

Sur les ensembles connexes.

Par

B. Knaster et C. Kuratowski (Varsovie).

L'étude de la notion d'ensemble *connexe* est importante à deux points de vue différents. D'une part, la simplicité de la définition même de cette notion est remarquable au point de vue logique. D'autre part, il est intéressant d'apprendre les relations qui subsistent entre les théorèmes qui sont vrais pour les ensembles connexes en général et ceux qui concernent les continus.

Les ensembles connexes n'ont pas encore été l'objet d'une étude systématique. Le but de cette Note est d'en donner une ébauche en examinant méthodiquement quelques problèmes fondamentaux concernant ces ensembles, sans prétendre d'ailleurs d'avoir épuisé le sujet.

En même temps nous attirerons l'attention du lecteur sur les rapports qui existent entre les propriétés des ensembles connexes envisagées ici et celles qui leur correspondent dans l'étude des continus.

§ 1.

Théorèmes généraux.

Définition. *A et B étant deux ensembles de points, nous appellerons jonction de A et B la somme*

$$A \times \overline{B} + \overline{A} \times B^1).$$

Deux ensembles, dont la jonction est vide, sont dits — selon

¹⁾ \overline{A} désigne l'ensemble composé des points de A et de leurs points limites; on montre sans peine que

$$A \subset \overline{A}, \quad \overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B},$$

d'où

$$A \subset B \text{ implique } \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Nous ferons constamment usage de ces formules sans les citer.

M. Mazurkiewicz¹⁾ — *séparés*. Un ensemble qui contient plus d'un point et qui n'est pas une somme de deux ensembles séparés non vides est dit *connexe*. Nous appellerons „*connexe au sens plus large*“²⁾ tout ensemble qui est ou bien connexe, ou bien contient un seul point ou n'en contient aucun. Un ensemble à la fois connexe et fermé est un *continu*. La définition du terme „*continu au sens plus large*“ en ressort immédiatement.

Avant de passer à la théorie même des ensembles connexes il est commode d'établir quelques propriétés simples de la jonction. On s'aperçoit immédiatement que le produit de deux ensembles est toujours contenu dans leur jonction et que celle-ci est contenue dans la somme de ces ensembles. Afin de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux ensembles soit identique à leur jonction, rappelons qu'un ensemble A contenu dans B est dit *fermé dans B* , lorsque

$$\overline{A} \times B = A.$$

¹⁾ Sur un ensemble G_δ , punctiforme, qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire. Fund. Math. I, p. 66.

²⁾ La notion d'ensemble „connexe au sens plus large“ coïncide avec celle de „connected set“ de M. Lennes, qui l'a introduite dans sa Note *Curves in Non-Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations*, Amer. Journ. Math., XXXIII, 1911. C'est précisément le même sens, qu'assigne M. Hausdorff à ses „zusammenhängende Mengen“ (si l'on néglige l'ensemble vide) dans les *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 244.

Pour éviter tout malentendu considérons encore la définition suivante:

Un ensemble E est dit *bien enchaîné*, lorsque \overline{E} est un continu (au sens établi dans le texte).

Cette condition équivaut à celle de Janiszewski (*Sur les coupures du plan faites par les continus*, Prace matematyczno-fizyczne, XXVI, 1913, p. 15):

E n'est pas une somme de deux ensembles A et B tels que $\overline{A} \times \overline{B} = \emptyset$, et à celle, qui est dûe à M. W. H. Young (*The Theory of Sets of Points*, Cambridge, 1906, p. 204):

Si on entoure chaque point de \overline{E} par un domaine à un tenant, la somme de ces domaines est toujours un domaine à un tenant. (On appelle *domaine* tout ensemble dont le complémentaire est fermé; le domaine est dit *à un tenant*, lorsque tous deux de ses points peuvent y être joints par un continu).

On remarquera enfin que par rapport aux ensembles bornés la condition considérée peut être remplacée par celle de Cantor (Math. Ann. XXI, 1883, p. 575):

Tous deux points de E peuvent être joints dans E par une chaîne à chaînons aussi petits que l'on veut.

On montre aisément que tout ensemble connexe est bien enchaîné, tandis que la réciproque n'est généralement vraie que pour les ensembles fermés

Lemme I. *Pour que le produit et la jonction de deux ensembles quelconques soient identiques, il faut et il suffit que ces ensembles soient fermés dans leur somme.*

Démonstration. 1° Admettons que A et B soient fermés dans $A + B$. On a par définition:

$$A = \overline{A} \times (A + B)$$

et

$$B = \overline{B} \times (A + B).$$

En multipliant ces identités, on obtient:

$$\begin{aligned} A \times B &= \overline{A} \times \overline{B} \times (A + B) = \overline{A} \times \overline{B} \times A + \overline{A} \times \overline{B} \times B = \\ &= A \times \overline{B} + \overline{A} \times B, \end{aligned}$$

c'est à dire, que le produit et la jonction sont identiques. Ainsi la condition proposée est suffisante.

2° Admettons que

$$A \times B = A \times \overline{B} + \overline{A} \times B;$$

par suite

$$\overline{A} \times B \subset A \times B \quad \text{d'où} \quad \overline{A} \times B = A \times B.$$

En ajoutant A aux deux membres de cette identité, on a:

$$A + \overline{A} \times B = A + A \times B,$$

et puisque toujours

$$A + \overline{A} \times B = \overline{A} \times (A + B) \quad \text{et} \quad A + A \times B = A,$$

on en conclut que

$$\overline{A} \times (A + B) = A,$$

c'est à dire, que A est fermé dans $A + B$. Il en est de même pour B . Ainsi la condition proposée est nécessaire.

Lemme II. *Si $A_1 \subset A$ et $B_1 \subset B$, la jonction de A_1 et B_1 est contenue dans celle de A et B .*

Démonstration. On a par hypothèse:

$$A_1 \subset A \quad \text{d'où} \quad \overline{A_1} \subset \overline{A}, \quad \text{et} \quad B_1 \subset B \quad \text{d'où} \quad \overline{B_1} \subset \overline{B};$$

il en résulte que

$$(A_1 \times \overline{B_1} + \overline{A_1} \times B_1) \subset (A \times \overline{B} + \overline{A} \times B) \quad \text{c. q. f. d.}$$

Plusieurs propriétés simples des ensembles connexes ont été démontrées par M. Hausdorff. La suivante nous en sera nécessaire¹⁾:

S étant connexe il en est de même de tout ensemble T qui vérifie la condition:

$$(1) \quad S \subset T \subset \bar{S};$$

en particulier, \bar{S} est un continu.

Ceci établi, nous passons aux théorèmes généraux sur les ensembles connexes.

Théorème III. *Si un ensemble connexe S est contenu dans la somme de deux ensembles séparés, un d'eux contient S entièrement, tandis que l'autre est séparé de S .*

Démonstration. Soit S un ensemble connexe,

$$(2) \quad S \subset A + B$$

et

$$(3) \quad A \times \bar{B} + \bar{A} \times B = 0.$$

D'après (2) on a

$$(4) \quad S = A \times S + B \times S.$$

En vertu du lemme II et de l'identité (3) la jonction des ensembles $A \times S$ et $B \times S$ est vide. Donc, S étant connexe, un de ces ensembles est vide d'après (4). Soit

$$(5) \quad B \times S = 0.$$

Selon (4) et (5) on a donc

$$S = A \times S, \text{ c'est à dire, } S \subset A.$$

Il en résulte en vertu de (3) et du lemme II que les ensembles B et S sont séparés. Ainsi S est contenu dans A et séparé de B . c. q. f. d.

Théorème IV. *Si les ensembles connexes S_1 et S_2 ne sont pas séparés, leur somme $S_1 + S_2$ est également connexe.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la somme $S_1 + S_2$ vérifie les conditions:

$$(6) \quad \begin{aligned} S_1 + S_2 &= A + B, & A \times \bar{B} + \bar{A} \times B &= 0, \\ A &\neq 0 & \text{et } B &\neq 0. \end{aligned}$$

¹⁾ L. c. p. 246, IV.

Donc, en vertu du théorème III, chacun des ensembles S_1 et S_2 est contenu dans A ou dans B ; les formules (6) montrent en même temps que S_1 et S_2 ne peuvent être contenus simultanément ni dans A ni dans B . Soit

$$S_1 \subset A \quad \text{et} \quad S_2 \subset B.$$

Il en résulte, suivant le lemme II, que A et B étant séparés, S_1 et S_2 le sont aussi, contrairement à l'hypothèse. Ainsi la supposition que $S_1 + S_2$ n'est pas connexe implique une contradiction.

c. q. f. d.

En suivant la même voie de démonstration, on peut généraliser le théorème IV, comme suit:

Corollaire V. *Lorsqu'une classe d'ensembles connexes contient un ensemble qui n'est pas séparé d'aucun d'eux, la somme de tous les ensembles de cette classe est connexe.*

Théorème VI. *T étant un sous-ensemble connexe (au sens plus large) d'un ensemble connexe S , si $S - T$ est une somme des ensembles séparés P et Q , les ensembles $T + P$ et $T + Q$ sont connexes (au sens plus large).*

Démonstration. Par hypothèse,

$$(7) \quad S = T + P + Q,$$

$$(8) \quad P \times \bar{Q} + \bar{P} \times Q = 0.$$

Supposons, contrairement à la thèse du théorème, que l'ensemble $T + P$ n'est pas connexe (au sens plus large). Il existe donc A et B qui vérifient les conditions:

$$(9) \quad T + P = A + B,$$

$$(10) \quad A \times \bar{B} + \bar{A} \times B = 0,$$

$$(11) \quad A \neq 0 \quad \text{et} \quad B \neq 0.$$

En vertu de (9), (10) et du théorème III on peut poser:

$$(12) \quad T \times A = 0.$$

Comme d'après (9), $A \subset T + P$, on a en vertu de (12):

$$(13) \quad A \subset P.$$

Il en résulte selon le lemme II et la formule (8) que

$$(14) \quad A \times \bar{Q} + \bar{A} \times Q = 0.$$

Envisageons maintenant la décomposition suivante de S :

$$(15) \quad S = A + (B + Q),$$

qui résulte des identités (7) et (9). Or,

$$\begin{aligned} A \times (B + Q) + \bar{A} \times (B + Q) &= A \times \bar{B} + A \times \bar{Q} + \bar{A} \times B + \bar{A} \times Q = \\ &= (A \times \bar{B} + \bar{A} \times B) + (A \times \bar{Q} + \bar{A} \times Q) = 0, \end{aligned}$$

selon (10) et (14).

D'autre part, suivant (11):

$$A \neq 0 \quad \text{et} \quad B + Q \neq 0.$$

La formule (15) présente ainsi une décomposition de l'ensemble connexe S en deux ensembles séparés non vides A et $B + Q$, ce qui est impossible. Donc, la supposition que $T + P$ n'est pas connexe implique une contradiction.

Corollaire VII. *Lorsque les ensembles $M + N$ et $M \times N$ sont connexes (au sens plus large) et, en outre, M et N sont fermés dans $M + N$, les ensembles M et N sont aussi connexes (au sens plus large).*

Démonstration. Posons, en effet,

$$\begin{aligned} S &= M + N & T &= M \times N, \\ P &= M - N & \text{et} \quad Q &= N - M. \end{aligned}$$

En vertu du lemme I, il en résulte, que

$$M \times \bar{N} + \bar{M} \times N = M \times N = T.$$

Or,

$$S - T = (M + N) - M \times N = (M - N) + (N - M) = P + Q.$$

En même temps, suivant le lemme II

$$P \times \bar{Q} + \bar{P} \times Q \subset M \times \bar{N} + \bar{M} \times N = T;$$

comme, d'autre part,

$$\begin{aligned} P \times \bar{Q} + \bar{P} \times Q &\subset P + Q = S - T, \\ P \times \bar{Q} + \bar{P} \times Q &= 0. \end{aligned}$$

on a:

Ainsi, les conditions du théorème VI étant vérifiées, les ensembles $T + P$ et $T + Q$ sont connexes. Or,

$$T + P = M \times N + (M - N) = M$$

et

$$T + Q = M \times N + (N - M) = N;$$

donc les ensembles M et N sont connexes.

Les théorèmes sur les ensembles connexes qui viennent d'être établis sont plus généraux que ceux qui leur correspondent dans la théorie des continus. En effet, on en obtient ces derniers, en les appliquant aux ensembles fermés. Ainsi on a:

(III') Si un continu S est contenu dans la somme de deux ensembles fermés n'ayant aucun point commun, un d'eux contient S entièrement, tandis que l'autre n'en contient aucun point.

(IV') La somme de deux continus ayant un point commun est un continu.

(V') Lorsqu'une classe de continus admet comme élément un continu qui a des points communs avec tous les continus appartenant à cette classe, leur somme, lorsqu'elle est fermée, est aussi un continu.

(VII') Lorsque la somme et le produit de deux ensembles fermés sont des continus (au sens plus large), ces ensembles sont également des continus (au sens plus large)¹⁾.

De (VII') résulte immédiatement le théorème suivant qui correspond au théorème VI:

(VI') T étant un sous-continu (au sens plus large) d'un continu S , si $S - T$ est une somme de deux ensembles fermés P et Q sans points communs, les ensembles $T + P$ et $T + Q$ sont des continus (au sens plus large).

On remarquera enfin que le rôle de la notion de jonction dans la théorie des ensembles connexes est analogue à celui de la notion de produit par rapport aux continus. D'ailleurs, il est vrai de tous deux ensembles fermés, que leur jonction est identique à leur produit.

Théorème VIII. *Tout ensemble connexe est une somme de deux ensembles connexes différents de lui.*

Démonstration: Soit p un point quelconque de l'ensemble connexe S . L'ensemble $S - (p)$ contenant évidemment plus d'un point, deux cas peuvent se présenter:

1° $S - (p)$ n'est pas connexe. Il est donc une somme de deux ensembles séparés non vides P et Q . Les ensembles $P + (p)$ et $Q + (p)$ étant connexes (en vertu du théorème VI), la formule

$$S = [P + (p)] + [Q + (p)]$$

représente la décomposition cherchée.

2° $S - (p)$ est connexe. Soit r un de ses points. Si $[S - (p)] - (r)$ n'est pas connexe, on en conclut en raisonnant comme auparavant, que $S - (p)$ est une somme de deux ensembles connexes non vides M et N , différents de lui. L'ensemble S étant connexe, le point p appartient à $\overline{S - (p)}$, il appartient donc à \overline{M} ou à \overline{N} . Admettons, que p est un élément de \overline{M} . L'ensemble $M + (p)$ est donc connexe (voir page 209, formule (1)). On arrive ainsi à la décomposition

¹⁾ Ce théorème a été publié dans la Note des MM. Janiszewski et Kuratowski: *Sur les continus indécomposables* (Fund. Math. I, p. 211, théorème I).

$$S = [M + (p)] + N$$

qui vérifie bien la thèse du théorème.

Si, au contraire, $[S - (p)] - (r)$ est connexe, on a

$$S = [S - (p)] + [S - (r)],$$

ce qui représente aussi une décomposition de S en deux ensembles connexes, différents de lui.

Corollaire IX. *Tout ensemble connexe contient un vrai sous-ensemble connexe.*

Si l'on compare le théorème VIII et le corollaire IX aux théorèmes concernant les continus, on aperçoit, que les premiers diffèrent essentiellement des seconds. On sait, en effet, qu'il existe des continus indécomposables ¹⁾, tandis que tout ensemble connexe est décomposable en vertu du théorème VIII. Envisageons d'autre part, pour le comparer au corollaire IX, le remarquable théorème de Janiszewski ²⁾:

(IX') p étant un point quelconque d'un continu donné S , il existe dans tout entourage de p un sous-continu de S , contenant p .

Ce théorème implique évidemment les deux suivants:

(IX'') p étant un point quelconque d'un continu donné S , il existe un sous-continu de S , qui ne contient pas p .

(IX''') Tout continu contient un sous-continu borné.

Or, ni dans l'énoncé de (IX'') ni dans celui de (IX'''), ni, à plus forte raison, dans l'énoncé de (IX') on ne peut remplacer le terme „continu“ par celui d'„ensemble connexe“. Autrement dit:

1° Il existe un ensemble connexe S contenant un tel point p , que tous les sous-ensembles connexes de S contiennent ce point.

En appelant — avec M. Sierpiński ³⁾ — *dispersé* tout ensemble, qui ne contient aucun ensemble connexe, on peut énoncer cette assertion de la façon suivante:

Il existe un ensemble connexe S contenant un tel point p que l'ensemble $S - (p)$ est dispersé (voir § 5, exemple α).

Il est évident, qu'un tel ensemble ne peut être décomposé en deux ensembles connexes sans points communs.

2° Il existe un ensemble connexe ne contenant aucun sous-ensemble à la fois connexe et borné.

¹⁾ Un continu est dit *indécomposable*, lorsqu'il n'est pas une somme de deux continus différents de lui (voir L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68, 1910, p. 426).

²⁾ (IX') est vrai aussi bien pour les continus bornés que pour non bornés. Voir S. Janiszewski, *Sur les continus irréductibles entre deux points*. Thèse, Paris 1911, p. 22, théorème IV; (Journal de l'École Polytechnique II, 16, 1912).

³⁾ *Sur les ensembles connexes et non connexes*, ce volume, p. 82. Le terme „dispersé“ équivaut au terme „punkthaft“ de M. Hausdorff (l. c. p. 322).

On en trouve un exemple dans une Note de M. Mazurkiewicz¹⁾; nous définirons dans la suite d'autres ensembles connexes qui présentent la même singularité (voir § 5, exemples α_2 et β_1).

Le théorème VIII conduit d'une façon naturelle au problème de la décomposition des ensembles connexes en deux ensembles connexes, n'ayant aucun élément commun. Nous avons déjà vu que cette décomposition n'est pas toujours possible. Nous passons maintenant à la discussion plus détaillée du problème de la décomposition en question.

Définition. Nous appellerons *biconnexe* tout ensemble connexe qui n'est pas une somme de deux ensembles connexes sans points communs.

Le terme „ensemble biconnexe“ s'impose d'une manière bien naturelle, si on envisage la notion de *connexité* au point de vue général suivant. Soit P une propriété quelconque; convenons de dire, qu'un ensemble donné E est *connexe par rapport à la propriété P* , lorsque

1°. E possède la propriété P ,

2°. E n'est pas une somme de deux ensembles sans points communs qui jouissent de la propriété P .

On aperçoit immédiatement qu'en particulier, si on remplace dans l'énoncé précédent la propriété P par la propriété „d'être un ensemble fermé“, on est conduit à la notion de continu; celle de domaine à un tenant s'en obtient en substituant à P la propriété „d'être un domaine“. Tout pareillement, un ensemble biconnexe est connexe par rapport à la propriété „d'être un ensemble connexe (dans le sens qui a été défini page 207)“.

Soit p un point quelconque d'un ensemble donné E . On appelle — suivant M. Hausdorff — *la composante*²⁾ de p dans E le plus grand ensemble connexe (au sens plus large) contenant p et contenu dans E . La composante existe toujours, en vertu du corollaire V; elle peut se réduire d'ailleurs à un seul point. Il résulte immédiatement du théorème IV que toutes deux composantes d'un ensemble donné sont séparées, et le théorème III implique, que tout sous-ensemble connexe est contenu dans une composante bien déterminée de cet ensemble. Voici une propriété importante des composantes:

Théorème X. T étant un sous-ensemble connexe (au sens plus large) d'un ensemble connexe S , et U une composante de $S - T$, l'ensemble $S - U$ est connexe (au sens plus large).

¹⁾ Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe, borné, ce volume, p. 96.

²⁾ „Komponente“, l. c., p. 245.

Démonstration. Supposons qu'il n'en est pas ainsi; il existe donc deux ensembles P et Q tels que

$$\begin{aligned} S - U &= P + Q, \\ P \times \overline{Q} + \overline{P} \times Q &= 0, \\ P \neq 0 \quad \text{et} \quad Q \neq 0. \end{aligned}$$

D'après le théorème VI les ensembles $U + P$ et $U + Q$ sont connexes; d'autre part, T étant contenu dans $S - U$, il n'a (th. III) aucun point commun soit avec P , soit avec Q . Posons

$$T \times P = 0,$$

d'où

$$T \times (U + P) = 0.$$

Ainsi $U + P$ est un ensemble connexe contenu dans $S - T$. Il est plus grand que U , puisque P n'est pas vide et ne contient aucun point de U . Or, U étant une composante de $S - T$, ceci est impossible. Donc, $S - U$ est connexe (au sens plus large).

Par rapport aux continus c'est la notion de *constituant* qui correspond à celle de composante: on appelle constituant de p dans un ensemble donné E le plus grand semi-continu (au sens plus large) contenant p et contenu dans E ¹⁾ (une somme des continus, dont le produit n'est pas vide, forme un semi-continu).

Or, le théorème correspondant au X n'est pas généralement vrai des continus. Toutefois il importe de remarquer que

(X')²⁾ T étant un sous-continu (au sens plus large) d'une ligne de Jordan généralisée S ³⁾ et U un constituant de $S - T$, l'ensemble $S - U$ est un continu (au sens plus large).

Théorème XI. T étant un sous-ensemble connexe d'un ensemble biconnexe S , l'ensemble $S - T$ est dispersé.

Démonstration. Supposons, au contraire, que $S - T$ contient un sous-ensemble connexe R ; soit U la composante de $S - T$ dans laquelle R est contenu. En vertu du théorème X l'ensemble $S - U$ est connexe (au sens plus large). Comme, d'autre part, chacun des

¹⁾ Voir C. Kuratowski, *Une définition topologique de la ligne de Jordan*, Fund. Math. I, p. 41. Cf. Janiszewski, *Sur les coupures du plan*... p. 61.

²⁾ Ce théorème a été signalé dans la Note citée de M. Kuratowski, p. 48, (9).

³⁾ Voir p. 224, note ²⁾.

ensembles U et $S - U$ contient plus d'un point, puisque R est contenu dans U et T dans $S - U$, les ensembles U et $S - U$ sont connexes. La formule

$$S = U + (S - U)$$

représente donc une décomposition de S en deux ensembles connexes sans points communs, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $S - T$ est bien un ensemble dispersé, c. q. f. d.

Le théorème XI implique que pour qu'un ensemble connexe S soit biconnexe il faut et il suffit, que pour tout son sous-ensemble connexe T l'ensemble $S - T$ soit dispersé. Il implique d'autre part, qu'un ensemble biconnexe ne contient aucun couple d'ensembles connexes n'ayant aucun point commun. On arrive ainsi au

Corollaire XII. *Tout sous-ensemble connexe d'un ensemble biconnexe est également biconnexe.*

De plus, on en déduit, en tenant compte de (IX'), le

Corollaire XIII. *Aucun continu n'est biconnexe.*

Il résulte immédiatement de ces corollaires le suivant

Théorème XIV. *Tout ensemble biconnexe est punctiforme¹⁾.*

§ 2.

Les ensembles connexes irréductibles entre deux points.

Définition. *Nous appellerons connexe irréductible entre deux points tout ensemble connexe qui les contient et dont aucun vrai sous-ensemble connexe ne les contient pas.*

Voici quelques simples exemples d'ensembles connexes irréductibles entre deux points:

(i) Tout arc simple est un ensemble connexe irréductible entre ses deux points extrêmes.

(ii) L'ensemble plan composé des points (x, y) qui satisfont aux conditions:

$$\begin{aligned} y &= \sin \frac{1}{x} & \text{lorsque } 0 < x \leq 1, \\ y &= 0 & \text{ " } x = 0, \end{aligned}$$

est un ensemble connexe irréductible entre les points $(0, 0)$ et $(1, \sin 1)$.

¹⁾ On appelle *punctiforme* tout ensemble ne contenant aucun continu.

(iii) Considérons l'exemple bien connu donné par Cantor d'un ensemble parfait non dense situé sur le segment $[0, 1]$ de l'axe X . Soit

$$(16) \quad p_1, q_1; p_2, q_2; \dots; p_n, q_n; \dots$$

la suite des bornes des segments „contigus“ à cet ensemble. Désignons par R l'ensemble des points de l'exemple de Cantor, qui n'entrent pas dans la suite (16). L'ensemble-somme de R et des segments $[(p_n, 1), (q_n, 0)]$ pour tout n naturel ≥ 1 est connexe et irréductible entre les points 0 et 1 de l'axe X (voir fig. 1).

Nous donnerons dans le § 5 un exemple d'ensemble punctiforme qui est connexe et irréductible entre deux points (ex. β): en outre, nous démontrerons l'existence d'un ensemble qui, tout en jouissant de ces propriétés, ne contient aucun sous-ensemble parfait (ex. γ).

Dans les considérations qui vont suivre I désignera toujours l'ensemble connexe irréductible entre les points a et b .

Théorème XV. *S étant un sous-ensemble connexe (au sens plus large) de I , si a ou b appartient à S , $I - S$ est connexe (au sens plus large).*

Démonstration. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait décomposer $I - S$ en deux ensembles séparés non vides P et Q et un des ensembles $S + P$ et $S + Q$, qui sont différents de S et connexes en vertu du théorème VI, contiendrait les points a et b , ce qui est impossible.

Théorème XVI. *S étant un sous-ensemble non vide et connexe (au sens plus large) de I , si ni a ni b n'appartiennent pas à S , $I - S$ est une somme de deux ensembles séparés non vides et connexes (au sens plus large).*

Démonstration. I étant connexe et irréductible entre a et b , $I - S$ n'est pas connexe. Il se décompose donc en deux ensembles P et Q tels que:

$$(17) \quad I - S = P + Q,$$

$$(18) \quad P \times \bar{Q} + \bar{P} \times Q = 0,$$

$$(19) \quad P \neq 0 \quad \text{et} \quad Q \neq 0.$$

Nous allons démontrer que P et Q sont connexes (au sens plus large). Le point a appartenant par hypothèse à $I - S$, soit Q l'ensemble auquel il appartient. Suivant le théorème VI et les formu-

les (17) — (19) les ensembles $S + P$ et $S + Q$ sont connexes. Or, $S + Q$ contenant a , l'ensemble $I - (S + Q)$ est connexe (au sens plus large) en vertu du théorème XV. Mais,

$$I - (S + Q) = (I - S) - Q = P,$$

puisque suivant (18) on a $P \times Q = 0$. Par conséquent, l'ensemble P est connexe (au sens plus large). $S + Q$ étant connexe et distinct de I (d'après (19)), les points a et b ne peuvent lui appartenir simultanément. Donc, a étant un point de $S + Q$, b appartient à P . Par suite, les hypothèses sur P et Q sont symétriques et comme P est connexe (au sens plus large), $-Q$ l'est aussi. Ainsi, $I - S$ est bien une somme des deux ensembles non vides P et Q , qui sont séparés et connexes (au sens plus large).

Théorème XVII. *X et Y étant deux sous-ensembles connexes de I qui contiennent le point a ,*

$$X \subset Y \text{ ou bien } Y \subset X.$$

Démonstration. Supposons que X n'est pas contenu dans Y . On a alors

$$(20) \quad X \times (I - Y) \neq 0$$

D'autre part, le point b n'appartenant pas à Y , puisque Y est connexe et différent de I (d'après (20)), c'est bien $I - Y$ qui admet b comme élément.

En vertu du théorème XV l'ensemble $I - Y$ est connexe (au sens plus large). Or les ensembles X et $I - Y$ étant connexes (au sens plus large) et non séparés en vertu de (20), leur somme contenant les points a et b est d'après le théorème IV connexe. I étant connexe et irréductible entre ces deux points, on a

$$X + (I - Y) = I,$$

d'où

$$Y \subset X.$$

c. q. f. d.

Les théorèmes XV—XVII nous permettent d'acquérir la connaissance plus précise de la structure des ensembles connexes irréductibles entre deux points. Considérons, en premier lieu, le cas, où l'ensemble S du théorème XV est composé d'un seul point a . D'après ce théorème l'ensemble $I - (a)$ est connexe, ce qui entraîne immédiatement le

Théorème XVIII. *L'ensemble I connexe et irréductible entre les points a et b n'est irréductible entre aucun autre couple de points.*

Remplaçons à son tour l'ensemble S du théorème XVI par un ensemble composé d'un seul point arbitraire x distinct de a et b . L'ensemble $I - (x)$ se décompose par suite en deux ensembles connexes, dont l'un — soit P — contient a , et l'autre — soit Q — contient b . Les ensembles P et Q sont séparés; par conséquent le point x appartient aussi bien à \overline{P} qu'à \overline{Q} . Soit

$$A(x) = P + (x) \quad \text{et} \quad B(x) = Q + (x).$$

Les ensembles $A(x)$ et $B(x)$ sont donc connexes et, comme on démontre sans peine, $A(x)$ est irréductible entre a et x , et $B(x)$ l'est entre b et x . De plus, $A(x)$ est l'unique sous ensemble de I , qui soit connexe et irréductible entre a et x , puisque s'il y en avait deux, l'un d'eux serait en vertu du théorème XVII contenu dans l'autre. Par raison de symétrie il en est de même de $B(x)$.

Pour rendre l'énoncé de nos théorèmes plus général, convenons de dire que tout ensemble composé d'un seul point est connexe (au sens plus large) irréductible entre ce point et lui même, et que

$$A(a) = (a), \quad A(b) = I.$$

Il en résulte immédiatement les deux théorèmes suivants:

Théorème XIX. *Tout point x de I détermine d'une façon unique une décomposition de cet ensemble en deux ensembles $A(x)$ et $B(x)$ qui remplit les conditions:*

1° $A(x)$ est connexe (au sens plus large) et irréductible entre a et x et $B(x)$ l'est entre b et x ,

$$2^\circ \quad A(x) \times B(x) = (x) = A(x) \times \overline{B(x)} + \overline{A(x)} \times B(x).$$

Théorème XX. *Si on pose pour tous deux points x_1 et x_2 de I*

$$(21) \quad x_1 \prec x_2 \quad \text{lorsque} \quad A(x_1) \subset A(x_2)$$

on établit un ordre linéaire dans l'ensemble I .

Lorsque dans la suite il sera question de l'ensemble ordonné I , ce sera toujours l'ordre assujetti à la convention (21) que nous aurons en vue.

Lemme XXI. *Pour tout point x de I l'ensemble $A(x)$ est composé de tous les points qui précèdent x et du point x lui-même.*

Démonstration. Soit y un point arbitraire de $A(x)$. L'ensemble $A(x)$ étant connexe (au sens plus large) et irréductible entre a et x , il y existe en vertu du théorème XIX un sous-ensemble connexe

(au sens plus large) et irréductible entre a et y ; comme cet ensemble est identique à $A(y)$, on a d'après (21): $y \prec x$ ou $y = x$. D'autre part, si un point z de I précède x , on a par définition $A(z) \subset A(x)$ et, partant, z appartient à $A(x)$.

Par raison de symétrie, $B(x)$ est composé de tous les points de I qui suivent x et du point x lui-même.

Lemme XXII. *Si un point p d'une portion¹⁾ P de l'ensemble ordonné I est différent des bornes²⁾ de cette portion, il n'est pas un point d'accumulation (au sens géométrique) de l'ensemble $I - P$.*

Démonstration. Le lemme étant évidemment réalisé quand la portion P contient les deux points a et b , admettons que P détermine une décomposition de I en trois portions:

$$I = A + P + B,$$

où A est l'ensemble de tous les points, qui précèdent les points de la portion P , et B l'ensemble de tous ceux, qui la suivent (un des ensembles A et B peut d'ailleurs être vide). Convenons donc que ce soit l'ensemble A , qui contienne le point a et supposons, qu'un point p de P , différent de ses bornes, est un point d'accumulation de $I - P$. Point p appartenant en ce cas à \overline{A} ou à \overline{B} , nous pouvons bien supposer qu'il appartient à \overline{A} .

Or, A est la somme de tous les $A(x)$, dont les x appartiennent à A . Tout $A(x)$ étant connexe (au sens plus large) et contenant a , leur somme A l'est aussi en vertu du corollaire V. Les ensembles A et $B(p)$ étant connexes (au sens plus large) et non séparés — puisque p appartient à \overline{A} — leur somme $A + B(p)$ est connexe d'après le théorème IV et elle contient a et b . Il en résulte que

$$A + B(p) = I.$$

Cependant, comme p n'est pas la borne inférieure de P , il existe dans P un point qui précède p , et qui n'appartient suivant le lemme XXI ni à A ni à $B(p)$. Ainsi la supposition, que le

¹⁾ Tout sous-ensemble P d'un ensemble ordonné E est dit *portion* de E , lorsque chaque élément de E , qui est situé entre deux éléments quelconques de P , appartient à P . Voir Hausdorff, l. c., p. 87 („Stück“).

²⁾ Un élément u d'un ensemble ordonné E est dit la *borne inférieure* d'un sous-ensemble U de E , lorsqu'il n'est pas précédé par aucun élément de U et lorsqu'il n'est pas suivi par aucun autre élément, jouissant de cette propriété. La définition de la *borne supérieure* est symétrique.

point p de P , différent de ses bornes, puisse être un point d'accumulation de $I - P$, implique une contradiction.

Théorème XXIII. *Le type d'ordre de I est celui du continu linéaire (c'est à dire, de l'ensemble $0 \leq x \leq 1$ ordonné selon la grandeur).*

Démonstration. Le type d'ordre de I n'admet pas de sauts. En effet, en supposant, qu'un élément p de I y est suivi immédiatement par un autre élément q , on aurait en vertu du lemme XXI la décomposition de I :

$$I = A(p) + B(q)$$

en deux ensembles non vides et séparés (d'après le théorème XVII, 2°) — ce qui est impossible

Le type d'ordre de I n'admet pas de lacunes. En effet, supposons qu'on puisse décomposer I en deux portions A et B sans éléments communs de sorte que A contienne a , B contienne b , A n'admette pas de borne supérieure et B — d'inférieure. Or, d'après le lemme XXII aucun point de A n'est point d'accumulation de B ni vice versa. On aurait donc ainsi une décomposition de I en deux ensembles A et B séparés et non vides, ce qui est impossible.

Le type d'ordre de I admet un sous-ensemble dénombrable D de I , qui y est dense partout. On sait, en effet, que l'axiome „du choix“ de M. Zermelo implique que tout ensemble infini E admet un sous ensemble dénombrable U tel, que $\bar{U} = E$. Soit D un tel sous-ensemble de I . Toute portion non vide P de I , qui ne contient pas ses bornes, contient un élément de D , parce qu'en cas contraire, D étant contenu dans $I - P$ il en serait de même de \bar{D} , d'après le lemme XXII. Donc, entre tous deux éléments de l'ensemble ordonné I il y est interposé un élément de l'ensemble D , ce qui revient à dire, que l'ensemble D est dense partout dans l'ensemble ordonné I .

Le type d'ordre de I n'admet donc ni sauts ni lacunes et contient un sous-ensemble dénombrable et dense partout; on en conclut que ce type d'ordre est précisément celui du continu linéaire.

Corollaire XXIV. *Pour qu'un sous-ensemble de I soit connexe (au sens plus large) il faut et il suffit, qu'il soit une portion de I ; en outre, si cette portion contient ses bornes, elle est irréductible entre elles.*

La notion d'ensemble connexe irréductible entre deux points correspond exactement à celle de continu irréductible entre deux points¹⁾. Un continu est dit *irréductible entre deux points*, lorsqu'il les contient, aucun de ses vrais sous-continus ne les contenant pas à la fois. Les théorèmes démontrés jusqu'à présent permettent de se rendre compte, combien la théorie des ensembles connexes irréductibles est plus simple que celle des continus irréductibles. En effet, on observe d'abord, que le couple des points, entre lesquels un ensemble connexe est irréductible, y est déterminé d'une façon univoque (théorème XVIII), tandis qu'il existe des continus irréductibles entre une infinité de paires de points à la fois. Ensuite, le corollaire XXIV nous apprend, que pour tous deux points x et y de I , l'ensemble connexe et irréductible entre x et y y est unique. Or, un théorème analogue serait faux pour les continus irréductibles: on en trouve sans peine, qui, étant irréductibles entre a et b , contiennent à la fois deux sous-continus irréductibles différents entre les mêmes points x et y ²⁾. On remarque enfin la différence suivante, qui — au point de vue de la théorie discutée ici — est la plus essentielle. On sait qu'un sous-continu K d'un continu C est dit son *continu de condensation*³⁾, lorsqu'il est un *ensemble-frontière par rapport à C* , c'est à dire, lorsque

$$\overline{C - K} = C.$$

Appelons — d'une façon analogue — un sous-ensemble connexe S d'un ensemble connexe E son *ensemble connexe de condensation*, lorsque

$$E \times \overline{E - S} = E.$$

Or, en vertu du lemme XXII et du corollaire XXIV *un ensemble connexe irréductible entre deux points ne contient aucun ensemble connexe de condensation*, tandis que parmi les continus irréductibles il n'y a que les arcs simples, qui sont dépourvus de continus de condensation⁴⁾.

Nous allons maintenant établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points soit un arc simple, c'est à dire, homéomorphe avec un segment de droite.

Lemme XXV. *Tout ensemble qui est à la fois:*

¹⁾ Zoratti, *La notion de ligne*, Ann. de l'École Normale, XXVI, 1909.

²⁾ Le problème qui se dégage de la considération de tels exemples a été l'objet de la Note de Janiszewski: *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*, Bull. Acad. des Sciences de Cracovie, 1912.

³⁾ Janiszewski, Thèse p. 24.

⁴⁾ Outre ces différences qui séparent les ensembles connexes irréductibles entre deux points des continus irréductibles, il y a bien d'analogies profondes qui relient ces notions. Nous renonçons à les traiter dans cette Note, car le problème demanderait une démonstration préalable de plusieurs théorèmes ne concernant que les continus et il sera d'ailleurs discuté dans le prochain Mémoire sur les continus irréductibles de M. Kuratowski.

- (22) *fermé,*
 (23) *connexe irréductible entre deux points,*
 (24) *borné,*

— *est un arc simple.*

Démonstration. Soit I un ensemble qui remplit les conditions (22)–(24). Le théorème XXIII permet d'établir une correspondance biunivoque entre les points de I et ceux du segment $[0, 1]$ de sorte que pour tous deux points x_1 et x_2 de ce segment l'inégalité

$$(25) \quad x_1 < x_2 \text{ implique } f(x_1) \prec f(x_2) \text{ et vice versa.}$$

(I étant fermé, cette correspondance peut être définie d'une façon effective). Nous allons démontrer que cette correspondance est bicontinue. Soit

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n;$$

il s'agit de montrer, que

$$(26) \quad f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Pour cela il suffit évidemment de se borner au cas, où

$$(27) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

Cette formule entraîne en raison de (25) la formule

$$(28) \quad f(x_1) \prec f(x_2) \prec \dots \prec f(x_n) \prec \dots$$

Or, supposons, que l'égalité (26) ne soit pas réalisée. Il existe dans I d'après les conditions (23) et (24) un point d'accumulation (au sens géométrique) des $f(x_n)$. S'il diffère de $f(z)$, on peut l'entourer en vertu de (28) d'une portion de I qui contienne tout au plus un élément de la suite $\{f(x_n)\}$; il ne serait donc pas — en raison du lemme XXII — un point d'accumulation des $f(x_n)$. L'égalité (26) est ainsi établie.

D'autre part, soit $\varphi(x)$ la fonction inverse de $f(x)$. Or, si $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ est une suite croissante de points de I et convergente (au sens géométrique du mot) vers un point r de cet ensemble, le point $\varphi(r)$ du segment $[0, 1]$ est évidemment la borne supérieure des $\varphi(p_n)$; donc

$$(29) \quad \varphi(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(p_n).$$

Les formules (26) et (29) signifient précisément, que l'ensemble I et le segment $[0, 1]$ sont homéomorphes.

Lemme XXVI. *Tout continu irréductible entre deux points n'admettant aucun continu de condensation est borné¹⁾.*

Démonstration. Suivant un théorème²⁾ de M. Mazurkiewicz tout point de „second genre“³⁾ d'un continu quelconque C est situé sur un continu de condensation de C . Autrement dit, tout continu qui ne contient aucun continu de condensation est une ligne de Jordan généralisée.

D'autre part, comme l'a démontré M. Mazurkiewicz⁴⁾, tous deux points d'une ligne de Jordan généralisée sont situés sur un sous-continu borné de cette ligne.

Supposons maintenant qu'un continu K irréductible entre deux points et n'admettant aucun continu de condensation ne soit pas borné. Ce continu étant une ligne de Jordan généralisée, il y existe, d'après ce qui a été dit, un sous-continu borné — donc différent de K — qui contient ces deux points, contrairement à l'hypothèse que K est irréductible entre eux.

Théorème XXVII. *Pour qu'un ensemble de points soit un arc simple il faut et il suffit qu'il soit fermé et connexe irréductible entre deux points⁵⁾.*

¹⁾ Janiszewski a établi dans sa Thèse le théorème suivant:

Pour qu'un continu borné soit un arc simple il faut et il suffit qu'il soit irréductible entre deux points et qu'il ne contienne aucun continu de condensation.

Or, il résulte immédiatement du lemme XXVI, que la condition d'être borné peut être omise dans l'énoncé de ce théorème. En outre, la démonstration du théorème de Janiszewski ne s'applique qu'aux continus bornés, parce qu'elle fait usage de la propriété suivante, qui ne subsiste d'une façon générale que relativement aux ensembles bornés:

tous deux points d'un continu borné peuvent y être joints par un sous-continu irréductible entre eux.

²⁾ Sur les lignes de Jordan, Fund. Math. I, p. 176.

³⁾ Un point p d'un continu C est dit de *second genre*, lorsque pour un certain $\delta > 0$ il existe dans tout entourage de p un point de C qui ne peut y être relié avec p que par un sous-continu de C de diamètre $> \delta$. Un continu qui ne contient aucun point de second genre est dit une *ligne de Jordan généralisée* (Mazurkiewicz, ibid, pp. 170 et 193).

⁴⁾ Ibid, p. 201.

⁵⁾ Il importe de remarquer que M. Lennes (l. c., p. 308) définit l'arc simple comme l'ensemble qui vérifie les conditions (22) — (24). Or, ces trois conditions ne sont pas indépendantes tout au moins pour l'espace

Démonstration. Les conditions sont nécessaires. En effet, le segment de droite les remplit évidemment. D'autre part, la propriété d'être connexe irréductible entre deux points étant un invariant de l'Analysis Situs et celle d'être un ensemble fermé l'étant aussi pour les ensembles bornés, — tout ensemble homéomorphe avec un segment de droite satisfait aux conditions précitées.

Les conditions sont suffisantes. En effet, un ensemble qui les remplit est un continu irréductible entre deux points et ne contient en vertu du lemme XXII aucun continu de condensation. Il est donc borné suivant le lemme XXVI. Les trois conditions du lemme XXV étant ainsi réalisées cet ensemble est un arc simple.
c. q. f. d.

Corollaire XXVIII. *Tout sous-continu d'un ensemble connexe irréductible entre deux points est un arc simple.*

En combinant les résultats acquis sur les ensembles biconnexes avec ceux qui concernent les ensembles connexes irréductibles entre deux points, on parvient à un théorème des plus importants pour la théorie des ensembles connexes. Le théorème XIX nous permet de décomposer un ensemble I en deux ensembles connexes $A(p)$ et $B(p) - (p)$ sans points communs pour tout p différent de a et b ; on en conclut qu'aucun ensemble connexe irréductible entre deux points n'est biconnexe. En vertu du corollaire XI il en résulte le

Théorème XXIX. *Un ensemble biconnexe ne contient aucun sous-ensemble qui soit connexe et irréductible entre deux points.*

On sait que tous deux points situés sur un continu borné peuvent y être reliés par un sous-continu irréductible entre eux¹⁾. Ce n'est plus le cas, si l'on passe aux continus non-bornés; toutefois, chaque point d'un continu quelconque y est situé sur un sous-continu irréductible entre deux points (théorème IX', p. 213). Or, comme nous venons de voir, il existe toute une classe d'ensembles connexes qui ne contiennent aucun sous-ensemble connexe irréductible entre deux points.

euclidien. En effet, tout ensemble qui vérifie les conditions (22) et (23) est en vertu du théorème XXVII un arc simple, et tout arc simple étant borné, il vérifie de même la condition (24). En se servant de cette définition, M. Lennes démontre les théorèmes XVII, XX et XXIII pour les ensembles fermés bornés.

¹⁾ Janiszewski, C. R. t. CLI, 1911, Mazurkiewicz ibid.

§ 3.

Addition et multiplication des ensembles connexes irréductibles entre deux points.

Nous allons maintenant établir des conditions nécessaires et suffisantes pour que la somme et le produit de deux ensembles connexes irréductibles entre deux points soient également connexes et irréductibles entre deux points. Désignons par I et I_1 deux ensembles, dont I est, conformément à la convention antérieure, connexe et irréductible entre a et b , tandis que I_1 l'est entre c et d . Pour abréger le langage nous appellerons extrémités de I et I_1 les points entre lesquels ces ensembles sont connexes irréductibles.

La somme $I + I_1$ étant composée de trois parties sans points communs deux à deux, à savoir, des différences $I - I_1$, $I_1 - I$ et du produit $I \times I_1$, — il est bien naturel de voir les propriétés de ces ensembles intervenir dans la solution de notre problème.

Nous aurons à nous servir du lemme général suivant qui s'applique à tous les ensembles, sont ils connexes ou non-connexes.

Lemme XXX. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles quelconques A et B soient fermés dans leur somme $A + B$, est que $A \times B$ soit fermé dans $A + B$ et que les différences $A - B$ et $B - A$ soient séparées.*

Démonstration. En tenant compte du lemme I, il s'agit de démontrer que l'égalité

$$(30) \quad A \times B = A \times \overline{B} + \overline{A} \times B$$

équivalent aux deux suivantes:

$$(31) \quad A \times B = \overline{A \times B} \times (A + B),$$

$$(32) \quad (A - B) \times \overline{B - A} + \overline{A - B} \times (B - A) = 0.$$

1° Il est vrai de tous deux ensembles A et B que

$$\overline{A \times B} \times (A + B) = \overline{A \times B} \times A + \overline{A \times B} \times B \subset \overline{A \times B} \times A + \overline{A \times B} \times B = A \times \overline{B} + \overline{A} \times B,$$

d'où

$$(33) \quad \overline{A \times B} \times (A + B) \subset A \times \overline{B} + \overline{A} \times B.$$

En supposant l'égalité (30) réalisée, l'inclusion (33) devient

$$\overline{A \times B} \times (A + B) \subset A \times B.$$

L'inclusion inverse

$$A \times B \subset \overline{A \times B} \times (A + B)$$

étant évidente, on parvient à la formule (31). Nous avons donc démontré, que la formule (31) résulte de la formule (30); nous allons voir à présent qu'il en est de même de la formule (32). En effet, d'après le lemme II la jonction de $A - B$ et $B - A$ est contenue dans celle de A et B , qui suivant (30) est égale à $A \times B$. On a donc

$$(34) \quad (A - B) \times \overline{B - A} + \overline{A - B} \times (B - A) \subset A \times B.$$

Or, la jonction de deux ensembles étant toujours contenue dans leur somme, on a

$$(35) \quad (A - B) \times \overline{B - A} + \overline{A - B} \times (B - A) \subset (A + B) - A \times B,$$

puisque

$$(A - B) + (B - A) = (A + B) - A \times B.$$

En multipliant les inclusions (34) et (35) l'une par l'autre, on parvient précisément à la formule (32)

2° Il nous reste à démontrer qu'inversement, les égalités (31) et (32) impliquent l'égalité (30).

D'après les identités évidentes

$$A = (A - B) + A \times B \quad \text{et} \quad B = (B - A) + A \times B,$$

on a pour tous deux ensembles A et B :

$$\begin{aligned} A \times \overline{B} &= [(A - B) + A \times B] \times \overline{(B - A) + A \times B} = \\ &= (A - B) \times \overline{B - A} + \overline{A \times B} \times (A - B) + A \times B \end{aligned}$$

et de même

$$\overline{A} \times B = \overline{A - B} \times (B - A) + \overline{A \times B} \times (B - A) + A \times B.$$

En ajoutant membre à membre ces deux identités et en tenant compte de (32), on trouve

$$\begin{aligned} A \times \overline{B} + \overline{A} \times B &= \overline{A \times B} \times [(A - B) + (B - A)] + A \times B = \\ &= \overline{A \times B} \times [(A + B) - A \times B] + A \times B = \\ &= \overline{A \times B} \times (A + B) + A \times B, \end{aligned}$$

ce qui se réduit en vertu de (31) à

$$A \times \overline{B} + \overline{A} \times B = A \times B,$$

c'est à dire, précisément à la formule (30).

Lemme XXXI. *Si la somme des ensembles I et I_1 est connexe irréductible entre deux quelconques de leurs extrémités, le produit $I \times I_1$ est connexe (au sens plus large) irréductible entre les deux autres et est identique à la jonction de I et I_1 .*

Démonstration. Envisageons en premier lieu le cas, où $I + I_1$ est connexe irréductible entre a et b . Cette hypothèse entraîne évidemment l'identité

$$(36) \quad I + I_1 = I,$$

d'où

$$I \times I_1 = I_1;$$

par conséquent, le produit $I \times I_1$ est connexe irréductible entre c et d . De plus, — d'après le corollaire XXIV et la formule (36) — I_1 est une portion contenant ses bornes par rapport à l'ensemble ordonné I ; par conséquent, en vertu du lemme XXII, I_1 est fermé dans I , donc dans $I + I_1$. Ainsi en tenant compte du lemme I, notre lemme est réalisé dans ce cas.

Il nous reste donc à envisager le cas, où $I + I_1$ est connexe irréductible entre a et d . Selon les théorèmes XXIII et XXIV les ensembles I et I_1 forment dans ce cas deux portions de l'ensemble ordonné $I + I_1$, qui sont semblables à deux segments d'une droite. Il en résulte d'après le lemme XXII que I et I_1 sont fermés dans leur somme, donc en vertu du lemme I leur produit est identique à leur jonction. Ainsi, $I \times I_1$ n'est pas vide, puisque $I + I_1$ est connexe. Or, le produit non vide de deux segments situés sur la même droite en est également un segment ou se réduit à un point. De même le produit $I \times I_1$ forme dans l'ensemble ordonné $I + I_1$ une portion à bornes b et c ou bien il se réduit au point $b = c$. Il est donc en tout cas connexe (au sens plus large) et irréductible entre b et c . c. q. f. d.

Lemme XXXII. *Lorsque le produit des ensembles I et I_1 est connexe (au sens plus large) irréductible entre deux extrémités quelconques de ces ensembles et les différences $I - I_1$ et $I_1 - I$ sont séparées, la somme $I + I_1$ est connexe irréductible entre les deux autres extrémités de I et I_1 .*

Démonstration. Remarquons d'abord que le lemme est vrai, lorsque $I \times I_1$ est connexe (au sens plus large) irréductible entre a et b . En effet, on aura dans ce cas:

$$I \times I_1 = I, \text{ d'où } I + I_1 = I_1,$$

par conséquent $I + I_1$ est connexe irréductible entre c et d .

Admettons donc, que $I \times I_1$ est connexe (au sens plus large) irréductible entre b et c , les différences $I - I_1$ et $I_1 - I$ étant séparées. Soit S un sous-ensemble connexe de $I + I_1$, qui contient a et d comme éléments. Il s'agit de démontrer que $S = I + I_1$.

Désignons par p un point quelconque de I distinct de a et supposons que p n'appartienne pas à S .

Deux cas peuvent se présenter:

1° p est un point de $I - I_1$. Envisageons l'identité

$$(37) \quad I + I_1 = A(p) + B(p) + (I_1 - I)$$

qui est une conséquence immédiate des identités

$$I + I_1 = I + (I_1 - I) \text{ et } I = A(p) + B(p).$$

En vertu de (37) et de l'inclusion $S \subset I + I_1$ on a

$$(38) \quad S = S \times A(p) + S \times [B(p) + (I_1 - I)].$$

Cette formule représente une décomposition de S en deux ensembles séparés. En effet, la jonction de $S \times A(p)$ et $S \times B(p)$ est contenue dans celle de $A(p)$ et $B(p)$, qui se réduit au point p en vertu du théorème XIX. Ce point n'appartenant pas à S , les ensembles $S \times A(p)$ et $S \times B(p)$ sont séparés. D'autre part, puisque p appartient à $I - I_1$, on a d'après les théorèmes XV et XXI

$$A(p) \subset I - I_1.$$

Les différences $I - I_1$ et $I_1 - I$ étant, par hypothèse, séparées, les ensembles $S \times A(p)$ et $I_1 - I$ le sont à plus forte raison. Ainsi $S \times A(p)$ est séparé de $S \times B(p)$ et de $I_1 - I$. Il est donc séparé de leur somme et la formule (38) représente, par conséquent, une décomposition de S en deux ensembles séparés. Ces ensembles n'étant pas vides, puisque $S \times A(p)$ contient a sans contenir d , l'ensemble S n'est pas connexe, contrairement à notre supposition.

Donc p est un point de S .

2° p appartient à $I \times I_1$. Cet ensemble étant par hypothèse connexe (au sens plus large) et irréductible entre c et b , considérons le comme ordonné, de sorte que c soit son premier élément et b le dernier. Désignons par P l'ensemble de tous les éléments de $I \times I_1$ qui précèdent p et par R l'ensemble de ceux qui le suivent. Alors

$$I \times I_1 = P + (p) + R.$$

En vertu de l'identité

$$I + I_1 = (I - I_1) + I \times I_1 + (I_1 - I)$$

et de la supposition que p n'appartient pas à S , on en conclut que

$$(39) \quad S = [S \times (I - I_1) + S \times P] + [S \times R + S \times (I_1 - I)].$$

Or, $I - I_1$ et R étant deux portions de I et p un point interposé entre elles, ces portions et — à plus forte raison leurs sous-ensembles $S \times (I - I_1)$ et $S \times R$ — sont séparés. Par raison de symétrie il en est de même de $S \times P$ et $S \times (I_1 - I)$. Comme, d'autre part, les ensembles $I - I_1$ et $I_1 - I$ sont séparés par hypothèse et p sépare les portions P et R et à plus forte raison, leurs sous-ensembles $S \times P$ et $S \times R$, — la formule (39) nous représente une décomposition de S en deux ensembles séparés. Aucun d'eux n'est vide, puisque le premier en contient a et le second d . Ainsi, notre supposition que S est connexe sans contenir p implique une contradiction.

Il est donc établi, que tout point de I appartient à S . Par raison de symétrie il en est de même de tout point situé sur I_1 . Donc $I + I_1 \subset S$ et

$$S = I + I_1$$

c. q. f. d.

Les lemmes XXXI et XXXII entraînent en vertu du lemme XXX le suivant

Théorème XXXIII. *Pour que la somme $I + I_1$ soit connexe irréductible entre deux extrémités quelconques des ensembles I et I_1 il faut et il suffit, que le produit $I \times I_1$ soit connexe (au sens plus large) irréductible entre les deux autres extrémités de ces ensembles et que les différences $I - I_1$ et $I_1 - I$ soient séparées.*

Les lemmes XXX et XXXI nous permettent en outre de remplacer dans l'énoncé du théorème précédent la propriété des diffé-

rences d'être séparées par la propriété plus restrictive du produit d'être égal à la jonction, ou par celle des ensembles I et I_1 d'être fermés dans leur somme, les deux dernières propriétés étant équivalentes en vertu du lemme I.

En cas, où $b = d$ nous avons le suivant

Corollaire XXXIV. *Pour que la somme de deux ensembles connexes, dont un est irréductible entre a et b et le second entre b et c , soit connexe irréductible entre a et c il faut et il suffit que la jonction de ces ensembles se réduise au point b seul.*

Il a été aisé d'observer que les conditions pour que la somme de deux ensembles connexes irréductibles entre deux points le soit également, ont pu être formulées sans aucune restriction concernant les extrémités des ensembles considérés. Or, ce n'est pas le cas du produit de tels ensembles, car ses propriétés varient suivant la situation des extrémités de I et I_1 dans la somme $I + I_1$.

Le cas, où les ensembles I et I_1 sont séparés, étant manifestement dépourvu d'intérêt, nous allons nous borner à celui, où leur jonction n'est pas vide. De même, nous n'aurons pas à envisager le cas, où $I \times I_1$ ne contient qu'une seule des extrémités de I et I_1 (p. ex. a), soit elle différente des autres ou identique à quelque d'elles. En effet, le problème de l'irréductibilité d'un tel produit entre a et a se réduit simplement à la condition qu'il soit composé de cette extrémité unique.

Admettons donc que $I \times I_1$ contient au moins deux extrémités différentes des ensembles I et I_1 .

Or, s'il en contenait davantage, deux d'entre elles appartiendraient à un même ensemble I ou I_1 . Soit I cet ensemble. On voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour que le produit $I \times I_1$ soit connexe irréductible entre les extrémités de I est que $I \subset I_1$, la situation de celles de I_1 étant d'ailleurs absolument indifférente. Quant à la condition pour que le produit $I \times I_1$ contenant les extrémités a , b et c , distinctes l'une de l'autre, soit connexe irréductible entre a et c , — elle n'existe point, $I \times I_1$ n'étant jamais connexe irréductible entre a et c , lorsqu'il contient b . En effet, $I \times I_1$ contenant a et b et étant un sous-ensemble connexe de I (qui est connexe irréductible entre ces deux points), on a

$$(40) \quad I = I \times I_1$$

et comme I est connexe irréductible entre les points a et b , il ne l'est pas — en vertu du théorème XVIII — entre a et c , puisque $b \neq c$. Donc, d'après (40) le produit $I \times I_1$ n'est pas connexe irréductible entre a et c .

Il ne nous reste donc à envisager que le cas où $I \times I_1$ contient précisément une extrémité de I (soit b) et une de I_1 (soit c), toutes les quatre extrémités des ensembles I et I_1 étant différentes. Cette condition réalisée, on a le

Théorème XXXV. *Pour que le produit des ensembles I et I_1 soit connexe irréductible entre b et c il faut et il suffit qu'une des différences $I - I_1$ ou $I_1 - I$ soit connexe.*

Démonstration. 1° En effet, $I \times I_1$ étant, par hypothèse, un sous-ensemble connexe de I et contenant b , la différence $I - I \times I_1$ ou bien, ce qui revient au même, la différence $I - I_1$ est connexe en vertu du théorème XV.

2° Supposons, inversement, la différence $I - I_1$ connexe. Il s'agit de démontrer que le produit $I \times I_1$ est connexe irréductible entre b et c .

$I - I_1$ étant connexe et contenant a , l'ensemble ordonné I est d'après le théorème XV décomposé en deux portions $I - I_1$ et $I \times I_1$ sans points communs. Nous démontrerons que c est le premier point de $I \times I_1$.

Supposons, au contraire, qu'un point p de $I \times I_1$ précède c . Il en résulte que

$$(41) \quad c \text{ appartient à } B(p).$$

Les points b et p étant différents des extrémités c et d de I_1 et P désignant sa portion qui contient les points b et p comme bornes,

$$(42) \quad c \text{ n'appartient pas à } P.$$

Le produit $I \times I_1$ est connexe, puisqu'il constitue une portion de I ; il est donc un sous-ensemble connexe de I_1 et en vertu du corollaire XXIV il est également une portion par rapport à l'ensemble ordonné I_1 . Or la portion $I \times I_1$ contenant par hypothèse les points b et p , et P étant la plus petite portion de I_1 qui contient ces points, on a

$$P \subset I \times I_1 \text{ donc } P \subset I.$$

Mais en vertu du corollaire XXIV P est l'unique sous-ensemble de I qui soit connexe irréductible entre p et b , donc d'après le théorème XIX

$$(43) \quad P = B(p),$$

ce qui est impossible en vertu de (41) et (42).

La supposition que $I \times I_1$ contient un point p qui précède c implique une contradiction; c est donc le premier point de $I \times I_1$ par rapport à I . Comme l'ensemble $I \times I_1$ est ainsi une portion de I contenant ses bornes (à savoir c et b), il est — en vertu du corollaire XXIV — connexe irréductible entre elles, c. q. f. d.

Les théorèmes XXXIII et XXXV impliquent immédiatement le corollaire suivant sur la somme de I et I_1 :

Corollaire XXXVI. *Pour que la somme $I + I_1$ soit connexe irréductible entre a et d il faut et il suffit qu'une des différences $I - I_1$ ou $I_1 - I$ soit connexe et séparée de l'autre.*

Ce corollaire ne s'applique, bien entendu, qu'au cas où les points a, b, c et d sont différents, seul le couple b, c appartenant à $I \times I_1$.

§ 4.

Sur l'ensemble complémentaire des ensembles connexes plans.

On dit qu'un ensemble E coupe le plan entre les points a et b qui ne lui appartiennent pas, lorsqu'on ne peut les joindre par un continu qui n'ait aucun point commun avec E .

Théorème XXXVII. *Lorsque les ensembles A et B (dont un au moins est borné¹⁾) sont séparés, a et b désignant deux points quelconques qui appartiennent respectivement à A et B , il existe un continu qui n'a aucun point commun avec l'ensemble $A + B$ et qui coupe le plan entre les points a et b .*

¹⁾ Dans la démonstration des théorèmes de ce § nous avons recours au théorème suivant qui est dû à M. Brouwer:

C désignant un continu plan borné et D un domaine connexe qui est un constituant de l'ensemble complémentaire de C , la frontière de D est un continu.

Or, dès que ce théorème sera démontré pour les continus quelconques (bornés ou non-bornés) de l'espace à $n \geq 2$ dimensions, la restriction que les ensembles envisagés soient bornés, pourra être omise dans l'énoncé de nos théorèmes XXXVII—XL et XLIII et la démonstration de quelques autres en deviendra plus simple.

Démonstration. Désignons généralement par $\varrho(x, y)$ la distance des points x et y , et par $\varrho(x, Y)$ la borne inférieure des $\varrho(x, y)$ pour tous les y qui appartiennent à Y .

Les ensembles A et B' étant séparés et A étant celui d'entre eux qui est borné, entourons chaque point x de A d'un cercle R_x de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\varrho(x, \overline{B})$. Soit S la somme de tous les cercles ainsi obtenus. Désignons par C ce constituant (voir p. 215) de \overline{S} qui contient le point a . Tout constituant d'un ensemble fermé étant un continu (au sens plus large), C est un continu. Soit $F(C)$ sa frontière. Or,

$$(44) \quad A \times F(C) = 0,$$

puisque tout point de A est entouré d'un cercle situé entièrement dans S .

Nous allons démontrer que

$$(45) \quad B \times F(C) = 0.$$

Supposons qu'il n'en est pas ainsi et désignons par p le point de B qui appartient à $F(C)$. D'après la définition des cercles R_x le point p ne peut appartenir à aucun d'eux. Pour qu'il appartienne à $F(C)$ il faut donc qu'il soit un point d'accumulation de ces cercles. En d'autres termes: pour tout $\delta > 0$ on trouve un point r d'un R_q qui remplit la condition

$$(46) \quad \varrho(r, p) \leq \delta.$$

Or, d'autre part

$$(47) \quad \varrho(q, p) \leq \varrho(q, r) + \varrho(r, p).$$

Le point q appartenant à A , il résulte de la définition du cercle R_q que

$$\varrho(q, r) \leq \frac{1}{2}\varrho(q, \overline{B}),$$

et comme

$$\varrho(q, \overline{B}) \leq \varrho(q, p),$$

on en conclut que

$$(48) \quad \varrho(q, r) \leq \frac{1}{2}\varrho(q, p).$$

Par substitution de la somme des membres droits des inégalités (46) et (48) à celui de l'inégalité (47), on obtient

$$\varrho(q, p) \leq \frac{1}{2}\varrho(q, p) + \delta$$

donc

$$\varrho(q, p) \leq 2\delta.$$

Cette inégalité montre que dans tout entourage du point p de B il existe un point q de A . Par conséquent, p est un point limite de A , et

$$B \times \overline{A} \neq \emptyset,$$

contrairement à l'hypothèse que les ensembles A et B sont séparés. Notre supposition impliquant une contradiction, il s'en suit que la formule (45) est vraie.

Les formules (44) et (45) impliquent que

$$(49) \quad (A + B) \times F(C) = \emptyset.$$

L'ensemble A étant borné par hypothèse, il en est de même de \overline{S} et à plus forte raison de son constituant C . Désignons par Q le constituant de l'ensemble complémentaire de C , qui contient b , et par $F(Q)$ la frontière de Q . D'après le théorème précité de M. Brouwer, $F(Q)$ est un continu. Nous démontrerons que $F(Q)$ est le continu cherché.

La frontière de chaque constituant d'un domaine quelconque est contenue — comme on le sait — dans la frontière de ce domaine. Par conséquent

$$F(Q) \subseteq F(C)$$

et en vertu de (49)

$$(50) \quad (A + B) \times F(Q) = \emptyset.$$

D'autre part, b étant situé dans Q et a ne l'étant pas, tous continus qui relie ces points admet, comme on sait, un point commun avec $F(Q)$, donc $F(Q)$ coupe le plan entre a et b . c. q. f. d.

Corollaire XXXVIII. Lorsque l'ensemble complémentaire d'un ensemble (borné) E ne contient aucun continu qui coupe le plan, l'ensemble E est connexe.

Théorème XXXIX. Pour qu'un ensemble (borné) S soit connexe il faut et il suffit que tout continu qui coupe le plan entre deux points de S ait un point commun avec S .

Démonstration. Soit, en effet K , un continu qui coupe le plan entre les points a et b de S . Désignons par C le constituant du complémentaire de K , qui contient le point a . Par conséquent b n'appartient pas à C . Or, comme a démontré M. Hausdorff¹⁾,

¹⁾ L. c., p. 247, VII.

tout ensemble connexe contenant à la fois un point d'un ensemble quelconque E et un point du complémentaire de E , admet des points communs avec la frontière de E . L'ensemble S contenant à la fois a et b , contient au moins un point frontière de C , donc un point de K .

Inversement, lorsque tout continu qui coupe le plan entre deux points de S contient un point de S , cet ensemble est connexe en vertu du théorème XXXVII. c. q. f. d.

Le théorème précédent entraîne le corollaire suivant qui présente une généralisation d'un théorème bien connu sur les continus:

Corollaire XL. *A et B étant deux ensembles connexes séparés (dont un au moins est borné), il existe un continu qui coupe le plan entre ces ensembles.*

En d'autres termes: l'ensemble A est contenu dans un des constituants du complémentaire de ce continu, tandis que l'ensemble B y est contenu dans un autre.

Lemme XLI. *E étant un ensemble non-connexe situé dans un cercle R (y compris la circonférence), il existe un continu K contenu dans $R - E$.*

Démonstration. L'ensemble E étant par hypothèse décomposable en deux ensembles séparés non vides, son ensemble complémentaire contient en vertu du théorème XXXVII un continu qui coupe le plan entre deux points de E . Comme tous deux points du cercle peuvent y être reliés par un segment de droite, le continu en question contient un point intérieur du cercle R et — d'après (IX') — un sous-continu K situé dans ce cercle. c. q. f. d.

Théorème XLII. *Le complémentaire de tout ensemble punctiforme est connexe¹⁾.*

Démonstration. Supposons que l'on puisse décomposer l'ensemble complémentaire S d'un ensemble punctiforme en une somme de deux ensembles séparés non vides P et Q .

Désignons par R un cercle ainsi choisi, qu'il contienne à la fois un point de P et un point de Q . Les ensembles P et Q étant

¹⁾ Ce théorème a été démontré par M. Sierpiński (ce volume, p. 94) à l'aide du théorème de Phragmén sur la frontière des domaines. On remarquera que notre démonstration s'applique cette fois-ci aussi bien aux ensembles bornés qu'aux non-bornés.

séparés, $R \times P$ et $R \times Q$ le sont à plus forte raison (lemme II).
Comme

$$R \times P + R \times Q = R \times S,$$

cet ensemble est non-connexe et contenu dans R . Or, en vertu du lemme XLI il existe donc un continu K situé dans $R - R \times S$. c'est à dire dans $R - S$. Le continu K serait ainsi contenu dans le complémentaire de S , contrairement à l'hypothèse que ce complémentaire est punctiforme.

Comme la supposition que S n'est pas connexe implique une contradiction, il faut bien admettre, que S est connexe, c. q. f. d.

Dans les §§ précédents nous avons attiré l'attention du lecteur sur trois classes suivantes d'ensembles connexes:

- 1° les ensembles connexes irréductibles entre deux points,
- 2° les ensembles biconnexes,
- 3° les ensembles connexes ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné.

Nous avons démontré qu'il n'existe aucun ensemble jouissant des propriétés (1°) et (2°) à la fois (théorème XXIX); nous donnerons dans le § 5 des exemples d'ensembles qui possèdent les propriétés (1°) et (3°) ou bien (2°) et (3°) simultanément.

Or, les théorèmes que nous venons de démontrer, nous permettent de compléter l'étude de ces propriétés d'ensembles connexes par l'examen des propriétés correspondantes de leur complémentaire.

Théorème XLIII. *Le complémentaire de tout ensemble (borné) connexe irréductible entre deux points est connexe.*

Démonstration. Soit I un ensemble borné, connexe et irréductible entre deux points. Supposons que le complémentaire S de I n'est pas connexe et désignons par p et q deux points quelconques qui appartiennent respectivement aux deux sous-ensembles séparés de S . Envisageons un cercle R , contenant dans son intérieur l'ensemble \bar{I} et les points p et q .

L'ensemble $R \times S$ n'étant pas connexe, il existe suivant le théorème XXXVII un continu K qui coupe le plan entre p et q et qui n'admet aucun point de $R \times S$ comme élément.

Donc

$$K \times R \times S = 0,$$

d'où

(51)

$$K \times R \subset I.$$

Comme tous deux points d'un cercle s'y laissent joindre par un segment de droite, le continu K contient des points intérieurs de R . Si le continu K était entièrement situé dans l'intérieur du cercle R , on aurait d'après (51):

$$K \subset I.$$

Suivant le corollaire XXVIII le continu K serait un arc simple, ce qui est impossible, puisque — d'après un théorème bien connu — aucun arc simple ne coupe le plan.

Il faut donc admettre que K contient un point de circonférence de R . Mais dans ce cas on pourrait trouver aussi près de cette circonférence que l'on veut des points de K situés à l'intérieur de R . D'après (51) ce seraient donc des points de I , ce qui est impossible, puisque l'ensemble \bar{I} est situé par hypothèse à une distance positive de la circonférence.

Ainsi la supposition que S n'est pas connexe entraîne en tout cas une contradiction; S est donc connexe, c. q. f. d.

Remarquons maintenant, que le complémentaire d'un ensemble qui possède la propriété (2°) ou (3°) est connexe. En effet, les théorèmes XIV et IX' nous apprennent qu'un tel ensemble est punctiforme, et — selon le théorème XLII — le complémentaire d'un ensemble punctiforme est connexe. En y ajoutant le théorème XLIII, il est établi que *le complémentaire de tout ensemble jouissant d'une quelconque des propriétés (1°) — (3°) est connexe* (avec cette restriction pour (1°) que l'ensemble considéré I soit borné; cf. p. 233, 1).

Nous allons démontrer à présent qu'il n'est jamais punctiforme.

Théorème XLIV. *Le complémentaire d'un ensemble connexe irréductible entre deux points n'est pas punctiforme.*

Démonstration. Désignons par R un cercle qui contient des points de l'ensemble I . En vertu du lemme XLI, il ne s'agit de démontrer le théorème que pour le cas où l'ensemble $I \times R$ est connexe.

D'après le corollaire XXIV l'ensemble $I \times R$ forme une portion dans l'ensemble ordonné I . Désignons par p un point quelconque de cette portion, distinct de ses bornes, par P l'ensemble des points de $I \times R$ qui précèdent p et par Q l'ensemble de ceux qui le suivent.

Les ensembles $A(p) - (p)$ et $B(p) - (p)$ étant séparés en vertu

du théorème XIX 2°, P et Q le sont à plus forte raison. En appliquant à leur somme $P + Q$ le lemme XLI, il existe un continu K qui satisfait à l'inclusion

$$K \subset R - (P + Q).$$

Mais

$$P + Q = I \times R - (p),$$

donc

$$K \subset R - I + (p).$$

Autrement dit: le continu K est situé dans R et ne contient aucun point de I sauf — peut être — le point p . Il existe donc d'après (IX') un sous-continu C de K , qui n'admet pas le point p comme élément de sorte que

$$C \times I = 0$$

et le complémentaire de I n'est pas punctiforme, c. q. f. d.

Théorème XLV. *Le complémentaire d'un ensemble biconnexe n'est pas punctiforme.*

Démonstration. Soient p_1 et p_2 deux points arbitraires d'un ensemble biconnexe B . Désignons par R_1 et R_2 deux cercles sans point commun qui contiennent respectivement les points p_1 et p_2 .

Supposons que les ensembles $B \times R_1$ et $B \times R_2$ soient connexes tous les deux.

Comme

$$R_1 \times R_2 = 0,$$

on a

$$B \times R_1 \subset B - B \times R_2$$

et, $B \times R_1$ étant connexe, l'ensemble $B - B \times R_2$ qui le contient ne serait pas dispersé. Or, B étant biconnexe et $B \times R_2$ en étant un sous-ensemble connexe, ceci est en contradiction avec le théorème XI.

Par conséquent un des ensembles $B \times R_1$ ou $B \times R_2$ n'est pas connexe. Soit $B \times R_1$ cet ensemble. En vertu du lemme XLI il existe dans ce cas un continu situé dans $R_1 - B \times R_1$, donc dans le complémentaire de B , c. q. f. d.

Théorème XLVI. *Lorsqu'un ensemble connexe n'admet pas de sous-ensembles connexes bornés, son complémentaire n'est pas punctiforme.*

Démonstration. Entourons d'un cercle R un point quelconque d'un ensemble connexe M ne contenant pas de sous-ensembles connexes

bornés. L'ensemble $M \times R$, étant borné, n'est pas connexe; donc, en vertu du lemme XLI il existe un continu n'ayant aucun point commun avec M , c. q. f. d.

Nous terminons ce § par quelques remarques sur la décomposition du plan en deux ensembles punctiformes. Des exemples d'une telle décomposition ont été donnés par MM. Mazurkiewicz¹⁾ et Sierpiński²⁾. Tout récemment M. Sierpiński³⁾ a démontré que l'on peut même décomposer le plan en deux ensembles connexes, dont aucun n'admet de sous-ensemble parfait.

Or, les ensembles que l'on obtient en décomposant le plan en deux ensembles punctiformes sont — selon le théorème XLII — connexes tous les deux. D'autre part, il ressort immédiatement des théorèmes XLIV—XLVI qu'aucun d'eux n'est ni irréductible entre deux points, ni biconnexe, ni dépourvu de sous-ensembles connexes bornés.

Vu les recherches faites par MM. Mazurkiewicz et Sierpiński les trois théorèmes suivants ne seront peut être pas privés d'intérêt.

Théorème XLVII. *Il est impossible de décomposer le plan en deux ensembles connexes irréductibles entre deux points.*

Démonstration. Supposons, au contraire, le plan décomposé en deux ensembles I et I_1 connexes et irréductibles entre deux points.

D'après le théorème XLIV aucun d'eux n'est punctiforme; soit C un continu situé dans I . En vertu du corollaire XXIV ce continu constitue une portion dans l'ensemble ordonné I . En désignant par p un point de C différent des bornes de cette portion, on doit admettre conformément au lemme XXII que

$$(52) \quad p \text{ n'est pas un point limite de } I - C.$$

Or, entourons le point p par des cercles concentriques R_n de rayon $\frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Le continu C étant un arc simple en raison du corollaire XXVIII, on peut trouver dans chaque cercle R_n un point situé dans $R_n - C$. D'autre part, il est impossible que I_1 contienne un $R_n - C$, puisque la différence $R_n - C$ contient des continus qui ne sont pas des arcs simples. Il existe donc dans tout

¹⁾ *Contribution à la théorie des ensembles*, Bull. Acad. Sc. Cracovie 1913.

²⁾ *Sur la décomposition du plan en deux ensembles punctiformes*, ibid.

³⁾ *Sur un ensemble punctiforme connexe*, Fund. Math. I, 1920.

$R_n - C$ un point r_n qui n'appartient pas à I_1 , donc un point de $I - C$. Par conséquent la suite $\{r_n\}$ composée de points appartenant uniquement à $I - C$ converge vers le point p , c'est à dire, que

(53) p est un point limite de $I - C$.

Ainsi, en supposant le plan décomposé en deux ensembles connexes irréductibles entre deux points, on parvient à des conclusions contradictoires: (52) et (53). Une telle décomposition du plan est donc impossible, c. q. f. d.

Théorème XLVIII. *Il est impossible de décomposer le plan en deux ensembles biconnexes.*

Ce théorème résulte immédiatement des théorèmes XIV et XLV.

Théorème XLIX. *Il est impossible de décomposer le plan en deux ensembles dont aucun ne contienne de sous-ensemble connexe borné.*

Ce théorème résulte de (IX') et du théorème XLVI.

§ 5.

Exemples.

α) Exemple d'un ensemble biconnexe.

Désignons par C un ensemble non-dense parfait situé sur le segment $[0, 1]$ de l'axe X , par P l'ensemble de tous les points de C qui sont des extrémités des segments „contigus“ à C , et par Q l'ensemble $C - P$.

Joignons ensuite le point a à abscisse et ordonnée égales à $1/2$ par un segment $L(c)$ à tout point c de C (voir fig. 2, p. 254).

S_1 désignant l'ensemble de tous les points à ordonnée rationnelle situés sur les $L(p)$ pour tout p appartenant à P , et S_2 désignant l'ensemble de tous les points à ordonnée irrationnelle situés sur les $L(q)$ pour tout q appartenant à Q , leur somme

$$S = S_1 + S_2$$

est un ensemble biconnexe.

Nous démontrerons d'abord que S est connexe.

Soit

$$(54) \quad S = A + B$$

et

$$(55) \quad A \times \overline{B} + \overline{A} \times B = 0,$$

le point a appartenant à A .

Il s'agit de démontrer que $B=0$.

Pour tout point donné c de C envisageons sur le $L(c)$ correspondant tous les segments qui contiennent a sans contenir aucun point de B . Désignons par $l(c)$ l'extrémité inférieure du plus grand de ces segments. D'après (55) un tel point $l(c)$ existe toujours. Il n'appartient pas à S , à moins qu'il ne soit situé sur l'axe X , c'est à dire, à moins que $l(c)=c$.

D'ailleurs, comme, par définition, aucun q de Q n'appartient à S — puisque son ordonnée est nulle, donc rationnelle — nous pouvons affirmer que toujours $l(q) \neq q$, donc qu'aucun $l(q)$ n'appartient à S .

Puisqu'en même temps $l(q)$ est situé sur $L(q)$, l'ordonnée de tout $l(q)$ est rationnelle. En désignant par E l'ensemble de tous les $l(q)$, on peut poser:

$$E = E_0 + E_1 + \dots + E_n + \dots$$

de sorte que pour tout $n \geq 1$ l'ensemble E_n soit situé sur une droite horizontale à distance rationnelle de l'axe X et que E_0 soit situé sur cet axe.

On a donc

$$(56) \quad E_0 \subset Q$$

et, comme tout point des autres E_n est un point limite des ensembles A et B , on peut écrire:

$$E_n \subset \overline{A} \times \overline{B},$$

d'où

$$\overline{E_n} \subset \overline{A} \times \overline{B}.$$

En multipliant cette inclusion par l'identité (54) membre à membre, on en déduit en vertu de (55) que

$$(57) \quad \overline{E_n} \times S = 0$$

pour tout $n \geq 1$.

Il en résulte qu'aucun point de $\overline{E_n}$ n'est situé sur un segment $L(p)$. En effet, tous les points de $\overline{E_n}$ sont situés sur une droite horizontale à distance rationnelle de l'axe X , donc leur ordonnée est rationnelle; or, si un d'eux appartenait à $L(p)$, il serait par définition un point de S — contrairement à (57). Il est donc établi que

$$(58) \quad \overline{E}_n \times L(p) = 0$$

pour tout $n \geq 1$ et pour tout point p de P .

Désignons maintenant par Q_n l'ensemble de tous les points c de C qui remplissent la condition:

$$\overline{E}_n \times L(c) \neq 0.$$

Pour tout $n \geq 1$ on a en raison de (58)

$$(59) \quad Q_n \subset Q.$$

D'autre part,

$$(60) \quad Q \subset E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n,$$

puisque pour tout point q de Q il existe par définition un ensemble E_n (où $n \geq 0$) qui contient un point de $L(q)$, à savoir, le point $l(q)$.

Les formules (56), (59) et (60) donnent la formule

$$(61) \quad C = P + E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Or, tout ensemble Q_n étant une projection (du point a sur l'axe X) de l'ensemble fermé et borné \overline{E}_n , il est lui même fermé. De plus, comme chaque point de Q est par définition un point limite de P , tout ensemble Q_n est, selon (59), non dense dans C . Par conséquent l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ est de première catégorie (au sens

de Baire) par rapport à C .

L'ensemble P étant dénombrable, la somme $P + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ est également de première catégorie par rapport à C . Il en résulte en vertu de (61) que l'ensemble E_0 est dense dans C .

Chaque point e de E_0 étant un $l(q)$ situé sur l'axe X , tous les points de S situés sur les segments $L(e)$ appartiennent, par définition, à l'ensemble A . Comme E_0 est dense dans C , l'ensemble de tous les points de S situés sur les $L(e)$ correspondants est dense dans S . Par conséquent,

$$\overline{A} \supset S,$$

d'où on déduit en vertu de (54) que

$$\overline{A} \supset A + B \quad \text{et que} \quad \overline{A} \times B = B;$$

donc, d'après (55), $B=0$, c. q. f. d.

Nous avons ainsi établi que S est un ensemble connexe. Observons maintenant que tout sous-ensemble connexe de S contient le point a . En effet, il est évident qu'aucun sous-ensemble de S qui est situé sur un seul segment $L(c)$ ne peut être connexe; d'autre part, pour tout couple des points situés sur des segments différents on peut tracer une droite qui ne rencontre l'ensemble S que dans le point a et qui découpe ainsi le plan entre les deux points de ce couple.

Ainsi l'ensemble $S - (a)$ ne contient aucun sous-ensemble connexe. Il est donc dispersé, ce qui suffit pour en déduire que l'ensemble S est biconnexe. Selon les théorèmes XIV et XXIX l'ensemble S est punctiforme et ne contient aucun sous-ensemble connexe irréductible entre deux points.

Nous signalons deux applications de cet exemple:

α_1) Soit T un ensemble symétrique à S par rapport à l'axe X . L'ensemble $S + T$ est un exemple bien simple d'un ensemble punctiforme qui coupe le plan. Il importe de remarquer que l'ensemble $S + T$ n'est pas biconnexe; toutefois il ne contient aucun sous-ensemble connexe irréductible entre deux points.

α_2) On peut modifier l'ensemble S de façon à en obtenir un ensemble biconnexe qui ne contient aucun sous-ensemble connexe borné.

Plaçons à ce but l'ensemble non-dense et parfait C sur le segment $[(1, 0), (1, 1)]$; pour tout point de C désignons par c son ordonnée et par $L(c)$ l'ensemble de tous les points (x, y) qui satisfont à l'équation:

$$y = c + \frac{1}{x} \sin \frac{\pi}{x}$$

pour $0 < x \leq 1$ (voir fig. 3, p. 254)¹⁾.

Soit, comme auparavant, S_1 l'ensemble des points à ordonnée rationnelle situés sur des courbes $L(p)$ pour tout point p de C qui sert d'extrémité à un segment „contigu“ à C . Soit S_2 l'ensemble de tous les points à ordonnée irrationnelle situés sur toutes les autres

¹⁾ Pour des raisons typographiques l'ensemble C y est placé sur le segment $[(1, 0), (1, 3)]$.

courbes satisfaisant à susdite équation. Désignons enfin par a un point arbitrairement choisi sur l'axe Y . L'ensemble somme

$$S = (a) + S_1 + S_2$$

est biconnexe et n'admet aucun sous-ensemble connexe borné.

La démonstration de ces propriétés est tout à fait analogue à celle des propriétés de l'exemple (a).

β) Exemple d'un ensemble punctiforme, connexe et irréductible entre deux points.

Désignons par C le carré, dont le côté inférieur est le segment $[0, 1]$ de l'axe X . Décomposons ce segment en c ensembles denses dans lui et n'ayant deux à deux aucun point commun (c étant la puissance du continu)¹⁾. Soit E la classe de ces ensembles. Établissons ensuite une correspondance biunivoque entre les éléments de cette classe et les nombres réels $0 \leq t \leq 1$ et désignons par E_t l'ensemble-élément de E qui correspond au nombre réel t . Sur toute droite verticale à distance $0 \leq d \leq 1$ de l'axe Y désignons par V_d le segment situé entre les deux côtés horizontaux du carré C .

Envisageons la classe K de tous les continus situés dans C qui ont des points communs avec les deux côtés latéraux de ce carré. La classe K étant de la puissance c , désignons par K_t le continu-élément de K qui vient correspondre d'une façon biunivoque au nombre réel t .

Comme un K_t donné contient par définition des points situés sur les côtés latéraux de C , on trouve sur chaque V_d au moins un point appartenant à K_t ; convenons d'en choisir pour tout d de E_t le point à ordonnée minimum de chaque produit $V_d \times K_t$ et désignons par P_t l'ensemble ainsi obtenu.

L'ensemble somme P de tous les P_t pour $0 \leq t \leq 1$ est punctiforme, connexe et irréductible entre deux points.

Nous démontrerons d'abord qu'il est punctiforme.

Par définition de l'ensemble P le produit $P \times V_d$ se compose d'un seul point pour tout $0 \leq d \leq 1$. Par suite, il n'existe aucun sous-continu de P qui soit situé sur une droite verticale.

Supposons maintenant que Q est un sous-continu de P . Il existe

¹⁾ Voir p. 252, 1°.

donc deux segments verticaux V_d et V_e (soit $d < e$) qui rencontrent Q sur leur passage. D'autre part, en vertu de (IX'), le continu Q peut être supposé de diamètre assez petit pour qu'il ne contienne aucun point d'un au moins des cotés horizontaux de C ; soit H ce côté.

H est, par définition, un continu de la classe K ; il est donc un K_i . Or, l'ensemble E_i étant dense dans le segment $[0, 1]$, on trouvera un tel f de E_i que

$$d < f < e.$$

Le segment V_f contient donc un point de K_i , par conséquent, il ne peut contenir aucun point de Q . Ainsi la droite $x = f$ coupe le continu Q entre le point d'abscisse d et celui d'abscisse e , ce qui est absurde. La supposition que P n'est pas punctiforme implique donc une contradiction.

Ceci établi, nous allons démontrer que P est connexe.

Supposons qu'il n'en est pas ainsi. Suivant le théorème XXXVII il existerait donc un continu L qui coupe le plan entre deux points de P et satisfait à l'égalité

$$(62) \quad L \times P = 0,$$

le produit $L \times C$ n'étant pas vide. Envisageons de plus près ce produit.

Comme tout V_d renferme un point de P , l'ensemble $L \times C$ ne contient aucun V_d tout entier. D'autre part, s'il ne contenait que des continus situés sur des verticales, on pourrait montrer aisément que tous deux points de $C - L$ peuvent y être joints par un continu situé entièrement dans $C - L$, ce qui est impossible, puisque L coupe le plan entre deux points de P . Le produit $L \times C$ contient donc un continu M qui admet comme éléments des points à abscisses différentes.

Soient m_1 et m_2 deux points de M à abscisse minimum et maximum respectivement et soient d et e ces abscisses. M_1 désignant le segment qui va de m_1 à $(0, 0)$ et M_2 désignant celui qui va de m_2 à $(1, 1)$, le continu

$$N = M_1 + M + M_2$$

est évidemment un K_i . Soit f un élément de E_i qui satisfait à l'inégalité

$$d < f < e.$$

Un point p de l'ensemble $N \times V$, appartient par définition à P . Le segment M_1 étant situé à gauche de V_a et le segment M_2 à droite de V_a , le point p appartient à M . Donc

$$M \times P \neq 0$$

et, comme M est un sous-ensemble de L ,

$$L \times P \neq 0$$

contrairement à (62). Il est donc prouvé que P est un ensemble connexe.

Il nous reste à démontrer qu'il est connexe irréductible entre deux points. Il l'est en effet entre son point à abscisse 0 et celui à abscisse 1, puisque, si l'on supprime à P un point quelconque (x_0, y_0) distinct de ces extrémités, la droite $x = x_0$ en décompose le reste en deux ensembles séparés.

Ainsi toutes les propriétés proposées de l'ensemble p sont établies.

On remarquera encore que P est dense dans le carré C . En effet, si on entoure un point intérieur quelconque de C d'un cercle R situé à l'intérieur de ce carré et si l'on procède par rapport à R comme nous venons de le faire par rapport au continu M , on prouve que R contient des points de P .

Nous signalons l'application suivante de cet exemple:

β_1) On voit aisément qu'en définissant l'ensemble P on a pu admettre qu'il ne contienne aucun point du côté inférieur du carré C . Il suffirait pour cela de supposer tous les continus K_i situés au-dessus de l'axe X .

Supposons qu'on ait défini l'ensemble P précisément de cette façon et remplaçons l'ordonnée y de tous ses points par $\frac{1}{y}$; P se transforme ainsi en un ensemble homéomorphe P_1 . Or, P étant punctiforme, connexe et irréductible entre deux points, il en est de même de P_1 , puisque ces propriétés sont des invariants de l'Analysis Situs.

En outre P_1 ne contient aucun sous-ensemble qui soit connexe et borné à la fois.

En effet, il n'admet sur aucune droite verticale plus d'un élément, et P étant dense dans le carré C , on trouve entre toutes deux verticales qui le rencontrent un point de P_1 à ordonnée aussi grande que l'on veut.

γ) Démonstration de l'existence d'un ensemble connexe irréductible entre deux points qui n'admet aucun sous-ensemble parfait.

Envisageons la classe de tous les ensembles parfaits situés à l'intérieur d'un cercle R de centre p . La puissance de cette classe est c . En appliquant le théorème de M. Zermelo, soit

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_c)$$

la suite transfinie de tous ces ensembles parfaits (Ω_c désignant le plus petit nombre ordinal de puissance c).

Envisageons ensuite la classe de tous les continus qui coupent le cercle R tout en étant situés à l'intérieur de lui. Cette classe est aussi de puissance c ; on peut donc ranger ses éléments en une suite transfinie

$$K_1, K_2, \dots, K_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_c).$$

Envisageons enfin deux suites transfinies de points

$$\begin{array}{l} s_1, s_2, \dots, s_\alpha, \dots \\ t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots \end{array} \quad (\alpha < \Omega_c)$$

définies de la façon suivante:

Soient s_1 un point quelconque de K_1 et t_1 un point de P_1 distinct de s_1 . Désignons par C_1 la circonférence de centre p qui traverse s_1 .

Si s_1 appartient à K_2 , posons $s_2 = s_1$.

S'il n'en est pas ainsi, on constate tout de suite que K_2 n'est pas entièrement situé sur la circonférence C_1 . En effet, aucun vrai sous-continu d'une circonférence ne coupe le plan, tandis que K_2 le coupe par définition et, si K_2 était identique à C_1 , le point s_1 appartiendrait à K_2 .

Par conséquent, l'ensemble $K_2 - C_1$ n'est pas vide. On démontre sans peine qu'il est de puissance c . Convenons donc, qu'en cas où s_1 n'appartient pas à K_2 , s_2 désigne un point quelconque de $K_2 - C_1$ distinct de t_1 . Quant à t_2 , nous désignerons ainsi un point arbitraire de P_2 différent à la fois de s_1 et de s_2 .

Les suites

$$\begin{array}{l} s_1, s_2, \dots, s_\xi, \dots \\ t_1, t_2, \dots, t_\xi, \dots \end{array}$$

étant définies pour tout ξ inférieur à un $\alpha < \Omega_c$, on pose

$$s_\alpha = s_u$$

s'il existe un s_μ à $\mu < \alpha$, qui soit situé sur K_α . Dans le cas contraire s_α est un point de l'ensemble

$$K_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} C_\xi$$

différent de tout point t_ξ à $\xi < \alpha$.

Un tel point s_α existe toujours, car d'une part α est un nombre ordinal de puissance inférieure à celle du continu et d'autre part K_α est ou bien une circonférence de centre p différente de toutes les C_ξ , ou bien il contient des points de deux circonférences différentes; dans ce cas c circonférences de centre p situées entre elles ont des points communs avec K_α .

On désignera par t_α un point quelconque de P_α , pourvu qu'il soit différent de tout s_ξ pour $\xi \leq \alpha$.

Ceci posé, soit r un point arbitraire situé sur la circonférence du cercle R . L'ensemble S composé de tous les s_α (pour $\alpha < \Omega_c$), du point p et du point r est connexe irréductible entre p et r et ne contient aucun sous-ensemble parfait.

En effet, S ne contient aucun sous-ensemble parfait, puisque de chaque ensemble parfait P_α il lui manque le point t_α (pour $\alpha < \Omega_c$). Pour nous convaincre que S est connexe, envisageons l'ensemble $S - (r)$ et supposons que

$$\begin{aligned} S - (r) &= A + B, \\ A \times \overline{B} + \overline{A} \times B &= 0, \\ A \neq 0 \quad \text{et} \quad B \neq 0. \end{aligned}$$

Soit A la somme de $S - (r)$ à laquelle appartient le point p et soit s_α un point quelconque de B . Par définition, s_α est l'unique point de $S \times C_\alpha$. Désignons par M l'ensemble des points de A qui sont situés à l'intérieur de C_α , et posons

$$N = (A - M) + B.$$

Or, M est séparé de l'ensemble $A - M$ par C_α . D'autre part, les ensembles A et B supposés séparés, M est séparé de B à plus forte raison. Il en résulte que les ensembles M et N sont séparés et

$$\begin{aligned} S - (r) &= M + N, \\ M \times \overline{N} + \overline{M} \times N &= 0, \\ M \neq 0, \quad N \neq 0. \end{aligned}$$

Cependant, comme l'intérieur du cercle R est homéomorphe du plan, nous pouvons y appliquer le théorème XXXVII en considérant l'intérieur de ce cercle comme un „espace à deux dimensions“. Ainsi M étant „borné“ par rapport à l'espace ainsi conçu, il existe un continu K , qui coupe cet espace sans contenir aucun point de $S - (r)$. Ceci est en contradiction avec la définition de $S - (r)$, puisque cet ensemble contient le point s , du continu K . $S - (r)$ est donc connexe. Comme il est dense dans R , l'ensemble S est également connexe.

D'autre part, en y supprimant un point quelconque s_ξ , la circonférence C_ξ coupe le plan entre p et r . L'ensemble S est donc connexe irréductible entre p et r .

δ) *Démonstration de l'existence d'un ensemble biconnexe qui ne contient aucun sous-ensemble parfait.*

Envisageons l'ensemble parfait non-dense C de l'exemple (a) et sans modifier le sens des symboles qui y entrent en description désignons par L le continu composé de tous les $L(c)$. Nous allons démontrer à l'aide du théorème de M. Zermelo qu'il existe sur L un ensemble biconnexe, dont aucun sous-ensemble n'est parfait.

Remarquons d'abord que K étant un continu quelconque qui ne contient pas a et qui coupe le plan entre deux points de L , le produit $K \times L$ est de puissance c . Soit, en effet, G le constituant du complémentaire de K , qui admet le point a comme élément, et H le constituant de ce complémentaire, qui contient un point h de L , les points a et h étant séparés par K . Il existe donc un cercle de centre h qui ne contient dans son intérieur que des points de H . Ce cercle contient évidemment des points de c différents $L(c)$. Chacun de ces $L(c)$ contient par conséquent un point de la frontière de H , parce qu'il contient à la fois un point de H et le point a situé à l'extérieur de H . Or, la frontière de H étant contenue dans K , c points de L appartiennent à K .

Soient maintenant

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_c)$$

la suite transfinie des ensembles parfaits et

$$K_1, K_2, \dots, K_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_c)$$

la suite transfinie des continus qui, sans contenir le point a , coupent le plan entre deux points quelconques du continu L .

Nous venons de prouver que pour tout $\alpha < \Omega_c$ le produit $L \times K_\alpha$ a la puissance du continu. Désignons par s_1 un point arbitraire de $L \times K_1$ et par t_1 un point de P_1 distinct de a et de s_1 . Désignons en général par s_α un point de $L \times K_\alpha$ distinct de tous les points t_ξ pour $\xi < \alpha$ et par t_α un point de P_α distinct de a et de tous les s_ξ pour $\xi \leq \alpha$.

L'ensemble composé du point a et de tous les points s_α pour $\alpha < \Omega_c$ est biconnexe et ne contient aucun sous-ensemble parfait.

En terminant cette Note il importe de faire observer la différence essentielle qui surgit entre le problème de l'exemple (β) d'une part et celui des exemples (γ) et (δ) de l'autre.

On dit que l'existence des objets pourvus d'une propriété donnée est établie d'une façon *effective*¹⁾, lorsqu'on connaît une définition d'un objet individuel pourvu de cette propriété. Par contre, leur existence n'est pas établie d'une façon effective, lorsqu'on se borne uniquement à démontrer que leur ensemble n'est pas vide, sans en définir un élément particulier. Il semble bien naturel d'exiger que toute démonstration de l'existence soit donnée d'une façon effective, à moins qu'une pareille démonstration soit impossible. Or, la question s'impose: peut-on démontrer qu'il n'existe aucune solution effective d'un problème donné?

On ne connaît jusqu'à présent aucune méthode qui puisse résoudre complètement la question ainsi posée. Toutefois il existe un procédé signalé par M. Sierpiński, qui permet souvent de se rendre compte, combien la non-effectivité d'une solution est essentielle pour un problème donné. Ce procédé est le suivant.

Il existe plusieurs classes qui — on le prouve — ne sont pas vides, mais dont on ne sait définir directement aucun élément à part. et, de plus, il paraît invraisemblable d'en pouvoir jamais définir un. Telle est, par exemple, la classe des fonctions non-mesurables au sens de Lebesgue. Or, si l'on démontre que la solution effective d'un problème donné implique la solution effective de celui d'existence d'une fonction non-mesurable L , on doit à plus forte raison considérer la première comme invraisemblable. Nous pouvons l'exprimer en disant que la solution d'un tel problème est essentiellement non-effective, tout au moins dans le sens relatif de ces mots.

Cette assertion est également justifiée, lorsqu'on remplace dans le raisonnement qui précède, la classe des fonctions non-mesurables L par une classe quelconque qui se comporte à cet égard d'une façon analogue, par exemple, par celle des ensembles non-dénombrables n'admettant aucun sous-ensemble parfait. Les en-

¹⁾ Les considérations sur l'effectivité qui sont exposées ici viennent se lier intimement aux recherches de M. Sierpiński publiées dans ses articles: *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des Ensembles et l'Analyse* (Bull. Acad. Sc. Cracovie 1918) et *Les exemples effectifs et l'axiome du choix* (Fund. Math., ce volume).

sembles (γ) et (δ) étant de leur nombre, il paraît donc peu probable que nos démonstrations non-effectives de leur existence puissent être jamais remplacées par les effectives.

Le cas est tout à fait différent si l'on passe à l'exemple (β). On peut en effet compléter la solution du problème (β) de façon à la rendre effective. Il suffit pour cela de spécifier:

1° la définition d'une décomposition du segment $[0, 1]$ en \mathfrak{C} ensembles denses dans lui et n'ayant deux à deux aucun point commun,

2° la correspondance biunivoque entre ces ensembles et tous les nombres réels d'intervalle $0, 1$,

3° la correspondance biunivoque entre tous les nombres réels d'intervalle $0, 1$ et les continus situés dans le carré C qui ont des points communs avec les cotés latéraux de ce carré.

Ad 1° et 2°. Désignons par E l'ensemble de tous les nombres réels x de l'intervalle $0, 1$ et par $f(x)$ la fonction de x définie de la façon suivante:

Lorsque $x=0$ ou admet dans le système ternaire un développement qui contient le chiffre 2 une infinité de fois, posons $f(x) = 0$.

Lorsque x n'admet pas un pareil développement ternaire et

$$x = (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_3,$$

posons dans le système binaire:

$$f(x) = (0, a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots)_2$$

n désignant le plus petit nombre naturel tel que l'on ait pour tout $i \geq n$

$$a_i = 0 \quad \text{ou bien} \quad a_i = 1.$$

Envisageons pour tout $0 \leq t \leq 1$ l'ensemble E_t de tous les x qui satisfont à l'équation:

$$f(x) = t.$$

Or, tous deux E_t différents n'ont par définition aucun élément commun et pour chaque t l'ensemble E_t est dense dans le segment $[0, 1]$. Nous avons ainsi donné une définition de la décomposition ¹⁾ du segment en \mathfrak{C} ensembles satisfaisant aux

¹⁾ Cette décomposition nous a été suggérée par M. Sierpiński qui a bien voulu nous faire quelques remarques à ce sujet.

Le problème de la décomposition de l'intervalle $0, 1$ en une infinité d'ensembles denses dans lui et n'ayant deux à deux aucun point commun a été traité dans la littérature à plusieurs reprises. Telle est par exemple la décomposition bien connue où les éléments d'un même ensemble diffèrent entre eux d'un nombre rationnel. Or, la correspondance biunivoque entre les ensembles qui entrent dans cette décomposition et les nombres réels est essentiellement non-effective, puisque si l'on savait la définir, on pourrait en déduire d'une façon effective — comme l'a démontré M. Sierpiński (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 164, p. 882) — une définition d'une fonction non-mesurable L . Il en est de même de la décom-

conditions du problème et, en même temps, nous avons fait correspondre à chacun d'eux un nombre t d'une façon biunivoque.

Ad 3°. Soit F la classe de tous les ensembles plans fermés. On connaît une règle (ϱ_1) qui permet d'établir d'une façon effective la correspondance biunivoque entre les éléments de F et ceux de E . K étant la classe de tous les continus situés dans le carré C et ayant des points communs avec les cotés verticaux de ce carré, désignons par U l'ensemble des éléments de E qui viennent correspondre suivant la règle ϱ_1 à ceux de la classe K .

Soit maintenant H la sous-classe de K composée uniquement des segments horizontaux tendus entre les cotés verticaux du carré C et faisons correspondre à chacun de ces segments son ordonnée (règle ϱ_2). Nous sommes ainsi en présence de deux règles ϱ_1 et ϱ_2 qui établissent les équivalences:

$$U \sim K \text{ et } H \sim E$$

où

$$U \subset E \text{ et } H \subset K.$$

Or, comme l'avaient signalés MM. F. Bernstein¹⁾ et Sierpiński²⁾, deux règles pareilles permettent toujours d'en déduire d'une façon effective la troisième qui établit une correspondance biunivoque entre K et E .

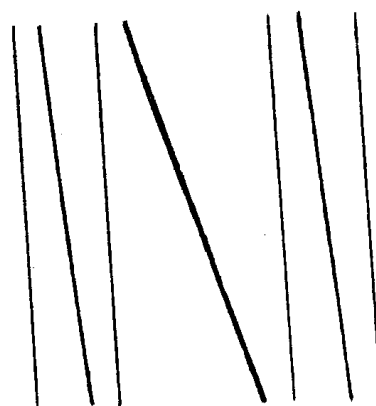
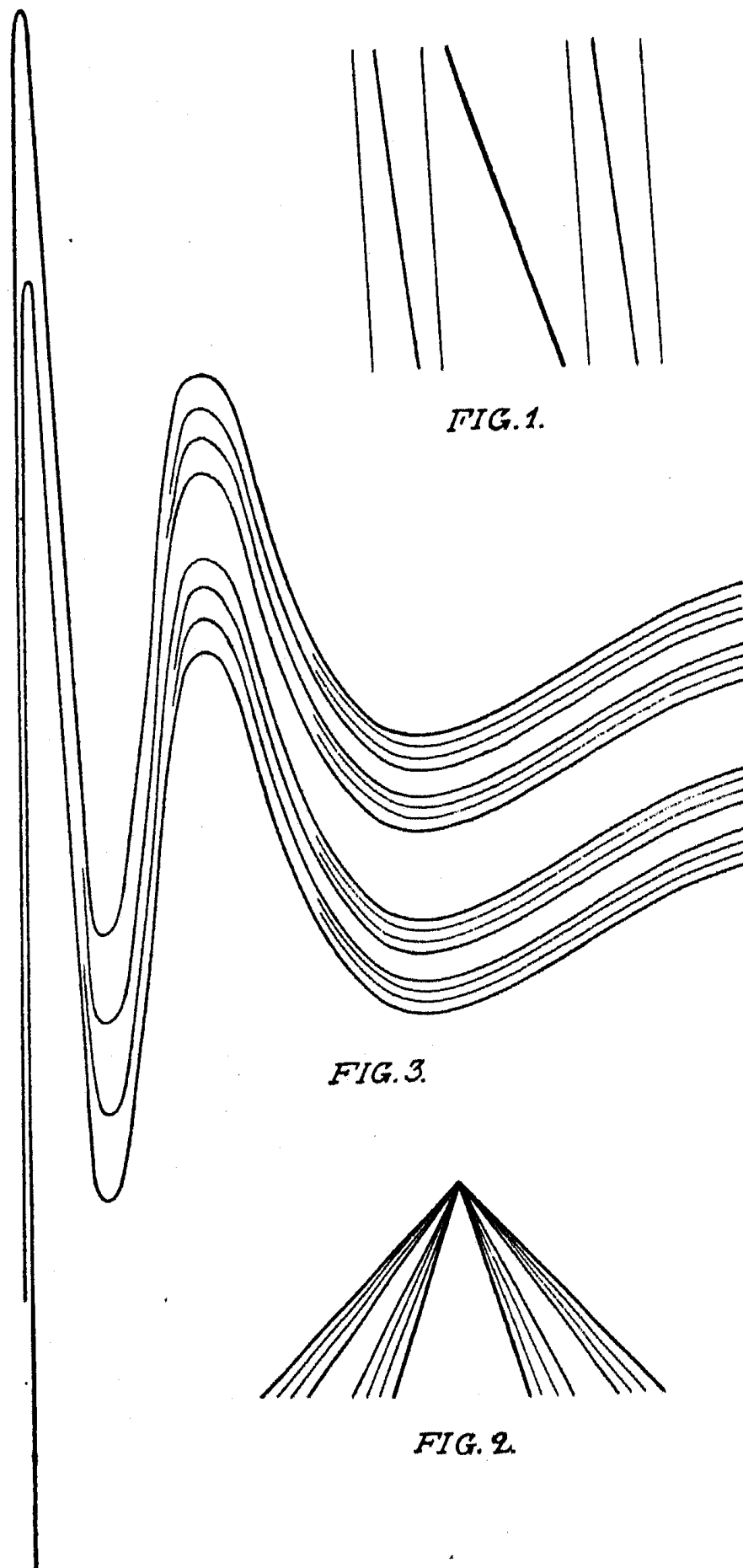
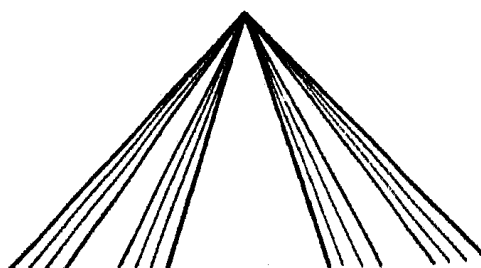
position due à M. Mahlo et publiée par M. Schoenflies dans son livre *Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen I* (p. 343, Leipzig 1913).

Il importe de remarquer que dans l'exemple de M. Mahlo il s'agissait de décomposer le segment en \mathfrak{C} ensembles dont chacun ait la puissance \mathfrak{C} dans tout intervalle (contenu dans ce segment). Or, une telle décomposition peut être également réalisée d'une façon effective en modifiant légèrement la définition de la nôtre. Il y suffit en effet de remplacer la formule du texte qui sert à définir $f(x)$ par la suivante:

$$f(x) = (0, a_n a_{n+2} a_{n+4} a_{n+6} \dots)_2.$$

¹⁾ *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, Math. Ann. t. 61, 1905, p. 121.

²⁾ *Les exemples effectifs etc*, ce volume, p. 113.

*FIG. 1.**FIG. 3.**FIG. 2.*

Bibliographie ¹⁾.

- Brouwer L. E. J. *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68, 1910.
 Cantor G. Math. Ann. 21, 1883.
 Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.
 Janiszewski S. *Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points*. Bull. Acad. Sc., Cracovie 1912.
 — *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Thèse, Paris 1911 (Publié aussi dans le Journ. de l'Ecole Polyt. II, 16, 1912).
 — *Sur les coupures du plan faites par les continus*, Prace Mat.-Fiz. Varsovie 1913.
 Janiszewski S. et Kuratowski C. *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math. I, 1920.
 Kuratowski C. *Une définition topologique de la ligne de Jordan*, Fund. Math. I, 1920.
 Lennes N. J. *Curves in Non-Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations*, Amer. Journ. Math 33, 1911.
 Mazurkiewicz S. *Contribution à la théorie des ensembles*. Bull. Acad. Sc. Cracovie 1913.
 — *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. I, 1920.
 — *Sur l'existence d'un ensemble plan connexe ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné*, Fund. Math. II, 1921.
 — *Sur un ensemble G_δ , punctiforme, qui n'est pas homéomorphe avec aucun ensemble linéaire*, Fund. Math. I, 1920.
 Sierpiński W. *Sur la décomposition du plan en deux ensembles punctiformes*, Bull. Acad. Sc. Cracovie 1913.
 — *Sur les ensembles connexes et non-connexes*, Fund. Math. II, 1921.
 — *Sur un ensemble punctiforme connexe*, Fund. Math. I, 1920.
 Young W. H. *The theory of sets of points*, Cambridge 1906.
 Zoratti. *La notion de ligne*, Ann. de l'Ecole Norm. XXVI, 1909.

¹⁾ Nous n'indiquons que les ouvrages qui contiennent soit des théorèmes sur les ensembles connexes, soit les théorèmes sur les continus, dont le rapport étroit à la théorie des ensembles connexes nous a contraint à les envisager dans cette Note.