STUDIA MATHEMATICA, T. XXX. (1968)

Bemerkungen zur „algebraischen" Exponentialfunktion im Mikusiński'schen Operatorenkörper

von

GÜNTER SCHAAR (Freiberg)

In [1] ist die „algebraische" Exponentialfunktion ε^u als nichttriviale Lösung der s-Differentialgleichung

$$Dv = vDu \tag{1}$$

bei gegebenem Operator $u \in M$ (M = Mikusiński'scher Operatorenkörper) eingeführt worden, falls eine solche Lösung in M existiert. (Natürlich ist v nur bis auf multiplikative Zahlenoperatoren bestimmt.) Definiert man die Exponentialfunktion $e^{\lambda u}$ nach [2] als stetig differenzierbare Operatorfunktion $v(\lambda)$, die der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\lambda} v(\lambda) = v(\lambda) u \tag{2}$$

und der Anfangsbedingung $v(0) = 1$ genügt, so folgt [3], daß für alle reellen λ die s-Differentialgleichung

$$Dv(\lambda) = \lambda v(\lambda) Du \tag{3}$$

erfüllt ist, vorausgesetzt, $v(\lambda) = e^{\lambda u}$ existiert. Mit $e^{\lambda u}$ existiert also auch für jedes reelle λ eine (als Operatorfunktion von λ sogar stetig differenzierbare) algebraische Exponentialfunktion $\varepsilon^{\lambda u}$, nämlich $e^{\lambda u}$ selbst. Im folgenden (Abschnitt 1) soll nun umgekehrt gezeigt werden, daß die Existenz einer stetig differenzierbaren Lösung $v(\lambda)$ von (3) mit $v(\lambda) \neq 0$ für alle λ das Vorhandensein einer Exponentialfunktion $e^{\lambda u}$ garantiert. Ferner (Abschnitt 2) werden einige Ergebnisse mitgeteilt, die dazu dienen, die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von $v(\lambda)$ durch geeignete andere Annahmen zu ersetzen. Die Frage, ob die Existenz von $e^{\lambda u}$ bereits allein aus der nichttrivialen Lösbarkeit von (1) folgt (vgl. [4]), bleibt aber im allgemeinen ungeklärt. Wir schicken zwei einfache Hilfssätze voraus.

1. HILFSSATZ 1. *Ist $v = v(\lambda)$ eine für gewisse $\lambda \in R^1$ differenzierbare Operatorfunktion, so gilt für diese λ*

$$D\frac{dv}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}Dv.$$

Der in [3] für stetig differenzierbare Operatorfunktionen gegebene Beweis läßt sich mit evidenten Änderungen sofort übertragen.

HILFSSATZ 2. *Sind $x(\lambda)$ und $y(\lambda)$ stetige Operatorfunktionen für $\lambda \in I$ (I = offenes Intervall des R^1) und ist $y(\lambda) \neq 0$ für jedes $\lambda \in I$ und*

$$\frac{x(\lambda)}{y(\lambda)} = \gamma(\lambda)$$

ein (von λ abhängiger) Zahlenoperator, so ist $\gamma(\lambda)$ eine in I stetige Funktion von λ.

Beweis. In jedem endlichen Intervall $I' \subset I$ hat man

$$x(\lambda) = \frac{\{x(\lambda, t)\}}{\{f(t)\}}, \quad y(\lambda) = \frac{\{y(\lambda, t)\}}{\{g(t)\}},$$

wo $x(\lambda, t), y(\lambda, t), f(t), g(t)$ geeignete stetige Funktionen in $I' \times [0, \infty)$ bzw. $[0, \infty)$ sind und $\{f(t)\} \neq 0$, $\{g(t)\} \neq 0$ sowie $\{y(\lambda, t)\} \neq 0$ für jedes $\lambda \in I'$ gilt. Aus $x(\lambda) = y(\lambda)\gamma(\lambda)$ folgt

$$\{g(t)\}\{x(\lambda, t)\} = \{f(t)\}\{y(\lambda, t)\}\gamma(\lambda),$$

d.h.

$$\{g(t) * x(\lambda, t)\} = \{f(t) * y(\lambda, t)\gamma(\lambda)\},$$

also, wegen der Stetigkeit bezüglich t,

$$g(t) * x(\lambda, t) = f(t) * y(\lambda, t)\gamma(\lambda)$$

für alle $\lambda \in I'$, $t \geqslant 0$. Zu jedem $\lambda_0 \in I'$ muß es wegen $\{f(t)\} \neq 0$, $\{y(\lambda_0, t)\} \neq 0$ ein t_0 mit $f(t) * y(\lambda_0, t)|_{t=t_0} \neq 0$ geben. Da $f(t) * y(\lambda, t)$ stetig auf $I' \times [0, \infty)$ ist, gilt $f(t) * y(\lambda, t)|_{t=t_0} \neq 0$ für alle λ aus einer geeigenten Umgebung $U(\lambda_0) \cap I'$. Dann ist aber

$$\gamma(\lambda) = \frac{g(t) * x(\lambda, t)}{f(t) * y(\lambda, t)}\bigg|_{t=t_0}$$

sicher stetig im Punkte λ_0, und damit ist $\gamma(\lambda)$ stetig für alle $\lambda \in I$.

Bemerkung. Die Verallgemeinerung von Hilfssatz 2 auf Operatorfunktionen von mehreren Parametern läßt sich genauso beweisen.

SATZ 1. *Falls zu einem Operator $u \in M$ eine stetig differenzierbare Operatorfunktion $v(\lambda)$ existiert derart, daß für jedes $\lambda \in R^1$ $v(\lambda) \neq 0$ und*

$Dv(\lambda) = \lambda v(\lambda)Du$ gilt, so gibt es auch eine stetig differenzierbare Operatorfunktion $w(\lambda)$ mit $w(0) = 1$ und

$$\frac{d}{d\lambda}w(\lambda) = uw(\lambda),$$

d.h. es existiert die Exponentialfunktion $w = e^{\lambda u}$. (Für $w(\lambda)$ ist dann natürlich ebenfalls $Dw(\lambda) = \lambda w(\lambda)Du$ erfüllt.)

Beweis. Zunächst folgt aus $Dv(0) = 0$, daß $v(0)$ ein Zahlenoperator ist, der nach Voraussetzung $\neq 0$ sein muß. Wir betrachten nun die wegen der Voraussetzungen über $v(\lambda)$ stetige Operatorfunktion

$$x(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}v(\lambda) - uv(\lambda).$$

Mit Hilfssatz 1 folgt für jedes λ

$$\begin{aligned} Dx(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda}Dv(\lambda) - uDv(\lambda) - v(\lambda)Du \\ &= \frac{d}{d\lambda}(\lambda v(\lambda)Du) - u\lambda v(\lambda)Du - v(\lambda)Du \\ &= v(\lambda)Du + \lambda\frac{d}{d\lambda}v(\lambda)Du - \lambda uv(\lambda)Du - v(\lambda)Du \\ &= \lambda x(\lambda)Du; \end{aligned}$$

das liefert

$$\frac{Dx(\lambda)}{Dv(\lambda)} = \frac{x(\lambda)}{v(\lambda)} \quad \text{oder} \quad \frac{v(\lambda)Dx(\lambda) - x(\lambda)Dv(\lambda)}{v(\lambda)^2} = D\frac{x(\lambda)}{v(\lambda)} = 0,$$

d. h. $x(\lambda)/v(\lambda) = \gamma(\lambda)$ ist ein (von λ abhängiger) Zahlenoperator. Nach Hilfssatz 2 ist $\gamma(\lambda)$ stetig, und daher ist

$$a(\lambda) = e^{-\int_0^\lambda \gamma(\tau)d\tau}$$

eine stetig differenzierbare Zahlenfunktion:

$$\frac{d}{d\lambda}a(\lambda) = -a(\lambda)\gamma(\lambda).$$

Wir setzen jetzt

$$w(\lambda) = \frac{1}{v(0)}a(\lambda)v(\lambda);$$

offenbar ist $w(\lambda)$ eine stetig differenzierbare Operatorfunktion. Wegen $\alpha(0)=1$ ist $w(0)=1$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}w(\lambda) &= \frac{1}{v(0)}\left(\alpha(\lambda)\frac{d}{d\lambda}v(\lambda)+v(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\alpha(\lambda)\right)\\ &= \frac{1}{v(0)}\big(\alpha(\lambda)x(\lambda)+\alpha(\lambda)uv(\lambda)-v(\lambda)\alpha(\lambda)\gamma(\lambda)\big)\\ &= \frac{1}{v(0)}\big(\alpha(\lambda)x(\lambda)+uv(0)w(\lambda)-\alpha(\lambda)x(\lambda)\big)\\ &= uw(\lambda),\end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist.

2. Ob die nichttriviale Lösbarkeit von (1) stets die Existenz einer nichttrivialen Lösung von (3) für jedes $\lambda\in R^1$ sichert, ist ungewiß; wir können hier nur folgendes zeigen:

Satz 2. *Ist der Operator $v\neq 0$ eine Lösung der Gleichung $Dv=vDu$ und existiert eine stetige Operatorfunktion $v(\lambda)$ mit $v(1)=v$ und*

(4) $$v(\lambda+\mu)=c(\lambda,\mu)v(\lambda)v(\mu)$$

für beliebige $\lambda,\mu\in R^1$, wobei $c(\lambda,\mu)$ einen von λ und μ abhängigen Zahlenoperator bezeichnet, so gilt für alle $\lambda\in R^1$:

$$Dv(\lambda)=\lambda v(\lambda)Du.$$

Beweis. Mit $v(1)\neq 0$ ist stets $v(\lambda)\neq 0$ und daher auch $c(\lambda,\mu)\neq 0$. Ferner ist $v(0)=1/c(0,0)$ ein Zahlenoperator und deshalb die Behauptung für $\lambda=0$ klar. Für beliebige positive ganze m,n gilt nun

$$v\left(\frac{m}{n}\right)=Av\left(\frac{1}{n}\right)^m,\qquad v(1)=Bv\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

wo A und B gewisse Produkte von Zahlenoperatoren der Form $c(k/n,1/n)$ sind. Also ist

$$Dv\left(\frac{m}{n}\right)=Amv\left(\frac{1}{n}\right)^{m-1}Dv\left(\frac{1}{n}\right)=mv\left(\frac{m}{n}\right)v\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}Dv\left(\frac{1}{n}\right)$$

und

$$Dv(1)=Bnv\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}Dv\left(\frac{1}{n}\right)=nv(1)v\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}Dv\left(\frac{1}{n}\right).$$

Beides zusammen liefert mit $Dv(1)=v(1)Du$:

$$Dv\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}v\left(\frac{m}{n}\right)Du,$$

d. h. die Behauptung für positive rationale λ. Für negative rationale Werte folgt sie mittels der Relation

$$v(-\lambda)=\frac{1}{c(0,0)c(-\lambda,\lambda)}v(\lambda)^{-1}$$

und für beliebige reelle λ durch Grenzübergang, da $v(\lambda)$ stetig und D nach [1] eine in M stetige Operation ist.

Existiert umgekehrt für jedes $\lambda\in R^1$ eine nichttriviale Lösung $v(\lambda)$ von (3), so genügt sie wegen

$$D\frac{v(\lambda+\mu)}{v(\lambda)v(\mu)}=0$$

der Bedingung (4). Die Zahlenfunktion $c(\lambda,\mu)$ ist natürlich symmetrisch und, falls $v(\lambda)$ stetig ist, nach Hilfssatz 2 (Bemerkung) ebenfalls stetig. Eine hinreichende Bedingung für die stetige Differenzierbarkeit einer derartigen Operatorfunktion $v(\lambda)$ gibt der folgende Satz:

Satz 3. *Erfüllt eine stetige, nicht überall verschwindende Operatorfunktion $v(\lambda)$ für beliebige $\lambda,\mu\in R^1$ die Bedingung (4), ist ferner $v(\lambda)$ differenzierbar im Punkte $\lambda=0$ und besitzt die in (4) auftretende Zahlenfunktion $c(\lambda,\mu)$ in allen Punkten $(\lambda,0)$ eine in λ stetige partielle Ableitung $\partial c(\lambda,\mu)/\partial\mu$, so ist $v(\lambda)$ sogar eine stetig differenzierbare Operatorfunktion.*

Beweis. Zunächst folgt wieder $v(\lambda)\neq 0$ sowie $c(\lambda,\mu)\neq 0$ für alle $\lambda,\mu\in R^1$, und Hilfssatz 2 sichert die Stetigkeit der Zahlenfunktion $c(\lambda,\mu)$. Außerdem ist

$$c(\lambda,0)=c(0,0)=\frac{1}{v(0)}.$$

Die vorausgesetzte Differenzierbarkeit von $v(\lambda)$ im Punkte $\lambda=0$ bedeutet nach [2]: Es gibt eine nichttriviale in $[0,\infty)$ stetige Funktion $b(t)$, eine Umgebung $U(0)$ von $\mu=0$ und eine in $U(0)\times[0,\infty)$ stetige Funktion $g(\mu,t)$, so daß für alle $\mu\in U(0)$, $\mu\neq 0$ gilt:

$$\frac{v(\mu)-v(0)}{\mu}=\frac{1}{b}\{g(\mu,t)\}.$$

Sei nun I ein beliebiges endliches Intervall des R^1; dann bildet die Punktmenge $\lambda+\mu$ mit $\lambda\in I$, $\mu\in U(0)$ ebenfalls ein endliches Intervall

$I' \supset I$. Wegen der Stetigkeit ist $v(\lambda)$ für $\lambda \in I'$ darstellbar in der Form

$$v(\lambda) = \frac{1}{a}\{f(\lambda, t)\}$$

mit geeignetem in $[0, \infty)$ stetigem $a(t)$ und einer in $I' \times [0, \infty)$ stetigen Funktion $f(\lambda, t)$. Dann folgt für $\mu \in U(0), \mu \neq 0$ und $\lambda \in I$

$$\begin{aligned}\frac{v(\lambda+\mu)-v(\lambda)}{\mu} &= \frac{c(\lambda, \mu)v(\lambda)v(\mu)-v(\lambda)}{\mu} \\ &= \frac{1}{a}\{f(\lambda, t)\}\left(\frac{c(\lambda, \mu)-c(\lambda, 0)}{\mu}v(0)+c(\lambda, \mu)\frac{1}{b}\{g(\mu, t)\}\right) \\ &= \frac{1}{ab}\left\{\frac{c(\lambda, \mu)-c(\lambda, 0)}{\mu}v(0)k(\lambda, t)+c(\lambda, \mu)\int_0^t f(\lambda, \tau)g(\mu, t-\tau)\,d\tau\right\},\end{aligned}$$

wenn wir $b(t)*f(\lambda, t) = k(\lambda, t)$ setzen. (Dabei ist $k(\lambda, t)$ stetig in $I' \times [0, \infty)$.) Andererseits ist

$$\frac{v(\lambda+\mu)-v(\lambda)}{\mu} = \frac{1}{a}\left\{\frac{f(\lambda+\mu, t)-f(\lambda, t)}{\mu}\right\} = \frac{1}{ab}\left\{\frac{k(\lambda+\mu, t)-k(\lambda, t)}{\mu}\right\}.$$

Das liefert für $\lambda \in I$, $\mu \in U(0)$ und $\mu \neq 0$ sowie $t \in [0, \infty)$ die Beziehung

$$\frac{k(\lambda+\mu, t)-k(\lambda, t)}{\mu} = c(\lambda, \mu)\int_0 f(\lambda, \tau)g(\mu, t-\tau)\,d\tau + \frac{c(\lambda, \mu)-c(\lambda, 0)}{\mu}v(0)k(\lambda, t);$$

wegen der Voraussetzungen über $\partial c(\lambda, \mu)/\partial\mu$ und der Stetigkeit des ersten Terms der rechten Seite für $\lambda \in I, \mu \in U(0), t \in [0, \infty)$ existiert daher $\partial k(\lambda, t)/\partial\lambda$ und ist stetig für alle $\lambda \in I, t \in [0, \infty)$. Da für diese λ stets

$$v(\lambda) = \frac{1}{ab}\{k(\lambda, t)\}$$

gilt, folgt die Existenz der stetigen Ableitung $dv(\lambda)/d\lambda$ für $\lambda \in I$ und damit wegen der beliebigen Wahl von I im ganzen R^1.

Aus den Sätzen 1, 2 und 3 ergibt sich als Folgerung:

Hat die Gleichung $Dv = vDu$ eine Lösung $v \neq 0$ und existiert eine den Voraussetzungen des Satzes 3 genügende Operatorfunktion $v(\lambda)$ mit $v(1) = v$, so existiert die Exponentialfunktion $e^{\lambda u}$.

Literaturnachweis

[1] E. Gesztelyi, *Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten*, Publ. Math. Debrecen 10 (1963), S. 215-243.

[2] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, Berlin 1957.

[3] — *Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus*, Studia Math. 19 (1960), S. 187-192.

[4] J. Wloka, *Besprechung einer Arbeit von Matusu*, Zentralblatt 128, Heft 2, (1967), S. 308.

Reçu par la Rédaction le 2. 11. 1967