  (S. Janiszewski et O. Kuratowski, l. c., p. 218).

<sup>2</sup>) l. c. p. 220, lemme. Ce lemme ne subsiste pas pour les continus non-bornés.

- (70) Elle est ordonnée selon la grandeur, c'est-à-dire, que  $K_1$  et  $K_2$  désignant deux éléments arbitraires de  $\mathfrak{K}$ , on a

$$K_1 \subset K_2 \quad \text{ou} \quad K_2 \subset K_1.$$

En effet, comme  $K_1 \times K_2 \supset (p) \neq 0$ , la somme  $K_1 + K_2$  est un continu. Ce continu est indécomposable en vertu de l'hypothèse que  $K$  possède la propriété  $\omega$ . On a donc soit  $K_1 = K_1 + K_2$ , soit  $K_2 = K_1 + K_2$ , ce qui entraîne que  $K_1 \subset K_2$  ou  $K_2 \subset K_1$ .

- (71) Le type d'ordre de la classe  $\mathfrak{K}$  est celui du continu linéaire, c'est-à-dire, de l'ensemble  $0 \leq x \leq 1$  ordonné selon la grandeur.

Le type d'ordre de  $\mathfrak{K}$  n'admet pas de lacunes. En effet, soient  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  deux sous classes de  $\mathfrak{K}$  telles que

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{A} \neq 0 \neq \mathfrak{B}$$

et que tout élément de  $\mathfrak{A}$  soit un sous-continu des éléments de  $\mathfrak{B}$ .

$S$  désignant la somme de tous les continus qui appartiennent à  $\mathfrak{A}$ ,  $\bar{S}$  est un continu appartenant à  $\mathfrak{K}$ . De plus,

si  $X$  appartient à  $\mathfrak{A}$ , on a  $X \subset S \subset \bar{S}$

si  $X$  appartient à  $\mathfrak{B}$ , on a  $S \subset X$ , d'où  $\bar{S} \subset X$ .

$\bar{S}$  est donc le dernier élément de  $\mathfrak{A}$  ou le premier élément de  $\mathfrak{B}$ .

Pour démontrer que le type d'ordre de  $\mathfrak{K}$  est celui du continu, il nous reste donc à définir une suite

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

de sous-continus de  $K$  qui remplisse la condition:  $K_1$  et  $K_2$  étant deux éléments différents de  $\mathfrak{K}$  (où  $K_1 \subset K_2$ ), il existe un  $n$  tel que

$$K_1 \subset M_n \subset K_2 \quad \text{et} \quad K_1 \neq M_n \neq K_2.$$

Considérons la suite des sphères de centres et rayons rationnels et ne contenant pas de point  $p$ . En désignant par  $U_n$  l'intérieur de la  $n$ -ème sphère, soit  $M_n$  le plus grand sous-continu de  $K - U_n$  qui contienne  $(p)$ . Or, il existe un  $n$  tel que

$$(72) \quad K_1 \times U_n = 0 \quad \text{et} \quad K_2 \times U_n \neq 0.$$

Comme  $M_n$  appartient par définition à  $\mathfrak{K}$ , on a, selon (70)

$$K_1 \subset M_n \quad \text{et} \quad M_n \subset K_2.$$

D'autre part,  $M_n$  contenant des points frontières de  $U_n$ <sup>1)</sup>, on a  $M_n \times \bar{U}_n \neq 0$  et comme on a par définition  $M_n \times U_n = 0$ , on en déduit en vertu de (72) que

$$K_1 \neq M_n \neq K_2.$$

On remarquera que l'on peut, à l'aide de la suite  $\{M_n\}$ , établir une correspondance biunivoque entre les éléments de la classe  $\mathfrak{R}$  et les nombres  $0 \leq x \leq 1$  de façon que l'on ait

$$K_0 = (p) \quad \text{et} \quad K_1 = K.$$

(73) *Tout élément de la classe  $\mathfrak{R}$  est un continu de condensation chaque élément qui lui succède dans cette classe.*

En effet, pour tout  $x < y$ , on a en vertu de (70)  $K_x \subset K_y$  et  $K_x \neq K_y$ ; or, comme  $K_y$  est un continu indécomposable en vertu de la propriété  $\omega$ ,  $K_x$  est un continu de condensation de  $K_y$ .

Les propriétés (70)—(73) de la classe  $\mathfrak{R}$  impliquent que

*Étant donné un nombre transfini quelconque  $\alpha$  de première ou deuxième classe, il existe sur le plan une suite transfinie de type  $\alpha$  de continus dont chacun est un continu de condensation de tous ceux qui le suivent<sup>2)</sup>. Il en est de même pour le nombre inverse  $\alpha^*$ .*

3. A l'aide des propriétés de  $\mathfrak{R}$  qui viennent d'être établies, je vais définir dans le plan une classe  $\mathfrak{M}$  de puissance  $c$  dont tous les éléments sont des continus disjoints à propriété  $\omega$ <sup>3)</sup>.

$K_x (x > 0)$  désignant un élément arbitraire de  $\mathfrak{R}$ , la somme de tous les éléments de cette classe qui précèdent  $K_x$  coïncide en vertu de (71) avec la somme de tous les vrais sous-continus de  $K_x$  qui contiennent le point  $p$ . Elle est donc le composant<sup>4)</sup>  $\mathfrak{P}(p, K_x)$  de  $K_x$ . Or, aucun continu indécomposable n'étant formé d'un seul composant, soit maintenant  $M_x$  un sous-continu quelconque de  $K_x$  situé sur un composant de  $K_x$  distinct de  $\mathfrak{P}(p, K_x)$ .

<sup>1)</sup> S. Janiszewski, Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie 1912, p. 907, lemme I.

<sup>2)</sup> Le problème de l'existence des suites transfinies de continus de condensation a été posé par S. Janiszewski en 1917. On voit que le continu  $\mathcal{H}_\delta$  en fournit une solution affirmative (et effective), même si l'on ajoute aux conditions du problème celle que tous les termes de cette suite possèdent la propriété  $\omega$ .

<sup>3)</sup> Ce problème se rattache au problème suivant, qui fut résolu par M. Mouchoff et par M. Nikodym: existe-t-il dans le plan une classe de puissance  $c$  dont tous les éléments soient des continus disjoints contenant des continus de condensation? On voit que la solution de ce problème est donnée à fortiori par la classe  $\mathfrak{M}$ .

<sup>4)</sup> Voir p. 280, note.

Le continu  $M_x$  peut être déterminé d'une façon effective et sans l'axiome du choix de M. Zermelo. En effet, pour tout point effectivement donné  $p$ , le composant qui contient ce point peut être mis d'une façon effective sous la forme de somme d'une suite croissante de continus contenant ce point, et partant, sous la forme d'un  $F_\delta$ <sup>1)</sup>. On peut donc choisir d'une façon effective un point  $q_x$  situé dans  $K_x - \mathfrak{P}(p, K_x)$ . Le composant  $\mathfrak{P}(q_x, K_x)$  étant mis également sous la forme de somme d'une suite croissante de continus contenant  $q_x$ , soit  $M_x$  le premier terme de cette suite.

La classe  $\mathfrak{M}$  des continus  $M_x (0 < x \leq 1)$  répond au problème. Pour tout  $x < y$ , on a en effet  $M_x \subset K_x \subset K_y$ . Or, comme  $K_x \subset \mathfrak{P}(p, K_y)$  et  $M_y$  est situé, par définition, dans un composant  $\mathfrak{P}(q_y, K_y)$  distinct de  $\mathfrak{P}(p, K_y)$ , on a l'égalité  $K_x \times \mathfrak{P}(q_y, K_y) = 0$ , puisque tous deux composants d'un continu indécomposable sont disjoints. On a donc à plus forte raison  $M_x \times M_y = 0$ . c. q. f. d.

4. Soit  $D$  un domaine quelconque et admettons qu'un continu  $K$  borné contienne des points situés à l'intérieur et à l'extérieur de  $D$ . En désignant par  $C(D)$  le complémentaire et par  $F(D)$  la frontière de ce domaine, envisageons la classe  $\mathfrak{W}$  composée de tous les *constituants*<sup>2)</sup> du produit  $K \times \bar{D}$  qui contiennent des points de  $D$ ; la classe  $\mathfrak{B}$  de tous les constituants du produit  $K \times C(D)$  qui contiennent des points extérieurs à  $D$  et enfin la classe  $\mathfrak{Z}$  de tous les constituants du produit  $K \times F(D)$  qui sont disjoints des éléments des classes  $\mathfrak{W}$  et  $\mathfrak{B}$ .

Les produits considérés étant des ensembles fermés, tous ces constituants sont des continus.

Les classes  $\mathfrak{W}$ ,  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  sont donc disjointes et  $W, B, Z$  désignant respectivement les éléments quelconques de ces classes, on a toujours  $W \times B = 0$  et  $Z \times B = 0$ , tandis que l'égalité  $W \times Z = 0$  peut se présenter ou non.

Or, je vais démontrer le théorème suivant:

**Théorème.** *Pour qu'un continu borné  $K$  possède la propriété  $\omega$ , il faut et il suffit que, quel que soit  $D$ , l'égalité  $W \times Z = 0$  se présente pour tout élément  $W$  de  $\mathfrak{W}$  et pour tout élément  $Z$  de  $\mathfrak{Z}$ .*

<sup>1)</sup> S. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, l. c., p. 36, 37.

<sup>2)</sup> C. Kuratowski, Une définition topologique de la ligne de Jordan, Fund. Math. I, p. 41. Un *constituant* d'un ensemble  $M$  est l'ensemble de tous les points que l'on peut joindre à un certain point  $p$  de  $M$  par un continu situé dans  $M$ ; ce constituant est déterminé par  $p$ .

**Démonstration.** 1° La condition est nécessaire. Supposons, en effet, que pour un élément  $W$  de  $\mathfrak{B}$  et un élément  $Z$  de  $\mathfrak{J}$  on ait  $W \times Z \neq 0$ . Comme  $W$  contient des points de  $D$ , qui par définition n'appartiennent pas à  $Z$ , tandis que  $Z$  contient des points de  $C(D)$ , extérieurs à  $D$ , qui n'appartiennent donc à  $W$ , on a  $W \neq W + Z \neq Z$  de sorte que le sous-continu  $W + Z$  de  $K$  est décomposable. Ainsi, la propriété  $\omega$  n'est pas réalisée.

2° La condition est suffisante. Supposons, en effet, que la propriété  $\omega$  ne soit pas réalisée. Il existe donc un sous-continu  $M$  de  $K$  tel que

$$M = M_1 + M_2 \quad \text{et} \quad M_1 \neq M \neq M_2.$$

Je vais prouver que pour un certain domaine  $D$  il existe de tels  $W$  et  $Z$  que l'on a  $W \times Z \neq 0$ .

Entourons chaque point  $p_1$  de  $M_1 - M_2$  d'une sphère de centre  $p_1$  et de rayon  $r = \frac{1}{2} \varrho(p_1, M_2)$ .

$Up_1$  désignant l'intérieur de cette sphère, soit  $D$  la somme des  $Up_1$  ainsi obtenus.  $D$  est donc un domaine. On a  $M_1 - M_2 \subset D$  et par suite

$$(74) \quad (M_1 - M_2) \times F(D) = 0,$$

puisque tout point de  $M_1 - M_2$  est entouré d'une sphère située entièrement dans  $D$ .

On remarque que tout point  $p_2$  de  $M_2 \times F(D)$  est un point d'accumulation de  $M_1 - M_2$ . En effet, aucun point  $p_2$  de  $M_2$  situé sur  $F(D)$  n'appartient à un  $Up_1$ , le rayon de  $Up_1$  étant par définition plus petit que  $\varrho(p_1, p_2)$ . Ce point est donc un point d'accumulation de ces sphères. On trouve donc pour tout  $\varepsilon > 0$  un point  $q$  d'un  $Up_1$  qui remplit la condition

$$(75) \quad \varrho(q, p_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, d'autre part

$$(76) \quad \varrho(p_1, p_2) \leq \varrho(p_1, q) + \varrho(q, p_2)$$

Comme  $(p_1) \subset M_1 - M_2$ , la définition de  $Up_1$  entraîne que

$$\varrho(p_1, q) \leq \frac{1}{2} \varrho(p_1, M_2)$$

et comme

$$\varrho(p_1, M_2) \leq \varrho(p_1, p_2).$$

on a

$$(77) \quad \varrho(p_1, q) \leq \frac{1}{2} \varrho(p_1, p_2).$$

Par substitution de la somme des membres droits des inégalités (75) et (77) à celui de l'inégalité (76) on obtient

$$\varrho(p_1, p_2) \leq \frac{1}{2} \varrho(p_1, p_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\varrho(p_1, p_2) \leq \varepsilon.$$

Il est donc établi que

$$(78) \quad M_2 \times F(D) \subset \overline{M_1 - M_2}.$$

On en conclut que

$$(79) \quad M_2 \neq M_2 \times F(D),$$

puisque l'inclusion  $M_2 \subset F(D)$  entraîne selon (78) que  $M_2 \subset \overline{M_1 - M_2}$ , d'où  $M_2 \subset M_1$  et  $M = M_1$ , contrairement à l'hypothèse.

Comme  $M_2 \times Up_1 = 0$  quel que soit  $p_1$ , on a  $M_2 \times D = 0$ , d'où en vertu de (79)  $M_2 \neq M_2 \times \overline{D}$ , ce qui prouve que  $M_2$  contient des points extérieurs à  $D$ .

Il en résulte l'existence d'un tel élément  $Z$  de  $\mathfrak{B}$  que

$$(80) \quad M_2 \subset Z.$$

Soit  $V$  un constituant du produit  $M \times \overline{D}$  contenant un point  $p_1$  de  $M_1 - M_2$ . Ce point appartenant par définition à  $D$ , il existe un tel élément  $W$  de  $\mathfrak{B}$  que

$$(81) \quad V \subset W.$$

Or, comme  $V \subset M \times \overline{D} \subset M$ , on a

$$V - M_2 \subset M - M_2 \subset (M_1 + M_2) - M_2 = M_1 - M_2$$

d'où

$$(V - M_2) \times F(D) \subset (M_1 - M_2) \times F(D)$$

et en vertu de (74)

$$(V - M_2) \times F(D) = 0.$$

L'identité  $(V - M_2) \times F(D) = [V \times F(D)] - M_2$  entraîne donc que

$$[V \times F(D)] - M_2 = 0, \quad \text{d'où} \quad [V \times F(D)] \subset M_2$$

et comme on a selon la définition de  $V$ <sup>1)</sup>:

$$V \times F(D) \neq 0,$$

on obtient

$$V \times M_2 \neq 0.$$

<sup>1)</sup> Voir le lemme de S. Janiszewski, cité p. 282, note <sup>1)</sup>. Ce lemme ne subsiste pas pour les continus non-bornés.

Il en résulte d'après (80) et (81) que l'on a, à plus forte raison,  $W \times Z \neq 0$ , c. q. f. d.

5. Lorsqu'un continu  $K$  (borné ou non-borné), possède la propriété  $\omega$ , il n'existe dans  $K$  aucun ensemble connexe irréductible entre deux points<sup>1)</sup>.

Cette proposition résulte immédiatement du théorème suivant:

**Théorème.** *I étant un ensemble connexe irréductible entre deux points, le continu  $\bar{I}$  est décomposable.*

**Démonstration.** En désignant par  $a$  et  $b$  les points entre lesquels  $I$  est irréductible, envisageons un point quelconque  $x$  de  $I$  distinct de  $a$  et  $b$ . Or,  $x$  détermine une décomposition de  $I$  en deux ensembles  $A(x)$  et  $B(x)$  qui remplissent les conditions:

(82)  $A(x)$  est un ensemble connexe irréductible entre  $a$  et  $x$ ;  $B(x)$  est un ensemble connexe irréductible entre  $x$  et  $b$ .

(83)  $A(x) \times B(x) = (x) = A(x) \times \bar{B}(x) + \bar{A}(x) \times B(x)$ <sup>2)</sup>.

La condition (82) entraîne que  $\bar{I} = \bar{A}(x) + \bar{B}(x)$  et la condition (83) implique que  $\bar{A}(x)$  ne contient pas  $b$  et que  $\bar{B}(x)$  ne contient pas  $a$ , de sorte que  $\bar{A}(x) \neq \bar{I} \neq \bar{B}(x)$ , c. q. f. d.

En particulier, le continu  $\mathcal{K}_3$  ne contient donc aucun ensemble connexe irréductible entre deux points, quels qu'ils soient.

<sup>1)</sup> L'existence des ensembles connexes ne contenant pas d'ensembles connexes irréductibles entre deux points a été signalée par M. Kuratowski et moi dans la Note: *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II. p. 225, théorème XXIX. Nous y avons montré qu'en particulier, tous les ensembles biconnexes jouissent de cette propriété. Le problème de l'existence des continus ne contenant pas d'ensembles connexes irréductibles entre deux points restait toutefois non résolu. On pourrait démontrer que, outre de  $\mathcal{K}_3$ , le continu  $\mathcal{K}_2$  présente la singularité en question.

<sup>2)</sup> *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p. 219, théorème XIX.