STUDIA MATHEMATICA, T. XXIII. (1963)

Spektraltheorie separierbarer Operatoren

von

LIDIA MAURIN und KRZYSZTOF MAURIN (Warszawa)

Einführung und Inhaltsangabe

Viele Probleme der Spektraltheorie der Partiellen Differentialoperatoren und der Quantenmechanik führen zur Untersuchung der Spektrums und der Eigenfunktionen der symmetrischen Operatoren in Tensorprodukten der Hilbertschen Räumen $H = H_1 \otimes H_2$.

Der Operator A in H heißt *separierbar* falls er folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$A = A_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes A_2,$$

wobei A_i Operatoren in H_i, $i = 1, 2$, sind. Im Falle der Differentialoperatoren ist $H_i = L^2(\Omega_i)$, $H = L^2(\Omega_1 \otimes \Omega_2)$.

Diese Probleme hat — auf Anregung von Fr. Rellich — H. O. Cordes in Jahren 1953-55 in Angriff genommen (vgl. [3]). Aus den späteren Arbeiten muß man die wichtige Abhandlung von Berezanskij [1] anführen. Inzwischen gelang es einem der Verfasser (vgl. [5]) auf einfache Weise die Existenz vollständiger Systeme der verallgemeinerten Eigenelemente für jeden selbstadjungierten Operator zu zeigen und eine Zerlegung Abstrakter Kerne nach Eigenkerne nachzuweisen.

Es sei H ein separabler Hilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot\,|\,\cdot)$; A sei ein selbstadjungierter (s. a.) Operator mit dem (in H dichten) Definitionsgebiet $D(A)$. Wie von einem der Verfasser in [4] gezeigt wurde, kann man einen solchen in $D(A)$ dichten nuklearen Raum Φ konstruieren, daß

1° A stetig Φ in sich abbildet;

2° die Einbettung $\Phi \to H$ nuklear ist;

3° $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ die von A induzierte Zerlegung des Raumes H in ein direktes Integral (der Hilbertschen Räume $\hat{H}(\lambda)$) ist;

dann gilt die verallgemeinerte Parsevalsche Formel

$$(\varphi|\varphi) = \int \sum_{k=1}^{\dim \hat{H}(\lambda)} \langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle < \overline{\langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle} > d\mu(\lambda),$$

wobei $e_k(\lambda) \in \Phi'$ — d. h. lineare stetige Funktionale auf dem nuklearen Raume Φ — verallgemeinerte Eigenelemente des Operatos A sind, d. h. es gilt die Identität $\langle A\varphi, e_k(\lambda)\rangle = \lambda\langle\varphi, e_k(\lambda)\rangle$ oder kürzer $A'e_k(\lambda) = \lambda e_k(\lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, \dim\hat{H}(\lambda)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bedeutet die Dualität der Räume Φ und Φ'.

Berezanskij hat in [1] eine wichtige selbstadjungierte Fortsetzung B des Operators $A_1\otimes 1_2 + 1_1\otimes A_2$ folgendermaßen konstruiert: falls $A_i = \int\lambda dE_i(\lambda)$ die kanonische Spektralzerlegung von A_i ist, dann hat die von $B = \int\lambda dE(\lambda)$ induzierte Zerlegung der Einheit die folgende Gestalt:

$$E(\lambda)f^1\otimes f^2 | g^1\otimes g^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(E_1(\lambda-\mu)f^1|g^1\big)_1 d\mu\big(E_2(\mu)f^2|g^2\big)_2,$$

$$f^i, g^i \in H_i, \quad i = 1, 2.$$

Im folgenden werden wir B als die *Berezanskij-Fortsetzung* von $A = A_1\otimes 1_2 + 1_1\otimes A_2$ bezeichnen.

Der symmetrische Operator C ist *wesentlich* selbstadjungiert (w. s. a.) falls seine Abschließung $\bar{C}$ s. a. ist: $(\bar{C})^* = \bar{C}$.

Zwei s. a. Operatoren heißen *stark vertauschbar* falls die ihnen zugeordneten Zerlegungen der Einheit kommutieren. Es gilt der folgende

Satz 1. *Es sei $A_i = \int\lambda dE_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Dann sind die Operatoren $A_1\otimes 1_2$, $1_1\otimes A_2$ w. s. a. Die Operatoren $\overline{A_1\otimes 1_2}$, $\overline{1_1\otimes A_2}$ sind stark vertauschbar und es gelten die folgenden Spektralzerlegungen*:

$$\overline{A_1\otimes 1_2} = \int\lambda d\big(\overline{E(\lambda)\otimes 1_2}\big), \quad \overline{1_1\otimes A_2} = \int\lambda d\big(1\otimes E_2(\lambda)\big). \tag{1}$$

Korollar. *Die Operatoren* (1) *sind Funktionen eines Hermiteschen Operators $S = \int\lambda d\mathscr{E}(\lambda)$ in H, d. h.*

$$\overline{A_1\otimes 1_2} = \int f_1(\lambda)d\mathscr{E}(\lambda) = f_1(S), \quad \overline{1_1\otimes A_2} = \int f_2(\lambda)d\mathscr{E}(\lambda) = f_2(S).$$

Der folgende Satz zeigt, daß die Berezanskij-Fortsetzung die beste, d. h. die natürliche Fortsetzung A ist:

Satz 2. $B = (f_1+f_2)(S) \overset{\mathrm{df}}{=} \int\big(f_1(\lambda)+f_2(\lambda)\big)dE(\lambda)$.

Die vorstehenden Sätze erlauben das Spektrum der Berezanskij-Fortsetzung zu bestimmen:

Satz 3. *Das Spektrum von B ist die algebraische Summe der Spektren von A_1 und A_2*:

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}(B) &= \mathrm{sp}(A_1) + \mathrm{sp}(A_2)\\ &= \{\lambda\in R^1:\ \lambda = \lambda_1+\lambda_2,\ \text{wo}\ \lambda_i\in\mathrm{sp}(A_i),\ i = 1, 2\}.\end{aligned}$$

Wir benutzen die folgende allgemeine Definition der Kerne:

Definition. Die bilineare separatstetige Form θ auf dem Produkt $\Phi_1\times\Phi_2$ nuklearer Räume wird (*abstrakter*) *Kern* genannt:

$$\Phi_1\times\Phi_2 \ni (\varphi_1, \varphi_2) \to \theta(\varphi_1, \varphi_2) \in C^1.$$

Falls man $\Phi_i = D(\Omega_i)$ nimmt, bekommt man bekanntlich Kerne im Sinne von L. Schwartz, d. h. Distributionen auf der Menge $\Omega_1\hat{\otimes}\Omega_2$: $\theta \in D'(\Omega_1\otimes\Omega_2) = \big(D'(\Omega_1)\hat{\otimes} D'(\Omega_2)\big)$.

Falls der Operator A die Darstellung $H = \int\hat{H}(\lambda)d\mu(\lambda)$ induziert, dann heißt das (endliche) positive Maß μ das *Spektralmaß von A*. Bekanntlich ist das Spektralmaß eindeutig — bis auf Äquivalenz — bestimmt. Es besteht der folgende merkwürdige Zusammenhang zwischen dem Spektralmaße μ der Berezanskij-Fortsetzung von $A_1\otimes 1_2 + 1_1\otimes A_2$ und den Spektralmaßen von A_i, $i = 1, 2$:

Lemma. *Die Faltung $\mu_1 * \mu_2$ ist absolutstetig in Bezug auf μ.*

Aus diesem Lemma und einem Satze von Bourbaki (vgl. [2]) über Desintegration des Maßes folgt der

Satz 4. *Es seien θ, bzw. θ_i, die differenzierten Spektralkerne von B, bzw. A_i, $i = 1, 2$, d. h.*

$$\big(E(\lambda)\varphi \mid \psi\big) = \int_{-\infty}^{\lambda} \theta(\lambda; \varphi, \psi)d\mu(\lambda),$$

$$(E_i(s)\varphi_i|\psi_i)_i = \int_{-\infty}^{s} \theta_i(\lambda; \varphi_i, \psi_i)d\mu_i(s), \quad i = 1, 2.$$

Dann gibt es eine Familie $R^1\ni\lambda\to\sigma_\lambda$ der endlichen (Radonschen) Maßen auf der Ebene R^2 und eine integrierbare Funktion $\delta(\cdot)$ auf dem Spektrum von B, daß

$$\theta(\lambda) = \delta(\lambda)\int_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda} \theta_1(\lambda_1)\otimes\theta_2(\lambda_2)d\sigma_\lambda(\lambda_1, \lambda_2),$$

wobei der Träger des Maßes σ_λ auf der Geraden $\lambda_1+\lambda_2 = \lambda$ liegt; genauer: σ_λ ist konzentriert auf der Menge $\lambda_1 \in \{\lambda_1+\lambda_2 = \lambda$, wobei $\lambda_i\in\mathrm{sp}(A_i)$, $i = 1, 2\}$.

Die Funktion $\delta(\cdot)$ ist die Radon-Nikodym-Ableitung $d(\mu_1 * \mu_2)/d\mu$.

Im Falle der reinen Punktspektren der Operatoren A_1, A_2, kann man bekanntlich Eigenvektoren von $A_1\otimes 1_2 + 1_1\otimes A_2$ als Linearkombinationen der Tensorprodukte der Eigenvektoren von A_1 und A_2 darstellen. Der folgende Satz besagt, daß auch im allgemeinen Falle eine ähnliche Darstellung gelingt:

Hauptsatz. *Es sei B die Berezanskij-Fortsetzung von $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$ und es sei $e_k(\lambda)$, $k=1,2,\dots,\dim\hat{H}(\lambda)$, $\lambda\in\mathrm{sp}(B)$, das vollständige System der verallgemeinerten Eigenelemente von B. Dann gibt es eine Familie $\lambda\to\sigma_\lambda$, $\lambda\in\mathrm{sp}(B)$, der positiven Maßen auf R^2* (vgl. Satz 4) *und Funktionen $C_{ijk}(\cdot,\cdot,\lambda)$ auf $\mathrm{sp}(A_1)\times\mathrm{sp}(A_2)$, daß jedes*

$$e_k(\lambda)=\int\sum_{i=1}^{\dim\hat{H}_1(\lambda_1)}\sum_{j=1}^{\dim\hat{H}_2(\lambda_2)}C_{ijk}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda)e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)d\sigma_\lambda(\lambda_1;\lambda_2).$$

Der Träger des Maßes ist in der Menge $\{\lambda_1+\lambda_2=\lambda$, wo $\lambda_i\in\mathrm{sp}(A_i)$, $i=1,2\}$ enthalten. Wobei $A_i'e_k^i(\lambda_i)=\lambda_i e_k^i(\lambda_i)$, $k=1,\dots,\dim H_i(\lambda_i)$, $i==1,2$. Die Doppelreihe unter dem Integralzeichen konvergiert für jedes $\varphi\in\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$ und ihre Summe ist skalar integrierbar.

Bemerkung. Man kann dem Hauptsatz die folgende prägnante Form geben:

$$H(\lambda)=\int_{\lambda_1+\lambda_2=\lambda}H(\lambda_1)\bar{\otimes}H(\lambda_2)d\sigma_\lambda(\lambda_1,\lambda_2)\quad\text{für f. a. }\lambda\in\mathrm{sp}(B).$$

Die vorstehende Resultate können auf die separierbaren Operatoren in dem Hilbertschen Raume $H=H_1\bar{\otimes}H_2\bar{\otimes}\dots\bar{\otimes}H_n$ verallgemeinert werden. Es sei A_i s. a. Operator mit dem Definitionsgebiet $D(A_i)\subset H_i$, $i=1,\dots,n$;

$$\mathbf{A}_n\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{i=1}^{n}1_1\otimes\dots\otimes 1_{i-1}\otimes A_i\otimes 1_{i+1}\otimes\dots\otimes 1_n;\qquad \mathbf{1}_k=1_1\otimes\dots\otimes 1_k,$$

wo 1_i — Identitätsoperator in H_i. Wir haben also $\mathbf{A}_1=A_1$; $\mathbf{A}_n==A_{n-1}\otimes 1_n+1_{n-1}\otimes A_1$; $\mathbf{B}_k=\mathbf{B}_k^*$ ist die Berezanskij-Fortsetzung von $\mathbf{A}_k$, $k\geqslant 2$. $\mathbf{B}_{k+1}\supset\mathbf{B}_k\otimes 1_{k+1}+1_k\otimes A_{k+1}$.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 5. *Das Spektrum von $\mathbf{B}_n$ ist die algebraische Summe der Spektren von $A_1,\dots,A_n$: $\mathrm{sp}(\mathbf{B}_n)=\mathrm{sp}(A_1)+\dots+\mathrm{sp}(A_n)$.*

Satz 6. *Jedes Eigenfunktional $e_k(\lambda)$, $\lambda\in\mathrm{sp}(\mathbf{B}_n)$, des Operators $\mathbf{B}_n$ kann aus den Eigenfunktionalen $e_j(\lambda_k)$ der Operatoren A_k, $k=1,2,\dots,n$, folgendermaßen aufgebaut werden:*

$$e_k(\lambda)=\int\sum_{i_1=1}^{\dim\hat{H}_1(\lambda_1)}\dots\sum_{i_n=1}^{\dim\hat{H}_n(\lambda_n)}C_{i_1\dots i_n}(\lambda_1,\dots,\lambda_n;\lambda)e_{i_1}^1(\lambda_1)\otimes\dots\otimes$$
$$\otimes e_{i_n}^n(\lambda_n)d\sigma_\lambda(\lambda_1,\dots,\lambda_n),$$

wobei σ_λ positives endliches Maß auf R^n ist, dessen Träger in der Menge $\{\lambda_1+\dots+\lambda_n=\lambda$, wo $\lambda_i\in\mathrm{sp}(A_i)$, $i=1,\dots,n\}$ enthalten ist.

1. Tensorprodukte der lokalkonvexen linearen Räumen

Es seien H_i $(i=1,2)$ beliebige lineare Räume, $f^i,g^i,h^i\in H_i$. Das Tensorprodukt $H_1\otimes H_2$ ist der lineare Raum der formalen Linearkombinationen $\sum_j f_j^1\otimes f_j^2$, wobei $f^1\otimes f^2$ bilinear ist; genauer

$$(f^1+g^1)\otimes f^2=f^1\otimes f^2+g^1\otimes f^2,\qquad f^1\otimes(f^2+g^2)=f^1\otimes f^2+f^1\otimes g^2,$$
$$\lambda f^1\otimes f^2=\lambda(f^1\otimes f^2)=f^1\otimes\lambda f^2,\qquad\text{wobei}\quad\lambda\in\mathbf{C}^1.$$

Die grundlegende (auch charakteristische) Eigenschaft des Tensoriellen Produktes ist, daß es das Studium bilinearer Abbildungen B: $H_1\times H_2\to V$ auf Untersuchung der linearen Abbildungen L_B: $H_1\otimes H_2\to V$ zurückführt:

$$B(f^1,f^2)=L_B(f^1\otimes f^2)\ \text{identisch für}\ f_i\in H_i,\quad i=1,2.$$

Falls H_i ein Hilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)_i$ ist, dann definiert man auf dem algebraischen Tensorprodukt $H_1\otimes H_2$ das Skalarprodukt $(\,|\,)$ folgendermaßen: es sei $f=\sum f_i^1\otimes f_i^2$, $g=\sum g_j^1\otimes g_j^2\in H_1\otimes H_2$, dann ist

$$(f|g)=\sum_{i,j}(f_i^1|g_j^1)_1(f_i^2|g_j^2)_2,\tag{1.1}$$

$$\|f\|^2=\sum_{i,j}(f_i^1|f_j^1)_1(f_i^2|f_j^2)_2.\tag{1.2}$$

Der Ausdruck (1.1) ist Hermitesch und positivdefinit.

Wenn die Hilbertschen Räume H_i unendlichdimensional sind, dann ist $H_1\otimes H_2$ nicht vollständig. Die Vervollständigung dieses Raumes H wird mit $H_1\bar{\otimes}H_2$ bezeichnet.

Es seien Φ_i, $i=1,2$, lokal konvexe lineare (l. k. l.) Räume dessen Topologie durch die Halbnormen $\|\ \|_{p_i}$, $p_i\in\Pi_i$, definiert ist. Auf dem algebraischen Tensorprodukt $\Phi_1\otimes\Phi_2$ führt man Halbnormen

$$\|\varphi\|_{p_1\otimes p_2}=\inf_K\sum\|\varphi_i^1\|_{p_1}\|\varphi_i^2\|_{p_2}\tag{1.3}$$

ein, wo K die Klasse aller Darstellungen von $\varphi=\sum\varphi_i^1\otimes\varphi_i^2$ bedeutet (φ kann auf verschiedene Weise als lineare Kombination der einfachen Tensoren dargestellt werden).

Die Vervollständigung von $\Phi_1\otimes\Phi_2$ in der durch (1.3) definierten Topologie heißt *projektives topologisches Tensorprodukt* und wird mit $\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$ bezeichnet.

Wie Grothendieck [4] gezeigt hat gilt das

Lemma 1.1. *Falls Φ_1, Φ_2 nuklear sind, dann ist auch $\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$ nuklear.*

Wie in [5] gezeigt wurde, ist für die verallgemeinerten Eigenfunktionsentwicklungen im Hilbertschen Raume von entscheidender Bedeutung die Existenz einer nuklearen linearen Untermenge, die in betreffendem Hilbertschen Raume dicht ist und deren Topologie stärker als die relative ist. Das folgende Lemma gibt eine Konstruktion solcher Untermenge in $H_1 \overline{\otimes} H_2$:

LEMMA 1.2. *Es sei Φ_i eine lineare dichte Untermenge im Hilbertschen Raume H_i, wobei die kanonischen Einbettungen $\Phi_i \ni \varphi^i \to \varphi^i \in H_i$ stetig sind, $i = 1, 2$. Dann ist $\Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$ dicht im $H_1 \overline{\otimes} H_2$ und die Einbettung $\Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2 \to H_1 \overline{\otimes} H_2$ ist stetig.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ in $H_1 \otimes H_2$ dicht ist.

Es sei $\sum_{i=1}^{N} h_i^1 \otimes h_i^2 = h \in H_1 \otimes H_2$ und $\sum \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2 = \varphi \in \Phi_1 \otimes \Phi_2$, daher

$$\|h-\varphi\| = \Big\| \sum_i (h_i^1 \otimes h_i^2 - \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2) \Big\|$$
$$\leqslant \sum (\|h_i^1 \otimes \varphi_i^2 - h_i^1 \otimes h_i^2\| + \|h_i^1 \otimes \varphi_i^2 - \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2\|)$$
$$= \sum (\|h_i^1\|_1 \|h_i^2 - \varphi_i^2\|_2 + \|\varphi_i^2\|_2 \|h_i^1 - \varphi_i^1\|_1).$$

Da aber Φ_k in H_k dicht ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ und $h_i^k \in H_k$ ein solches $\varphi_i^k \in \Phi_k$, daß $\|h_i^k - \varphi_i^k\|_k < \varepsilon$, $k = 1, 2$. Also

$$\|\varphi - h\| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \big(\|h_i^1\|_1 \varepsilon + (\|h_i^2\|_2 + \varepsilon)\varepsilon\big) = N\varepsilon^2 + M\varepsilon = \varepsilon', \tag{1.4}$$

wobei $M = \sum (\|h_i^1\|_1 + \|h_i^2\|_2) < \infty$. Zu jedem $h \in H_1 \otimes H_2$ und $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\varphi \in \Phi_1 \otimes \Phi_2$, daß (1.4) gilt (es genügt $\varepsilon = (M^2 + 4N\varepsilon')^{1/2}/2N$ zu nehmen).

Die projektive Topologie auf $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ ist feiner als die von (1.2) definierte Hilbertsche Topologie. Es gilt nämlich

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j} (h_i^1 | h_j^1)_1 (h_i^2 | h_j^2)_2 \leqslant \sum_{i,j} \|h_i^1\|_1 \|h_j^1\|_1 \|h_j^2\|_2 \|h_j^2\|_2 = \Big(\sum \|h_i^1\|_1 \|h_i^2\|_2\Big)^2. \tag{1.5}$$

Da die identische Einbettung $\Phi_k \to H_k$ stetig ist, gibt es ein solches $C_k > 0$ und eine solche Halbnorm $\sum_{p_k} \|\ \|_{p_k}$, daß $\|h^k\| \leqslant c_k \sum_{p_k} \|h^k\|_{p_k}$. Aus (1.5) folgt also

$$\|h\| \leqslant c_1 c_2 \sum_i \sum_{p_1,p_2} \|h_i^1\|_{p_1} \|h_i^2\|_{p_2} = c_1 c_2 \sum_{p_1,p_2} \Big(\sum_i \|h_i^1\|_{p_1} \|h_i^2\|_{p_2}\Big). \tag{1.6}$$

Da (1.6) für jeden Representanten von h gilt, können wir in (1.6) zur unteren Grenze übergehen und aus (1.3) erhalten wir

$$\|h\| \leqslant c_1 c_2 \sum_{p_1,p_2} \|h\|_{p_1 \otimes p_2}. \tag{1.7}$$

Die Ungleichung (1.7) besagt, daß die projektive Topologie feiner als die Hilbertsche auf $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ ist; daraus und aus (1.4) folgt die Behauptung.

2. Das Spektrum der Berezanskij-Fortsetzung des Operators $A_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes A_2$

Im folgenden wird immer vorausgesetzt, daß die vorkommende Hilbertsche Räume separabel sind; lineare Operatoren sind immer dicht definiert.

Es sei A_i ein linearer Operator im Hilbertschen Raume H_i, $D(A_i)$ sein Definitionsgebiet, $i = 1, 2$.

Definition. $A_1 \otimes A_2$ ist der auf $D(A_1) \otimes D(A_2)$ definierter Operator: $(A_1 \otimes A_2)(f^1 \otimes f^2) = (A_1 f^1) \otimes (A_2 f^2)$, $f^i \in D(A_i) \subset H_i$.

Es gilt der folgende

SATZ 2.1. *Es sei 1_i der Einheitsoperator in H_i; $A_i = A_i^*$ sind selbstadjungierte (im allgemeinen unbeschränkte) Operatoren mit den kanonischen Spektralzerlegungen*

$$A_i = \int \lambda \, dE_i(\lambda), \quad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

Dann besitzen die Operatoren $A_1 \otimes 1_2$, $1_1 \otimes A_2$ folgende s. a. Fortsetzungen:

$$\int \lambda d(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}) \supset A_1 \otimes 1_2, \qquad \int \lambda d(\overline{1_1 \otimes E_2(\lambda)}) \supset 1_1 \otimes A_2 \; (^1). \tag{2.2}$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß $\lambda \to \overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}$ eine Zerlegung der Einheit in $H_1 \overline{\otimes} H_2$ bildet. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten:

a) $\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}$ ist symmetrisch.

Wir zeigen zuerst Symmetrie von $E_1(\lambda) \otimes 1_2$:

$$\Big((E_1(\lambda) \otimes 1_2) \sum f_i^1 \otimes f_i^2 \Big| \sum g_j^1 \otimes g_j^2\Big) = \Big(\sum E_1(\lambda) f_i^1 \otimes f_i^2 \Big| \sum g_j^1 \otimes g_j^2\Big)$$
$$= \Big(\sum_{i,j} E_1(\lambda) f_i^1 \Big| g_j^1\Big)_1 (f_i^2 | g_j^2)_2 = \sum_{i,j} (f_i^1 | E_1(\lambda) g_j^1)_1 (f_i^2 | g_j^2)_2$$
$$= \Big(\sum f_i^1 \otimes f_i^2 \Big| \sum E_1(\lambda) g_j^1 \otimes g_j^2\Big) = \Big(\sum f_i^1 \otimes f_i^2 \Big| (E_1(\lambda) \otimes 1_2) \sum g_j^1 \otimes g_j^2\Big).$$

Da die Abschließung eines symmetrischen Operators wieder symmetrisch ist, ist a) bewiesen.

b) $\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}$ ist beschränkt (auf $H_1 \overline{\otimes} H_2$).

(1) Man kann unschwer beweisen, daß die Operatoren $A_1 \otimes 1_2$, $1_1 \otimes A_2$ wesentlich s. a. sind, d. h., daß ihre Abschließung $\overline{A_1 \otimes 1_2}$, $\overline{1_1 \otimes A_2}$ schon s. a. ist, d. h. die von uns konstruierten Operatoren (2.2) eben die Abschließungen von $A_1 \otimes 1_2$, $_2$ sind: $\int \lambda d(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}) = \overline{A_1 \otimes 1_2}$ u. s. w.

Wir zeigen zuerst, daß $E_1(\lambda)\otimes 1_2$ beschränkt auf $H_1\otimes H_2$ ist. Es sei

$$H_1 = E_1(\lambda)H_1 \otimes H_1^{\perp}(\lambda), \tag{2.3}$$

wo $H_1^{\perp}(\lambda)$ orthogonales Komplement zu $E_1(\lambda)H_1$ ist. Es sei $g = \sum g_i^1\otimes g_i^2$. Aus (2.3) folgt $g_i^1 = h_i^1 + h_i^{\perp}$, wo $h_i \in E_1(\lambda)H_1$, $h_i^{\perp} \in H_1^{\perp}(\lambda)$; daher $g = \sum (h_i^1\otimes g_i^2 + h_i^{\perp}\otimes g_i^2)$, also $\|(E_1(\lambda)\otimes 1_2)g\| = \|\sum h_i^1\otimes g_i^2\|$, weil $E_1(\lambda)h_i^{\perp} = 0$, $E_1(\lambda)h_i = h_i$. Aber

$$\Big\|\sum h_i^1\otimes g_i^2\Big\|^2 = \sum_{i,j}(h_i^1|h_j^1)_1(g_i^2|g_j^2)_2 \tag{2.3}$$

$$\leqslant \sum_{i,i}(h_i^1|h_j^1)_1(g_i^2|g_j^2)_2 + \sum_{i,j}(h_i^{\perp}|h_j^{\perp}\ {}^{2}|g_j^2)_2,$$

weil

$$\sum_{i,j}(h_i^{\perp}|h_j^{\perp})_1(g_i^2|g_j^2)_2 = \Big\|\sum_i h_i^{\perp}\otimes g_i^2\Big\|^2 \geqslant 0.$$

Da aber die rechte Seite von (2.3) wegen (1.2) gleich $\|g\|^2$ ist, haben wir

$$\|(E_1(\lambda)\otimes 1_2)g\|^2 \leqslant \|g\|^2. \tag{2.4}$$

Für jedes λ ist also $\|E_1(\lambda)\otimes 1_2\| \leqslant 1$. Daraus folgt

$$\|\overline{E_1(\lambda)1_2}\| \leqslant 1. \tag{2.4'}$$

c) $\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2}$ ist ein Projektionsoperator in $H = H_1\bar{\otimes} H_2$.

Wegen a) und b) genügt es zu zeigen, daß $\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2}$ auf $H_1\otimes H_1$, d. h. daß $E_1(\lambda)\otimes 1_2$ ein Idempotent ist. Es sei also

$$h = \sum h_i^1\otimes h_i^2,$$

$$(E_1(\lambda)\otimes 1_2)(E_1(\lambda)\otimes 1_2)h = (E_1(\lambda)\otimes 1_2)\sum (E_1(\lambda)\otimes 1_2)(h_i^1\otimes h_i^2)$$

$$= (E_1(\lambda)\otimes 1_2)\sum E_1(\lambda)h_i^1\otimes h_i^2 = \sum E_1(\lambda)E_1(\lambda)h_i^1\otimes h_i^2$$

$$= \sum E_1(\lambda)h_i^1\otimes h_i^2 = E_1(\lambda)\otimes 1_2 \sum h_i^1\otimes h_i^2 = (E_1(\lambda)\otimes 1_2)h.$$

d) $(\overline{E_1(\lambda_2)\otimes 1_2})H \supset (\overline{E_1(\lambda_1)\otimes 1_2})H$ für $\lambda_2 > \lambda_1$.

Aus $E_1(\lambda_2)H_1 \supset E_1(\lambda_1)H_1$ für $\lambda_2 > \lambda_1$ folgt

$$(E_1(\lambda_1)\otimes 1_2)\sum h_i^1\otimes h_i^2 = \sum E_1(\lambda_1)h_i^1\otimes h_i^2 = \sum E_1(\lambda_2)E_1(\lambda)h_i^1\otimes h_i^2$$

$$= (E_1(\lambda_2)\otimes 1_2)\sum E_1(\lambda_1)h_i^1\otimes h_i^2 \in (E_1(\lambda_2)\otimes 1_2)H_1\otimes H_2,$$

also $(E_1(\lambda_1)\otimes 1_2)H_1\otimes H_2 \subset (E_1(\lambda_2)\otimes 1_2)H_1\otimes H_2$ für $\lambda_1 < \lambda_2$. d) folgt jetzt aus b).

e) Linksseitige Stetigkeit von $\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2}$.

Es sei $h = \sum h_i^2\otimes h_i^2 \in H_1\otimes H_2$, da für $h^1 \in H_1$

$$E_1(\lambda - t)h^1 \to E_1(\lambda)h^1 \quad \text{für} \quad t\downarrow 0,$$

$$\|(E_1(\lambda-t)\otimes 1_2 - E_1(\lambda)\otimes 1_2)h\| \tag{2.5}$$

$$\leqslant \Big\|\sum E_1(\lambda-t)h_i^1\otimes h_i^2 - E_1(\lambda)h_i^1\otimes h_i^2\Big\|$$

$$\leqslant \sum \|(E_1(\lambda-t) - E_1(\lambda))h_i^1\|_1\|h_i^2\|_2 \to 0 \quad \text{für} \quad 0 < t \to 0.$$

Aus (2.5) und (2.4') folgt die linksseitige Stetigkeit von $\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2}$, da $H_1\otimes H_2$ in $H = H_1\bar{\otimes} H_2$ dicht ist.

f) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2} = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2} = 1 = \overline{1_1\otimes 1_2}$ wird analog wie e) bewiesen.

g) In Punkten c)-f) wurde bewiesen, daß $\lambda \to \overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2}$ eine Zerlegung der Identität in $H_1\bar{\otimes} H_2$ ist. Jetzt wollen wir (2.2) bewiesen. Es sei $f_i^1, g_i^1 \in D(A_1)$, $f_i^2, g_i^2 \in H_2$, also $\sum f_i^1\otimes f_i^2$, $\sum g_j^1\otimes g_j^2 \in D(A_1)\otimes H_2$. Dann

$$\Big(\int \lambda d(E_1(\lambda)\otimes 1_2)\sum f_i^1\otimes f_i^2\Big|\sum g_j^1\otimes g_j^2\Big)$$

$$= \int \lambda d\Big(E_1(\lambda)\otimes 1_2\sum f_i^1\otimes f_i^2\Big|\sum g_j^1\otimes g_j^2\Big)$$

$$= \int \lambda d\Big(\sum E_1(\lambda)f_i^1\otimes f_i^2\Big|\sum g_j^1\otimes g_j^2\Big) = \int\lambda d\sum_{i,j}\big(E_1(\lambda)f_i^1\big|g_j^1\big)_1\big(f_2^2\big|g_j^2\big)_2$$

$$= \sum_{i,j}\int\lambda d(E_1(\lambda)f_i^1|g_j^1)_1(f_i^2|g_j^2)_2 = \sum_{i,j}\Big(\int\lambda dE_1(\lambda)f_i^1\Big|g_i^1\Big)_1\big(f_i^2\big|g^2\big)_2$$

$$= \Big(\sum_i\Big(\int\lambda dE_1(\lambda)f_i^1\Big)\otimes f_i^2\Big|\sum_j g_j^1\otimes g_j^2\Big) = \Big(\sum A_1 f_i^1\otimes f_i^2\Big|\sum g^1\otimes g_j^2\Big)$$

$$= \Big((A_1\otimes 1_2)\sum f_i^1\otimes f_i^2\Big|\sum g_j^1\otimes g_j^2\Big).$$

Da die Vektoren $\sum g_j^1\otimes g_j^2$ in $H_1\bar{\otimes} H_2$ dicht sind, haben wir die verlangte Inklusion $\int\lambda d(\overline{E_1(\lambda)\otimes 1_2}) \supset A_1\otimes 1_2$ bewiesen.

Jetzt beweisen wir das einfache

Lemma 2.1. *Es sei B_i Projektionsoperator in H_i, $i = 1, 2$. Dann sind die Operatoren $\overline{B_1\otimes 1_2}$, $\overline{1_1\otimes B_2}$ vertauschbar.*

Beweis. Da die Operatoren $\overline{B_1\otimes 1_2}$, $\overline{1_1\otimes B_2}$ beschränkt (sogar Projektionsoperatoren) sind, genügt ihre Vertauschbarkeit auf der dichten Untermenge $H_1\otimes H_2 \subset H$ zu beweisen:

$$(B_1\otimes 1_2)(1_1\otimes B_2)h^1\otimes h^2 = (B_1\otimes 1_2)H^1\otimes B_2 h^2 = B_1 h^1\otimes B_2 h^2$$

$$= (1_1\otimes B_2)(B_1 h^1\otimes h^2) = (1_1\otimes B_2)(B_1\otimes 1_2)h^1\otimes h^2$$

identisch für $h^i \in H_i$, $i = 1, 2$. Aus der Linearität der Operatoren B_1, B_2 folgt also die Vertauschbarkeit von $B_1 \otimes 1_2$, $1_1 \otimes B_2$, w. z. b. w.

KOROLLAR 2.1. *Die s. a. Operatoren*

$$\int \lambda d(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}), \qquad \int \lambda d(\overline{1_1 \otimes E_2(\lambda)})$$

sind stark vertauschbar, d. h. ihre Spektralscharen $\overline{E_1(\lambda_1) \otimes 1_2}$, $\overline{1_1 \otimes E_2(\lambda_2)}$ *sind für alle* $\lambda_1, \lambda_2 \in R^1$ *vertauschbar.*

Der folgende Satz besagt, daß $\overline{A_1 \otimes 1_2}$ dasselbe Spektrum wie der Operator A_1 besitzt:

SATZ 2.2. $\mathrm{Sp}(\overline{A_1 \otimes 1_2}) = \mathrm{Sp}(A_1)$; $\mathrm{Sp}(\overline{1_1 \otimes A_2}) = \mathrm{Sp}(A_2)$ (²).

Bevor wir zu dem Beweis übergehen, erinnern wir an die klassische Charakteristik des Spektrums $\mathrm{Sp}(B)$ eines s. a. Operators in einem Hilbertschen Raume F, die wir als folgendes Lemma anführen:

LEMMA 2.2. $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ *dann und nur dann, wenn zu jedem* $\lambda_1 > \lambda$ *ein solches* $f \in F$ *gibt, daß*

$$(2.6) \qquad (E(\lambda_1)f|f) > (E(\lambda)f|f), \quad \text{wobei} \quad \int \lambda dE(\lambda) = B.$$

Beweis des Satzes 2.2. Zuerst zeigen wir die Inklusion $\mathrm{Sp}(A_1) \subset \mathrm{Sp}(\overline{A_1 \otimes 1_2})$. Es sei $A_1 = \int \lambda dE_1(\lambda)$ und $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A_1$, dann gibt es zu jedem $\lambda_1 > \lambda$ ein solches $h^1 \in H_1$, daß

$$(2.7) \qquad (E_1(\lambda_1)h^1 | h^1)_1 > (E_1(\lambda)h^1 | h^1)_1.$$

Es sei $h = h^1 \otimes h^2$, dann folgt für $\|h^2\|_2 > 0$, aus (2.7),

$$\big((\overline{E_1(\lambda_1) \otimes 1_2})h^1 \otimes h^2 | h^1 \otimes h^2\big) = (E_1(\lambda_1)h^1|h^1)_1 \|h^2\|_2^2$$
$$> (E_1(\lambda)h^1|h^1)_1 (h^2|h^2)_2 = (\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2} h^1 \otimes h^2 | h^1 \otimes h^2),$$

also $\lambda \in \mathrm{Sp}\big(\int \lambda d(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2})\big)$.

Jetzt zeigen wir, daß $\mathrm{Sp}(\overline{A_1 \otimes 1_2}) \subset S(A_1)$. Es sei $\lambda \in \mathrm{Sp}(\overline{A_1 \otimes 1_2})$. Wir werden zeigen, daß dann $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_1)$. Zu jedem $\lambda_1 > \lambda_2$ gibt es ein $h = \lim h_n$, wo $h_n \in H_1 \bar{\otimes} H_2$ — die Konvergenz wird im Raume $H_1 \bar{\otimes} H_2$ verstanden — daß

$$(\overline{E_1(\lambda_1) \otimes 1_2} h | h) > (\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2} h | h),$$

also

$$\lim_n \big((E_1(\lambda) \otimes 1_2)h_n \big| h_n\big) > \lim_n \big((E_1(\lambda) \otimes 1_2)h_n \big| h_n\big).$$

(²) Wie Herr Dr M. Burnat uns freundlich mitteilte folgt Satz 2.2 aus der Identität: für $\lambda, \mu \in R^1$ gilt $(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}) - (\overline{E_1(\mu) \otimes 1_2}) \equiv (\overline{(E_1(\lambda) - E_1(\mu)) \otimes 1_2}$.

Es gibt also für $\lambda_1 > \lambda$ ein solches $h_N = \sum h_i^1 \otimes h_i^2 \in H_1 \otimes H_2$, daß $\big((E_1(\lambda_1) \otimes 1_2)h_N | h_N\big) > \big((E_1(\lambda) \otimes 1_2)h_N | h_N\big)$, also

$$(2.8) \qquad \sum \|E_1(\lambda_1)h_i^1\|_1^2 \|h_i^2\|_2 = \big((E_1(\lambda_1) \otimes 1_2)h_N \big| h_N\big) > \big((E_1(\lambda) \otimes 1_2)h_N \big| h_N\big)$$
$$= \sum \|E_1(\lambda)h_i^1\|_1^2 \|h_i^2\|_2^2.$$

Da

$$(2.9) \qquad \|E_1(\lambda_1)h_i^1\|_1^2 \geqslant \|E_1(\lambda)h_i^1\|_1^2,$$

für jedes $h_i^1 \in H^1$, $\lambda_1 > \lambda$ ($\lambda \to E_1(\lambda)$ ist ja eine Zerlegung der Einheit), so folgt aus (2.8), (2.9) die Existenz eines solchen i_0, daß

$$\|E_1(\lambda_1)h_{i_0}^1\|_1^2 > \|E_1(\lambda)h_{i_0}^1\|_1^2,$$

was eben $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_1)$ bedeutet.

Jetzt werden wir die von Berezanskij (vgl. [1]) konstruierte s. a. Fortsetzung B des Operators $A = A_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes A_2$ untersuchen. Seine Konstruktion fassen wir in dem folgenden Lemma zusammen:

LEMMA 2.3 (Berezanskij). *Es sei*

$$A_i = \int \lambda dE_i(\lambda), \qquad i = 1, 2;$$

dann ist

$$B \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda),$$

wo die Spektralschar $\lambda \to E(\lambda)$ *durch nachstehende Relationen definiert ist:*

$$(2.10) \qquad (E(\lambda)f^1 \otimes f^2 | g^1 \otimes g^2) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (E_1(\lambda - \mu)f^1 | g^1)_1 d_\mu(E_2(\mu)f^2 | g^2)_2;$$

durch Linearität ist $(E(\lambda)f_n | g_m)$ *für beliebige* $f_n, g_m \in H_1 \otimes H_2$ *erklärt und für* $f, g \in H_1 \bar{\otimes} H_2$ *durch Abschließung definiert:*

$$(2.11) \qquad (E(\lambda)f | g) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim_n \lim_m (E(\lambda)f_n | g_m), \quad \text{wo} \quad f = \lim f_n,\ g = \lim g_m.$$

Der auf diese Weise konstruierte s. a. Operator $B = B^*_4 \supset A$ werden wir als *Berezanskij-Fortsetzung des Operators* $A = A_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes A_2$ bezeichnen.

Es sei

$$(2.12) \qquad a(A_{12}) = \int a(\lambda) d(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2})$$

eine beschränkte Funktion des Operators $A_{12} = \int \lambda d(\overline{E_1(\lambda) \otimes 1_2}) = A_1 \otimes 1_2$ dann gelten folgende Hilfssätze:

LEMMA 2.4. $a(A_{12})(h^1 \otimes h^2) = \big(a(A_1)h^1\big) \otimes h^2, \ h^i \in H_i, \ i = 1, 2.$

Beweis. Aus (2.12) haben wir

$$a(A_{12})(h^1 \otimes h^2) = \int a(\lambda)\, d\big(E_1(\lambda) h^1 \otimes h^2\big) = \Big(\int a(\lambda)\, dE_1(\lambda) h^1\Big) \otimes h^2$$
$$= a(A_1) h^1 \otimes h^2.$$

LEMMA 2.5. *Es sei* $a^*(\lambda) = \overline{a(\lambda)}$, $a^*(A_{12}) = \big(a(A_{12})\big)^*$, *dann*

$$\big(h \,|\, (a(A_1))^* g^1 \otimes g^2\big) = \big(a(A_{12})h \,|\, g^1 \otimes g^2\big), \quad \textit{für} \quad h \in H_1 \overline{\otimes} H_2; \ g^i \in H_i.$$

Beweis. Aus Lemma 2.4. folgt

$$\big(h \,|\, a^*(A_1) g^1 \otimes g^2\big) = \big(h \,|\, a^*(A_1{}^2)(g^1 \otimes g^2)\big) = \big(a(A_{12})h \,|\, g^1 \otimes g^2\big).$$

LEMMA 2.6. *Jede beschränkte Funktion* $a(A_{12})$ *des Operators* A_{12} *ist mit* B *stark vertauschbar.*

Beweis. Wir sollen also Vertauschbarkeit von $a(A_{12})$ mit jedem $E(\lambda)$ beweisen. Aus Lemma 2.4, 2.5 und (2.10) folgt

$$\big(E(\lambda) a(A_{12})(h^1 \otimes h^2) \,|\, g^1 \otimes g^2\big) = \Big(\big(E(\lambda) a(A_1) h^1\big) \otimes h^2 \,|\, g^1 \otimes g^2\Big)$$
$$= \int \big(E_1(\lambda - \mu) a(A_1) h^1 \,|\, g^1\big)_1 d_\mu \big(E_2(\mu) h^2 \,|\, g^2\big)_2$$
$$= \int \big(a(A_1) E_1(\lambda - \mu) h^1 \,|\, g^1\big)_1 d_\mu \big(E_2(\mu) h^2 \,|\, g^2\big)_2$$
$$= \int \big(E_1(\lambda - \mu) h^1 \,|\, a^*(A_1) g^1\big)_1 d_\mu \big(E_2(\mu) h^2 \,|\, g^2\big)_2$$
$$= \big(a(A_{12}) E(\lambda)(h^1 \otimes h^2) \,|\, g^1 \otimes g^2\big).$$

Aus der Linearität folgt daraus

$$\big(E(\lambda) a(A_{12}) h \,|\, g\big) = \big(a(A_{12}) E(\lambda) h \,|\, g\big), \quad h, g \in H_1 \otimes H_2. \tag{2.13}$$

Da $H_1 \otimes H_2$ dicht in H ist, haben wir aus (2.13)

$$E(\lambda) a(A_{12}) h = a(A_{12}) E(\lambda) h, \quad h \in H_1 \overline{\otimes} H_2.$$

Aus der Stetigkeit der Operatoren folgt $E(\lambda) a(A_{12}) = a(A_{12}) E(\lambda)$, d. h. die Behauptung.

Analoge Hilfssätze gelten für beschränkte Funktionen des Operators $A_{21} = \overline{1_1 \otimes A_2}$.

KOROLLAR 2.2. *Die Operatoren* A_{12}, A_{21} *und* B *sind stark vertauschbar; es gibt also einen solchen s. a. Operator* S, *daß*

$$A_{12} = f_1(S); \quad A_{21} = f_2(S), \quad B = f(S);$$

genauer

$$A_{12} = \int f_1(\lambda)\, d\mathscr{E}(\lambda), \quad \textit{wo} \quad S = \int \lambda\, d\mathscr{E}(\lambda), \quad \textit{u. s. w.}$$

Den folgenden Hilfssatz entnehmen wir der — noch nicht publizierten — Habilitationsschrift von W. Roelcke:

LEMMA 2.7 (Roelcke). *Es seien* B_i, $i = 1, 2$, *stark vertauschbare s. a. Operatoren in einem (separablen) Hilbertschen Raume* H, *die Fortsetzungen eines dichtdefinierten symmetrischen Operators* A *sind*: $B_i^* = B_i \supset A$, $\overline{D(A)} = H$.

Dann sind B_1 *und* B_2 *identisch*: $B_1 = B_2$.

Beweis (indirekt). Wir nehmen an, daß $B_1 \neq B_2$ und zeigen, daß $U = \{u \in D(B_1) \cap D(B_2) : B_1 u = B_2 u\}$ nicht dicht in H ist, was unmöglich ist, da $U \supset D(A)$ und wie vorausgesetzt $D(A)$ dicht in H ist. Da B_1, B_2 stark vertauschbar sind gibt es einen solchen s. a. Operator S, daß $B_i = f_i(S) = \int f_i(\lambda)\, d\mathscr{E}(\lambda)$. Für jedes $u \in U$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(\lambda) - f_2(\lambda)|^2 d\|\mathscr{E}(\lambda) u\|^2 = \|B_1 u - B_2 u\|^2 = 0,$$

daher ist die S-meßbare Menge $N = \{\lambda \in R^1 : f_1(\lambda) \neq f_2(\lambda)\}$ eine Nullmenge bezüglich $d\|\mathscr{E}(\lambda) u\|^2$ für alle $u \in U$. Daraus folgt, daß N eine Nullmenge bezüglich $d\|\mathscr{E}(\lambda) v\|^2$ für alle $v \in V$, wenn V den von U erzeugten Unterraum von H bezeichnet. Ist nämlich $U \ni u_n \to v$, dann gilt

$$\int_N d\|\mathscr{E}(\lambda) v\|^2 = \int_N d\|\mathscr{E}(\lambda) v\|^2 - \int_N d\|\mathscr{E}(\lambda) u_n\|^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_N d\big(\mathscr{E}(\lambda)(v + u_n) \,\big|\, v - u_n\big) + \tfrac{1}{2} \int_N d\big(\mathscr{E}(\lambda)(v - u_n) \,\big|\, v + u_n\big)$$
$$\leqslant \|v + u_n\| \, \|v - u_n\| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wäre nun U dicht, also $V = H$, so wäre hiernach N eine S-Nullmenge im Widerspruch zu $B_1 \neq B_2$.

Aus dem Korollar 2.2 und dem Roelckeschen Lemma folgt also der folgende

SATZ 2.3. *Es sei* $A_i = f_i(S)$, $i = 1, 2$, *wo* $S = S^*$ *der im Korollar benutzte s. a. Operator ist. Dann ist die Berezanskij-Fortsetzung* B *des Operators* $A = A_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes A_2$ *gleich* $(f_1 + f_2)(S)$:

$$B = (f_1 + f_2)(S) = \int \big(f_1(\lambda) + f_2(\lambda)\big)\, d\mathscr{E}(\lambda).$$

Dieser Satz besagt, daß die Berezanskij Operator B die „natürliche” s. a. Fortsetzung von A ist. Satz 2.3 erlaubt das Spektrum von B zu bestimmen; dazu beweisen wir weitere zwei Hilfssätze.

LEMMA 2.8. *Das Spektrum des Operators* B *ist eine Untermenge der algebraischen Summe der Spektren von* A_1 *und* A_2:

$$\operatorname{Sp}(B) \subset \operatorname{Sp}(A_1) + \operatorname{Sp}(A_2). \tag{2.14}$$

Beweis. Aus der Spektraltheorie folgt, daß $\mathrm{Sp}(B)=\{(f_1+f_2)(\lambda):\lambda\in\mathrm{Sp}(S)\}$, $\mathrm{Sp}(A_i)=\{f_i(\lambda):\lambda\in\mathrm{Sp}(S)\}$, $i=1,2$. Woraus folgt die Behauptung.

Lemma 2.9. *Algebraische Summe der Spektren von A_1 und A_2 ist im Spektrum von B enthalten*:

$$\mathrm{Sp}(A_1)+\mathrm{Sp}(A_2)\subset\mathrm{Sp}(B). \tag{2.15}$$

Beweis. Es sei $\alpha\in\mathrm{Sp}(A_1)$; wir zeigen, daß zu jedem $c>0$ ein $h_c^1\in H_1$ und ein solches positives $\delta=\delta(h_c^1)=\delta(c)>0$, daß

$$\big(E_1(\alpha+c-d)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha-d)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1>0 \quad \text{für} \quad 0\leqslant d\leqslant\delta, \tag{2.16}$$

da

$$\begin{aligned}\big(E_1(\alpha+c-d)h^1\,|\,h^1\big)_1-\big(E_1(\alpha-d)h^1\,|\,h^1\big)_1 &= \big[\big(E_1(\alpha-d+c)h^1\,|\,h^1\big)_1-\big(E_1(\alpha+c)h^1\,|\,h^1\big)_1\big]+\\ &\quad+\big[\big(E_1(\alpha+c)h^1\,|\,h^1\big)_1-\big(E_1(\alpha)h^1\,|\,h^1\big)_1\big]+\\ &\quad+\big[\big(E_1(\alpha)h^1\,|\,h^1\big)_1-\big(E_1(\alpha-d)h^1\,|\,h^1\big)\big] \quad \text{für} \quad h^1\in H_1.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Aus $\alpha\in\mathrm{Sp}(A_1)$ und (2.6) folgt, daß zu jedem $c>0$ ein solches $h_c^1\in H_1$ existiert, daß

$$\big(E_1(\alpha+c)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1>0. \tag{2.18}$$

Aus der linksseitigen Stetigkeit der Spektralschar $\lambda\to E_1(\lambda)$ folgt, daß zu jedem $\varepsilon>0$ und $h_c^1\in H_1$ ein solches $\delta>0$ gibt, daß für jedes $0\leqslant d\leqslant\delta$

$$\left|\big(E_1(\alpha+c-d)\,h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha+c)\,h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1\right|<\varepsilon.$$

Setzen wir jetzt $\varepsilon=\frac{1}{2}\big[\big(E_1(\alpha+c)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1\big]$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\big(E_1(\alpha-d+c)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1&-\big(E_1(\alpha+c)h_c^1\,|\,h_c^1\big)\\ &>-\tfrac{1}{2}\big[\big(E_1(\alpha+c)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1\big],\end{aligned} \tag{2.19}$$

da aber das dritte Glied aus der rechten Seite von (2.17) immer $\geqslant 0$, so folgt aus (2.17), (2.18), (2.19)

$$\begin{aligned}\big(E_1(\alpha+c-d)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1&-\big(E_1(\alpha-d)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1\\ &>\tfrac{1}{2}\big[\big(E_1(\alpha+c)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha)h_c^1\,|\,h_c^1\big)_1\big]>0.\end{aligned}$$

Es sei jetzt $\beta\in\mathrm{Sp}(A_2)$. Wir wollen zeigen, daß

$$\alpha+\beta\in\mathrm{Sp}(B).$$

Aus (2.10) folgt, daß

$$\begin{aligned}&\big(E(\alpha+\beta+c)(h_c^1\otimes h^2)\,|\,h_c^1\otimes h^2\big)-\big(E(\alpha+\beta)(h_c^1\otimes h_c^2)\,|\,h_c^1\otimes h^2\big)\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\big[\big(E_1(\alpha+\beta-\mu+c)h^1\,|\,h_c^1\big)_1-\big(E_1(\alpha+\beta-\mu)h_c^1\,|\,h^1\big)_1\big]\,d\mu\big(E_2(\mu)h^2\,|\,h^2\big)_2.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Wegen (2.16) ist [ ] positiv für alle solche μ, daß $0\leqslant\mu-\beta\leqslant\delta$, d. h. $\beta\leqslant\mu\leqslant\beta+\delta$. Da $\beta\in\mathrm{Sp}(A_2)$, so gibt es zu $\delta>0$ ein solches $h_\delta^2\in H_2$, daß

$$0<\big(E_2(\beta+\delta)h_\delta^2\,|\,h_\delta^2\big)_2-\big(E_2(\beta)h_\delta^2\,|\,h_\delta^2\big)_2=\int_{\beta}^{\beta+\delta}d_\mu\big(E_2(\mu)h_\delta^2\,|\,h_\delta^2\big)_2. \tag{2.21}$$

Deshalb ist

$$\int_{\beta}^{\beta+\delta}[\ \ ]\,d_\mu\big(E_2(\mu)h_\delta^2\,|\,h_\delta^2\big)_2>0 \tag{2.22}$$

als Integral einer (streng-)positiven Funktion [ ] auf einer Menge vom positiven Maß (2.21). Wir schreiben jetzt die rechte Seite von (2.20) als Summe der drei nichtnegativen Summanden:

$$\int_{-\infty}^{\infty}=\int_{-\infty}^{\beta}+\int_{\beta}^{\beta+\delta}+\int_{\beta+\delta}^{\infty}>0,$$

wegen (2.22).

Zu jedem $\alpha+\beta\in\mathrm{Sp}(A_1)+\mathrm{Sp}(A_2)$ gibt es also zu $c>0$ einen Vektor $h=h_c^1\otimes h_\delta^2\in H$, daß

$$\big(E(\alpha+\beta+c)(h_c^1\otimes h_\delta^1)\,|\,(h_c^1\otimes h_\delta^2)\big)-\big(E(\alpha+\beta)(h_c^1\otimes h_\delta^2)\,|\,h_c^1\otimes h_\delta^2\big)>0,$$

was eben die Zugehörigkeit von $\alpha+\beta$ zu $\mathrm{Sp}(B)$ bedeutet.

Auf diese Weise haben wir als Hauptergebnis dieses Paragraphen den

Satz 2.4. *Es sei B die Berezanskij-Fortsetzung des Operators $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$. Dann ist das Spektrum von B gleich der algebraischen Summe der Spektra von A_1 und A_2*:

$$\mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(A_1)+\mathrm{Sp}(A_2).$$

3. Differenzierte Spektralkerne

Es seien Φ_i, $i=1,2$, nukleare Räume. Eine 2-Form θ auf dem Produkt $\Phi_1\times\Phi_2$ heißt *Kern* falls sie: 1° separat stetig, 2° linear oder antylinear bezüglich jedes Argumentes ist.

Ein Kern θ auf $\Phi_1\times\Phi_2$ ist stetig, wenn solche stetige Halbnormen $\|\ \|_{p_1}$, bzw. $\|\ \|_{q_2}$ auf Φ_1 bzw. Φ_2 und ein solches $M>0$ existieren, daß

$$(3.1)\qquad |\theta(\varphi_1,\varphi_2)|\leqslant M\|\varphi_1\|_{p_1}\|\varphi_2\|_{q_2}\quad \text{für}\quad \varphi_1\in\Phi_1,\varphi_2\in\Phi_2$$

gilt. Man erhält nun sofort

KOROLLAR 3.1. *Es sei θ ein stetiger Kern auf $\Phi_1\times\Phi_2$; $\|\ \|_{p_1}$, $\|\ \|_{q_2}$ seien solche stetige Halbnormen, daß* (3.1) *gilt. Falls $\|\varphi_n-\varphi\|_{p_1}$, $\|\psi_n-\psi\|_{q_2}\to 0$ für $n,m\to\infty$, dann gilt*

$$(3.2)\qquad \lim_{n,m}\theta(\varphi_n,\psi_m)=\theta(\varphi,\psi).$$

Beweis. Aus (3.1) folgt

$$|\theta(\varphi_n,\varphi_m)-\theta(\varphi,\psi)|\leqslant|\theta(\varphi_n-\varphi,\psi_m)|+|\theta(\varphi,\psi_m-\psi)|$$
$$\leqslant M(\|\varphi_n-\varphi\|_{p_1}\|\psi_m\|_{q_2}+\|\varphi\|_{p_1}\|\psi_m-\psi\|_{q_2})\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

Es seien θ^i stetige Kerne auf $\Phi_i\times\Phi_i$, $i=1,2$; $\theta^1\otimes\theta^2$ sei Tensorprodukt dieser Kerne, also — eine solche 2-Form auf $(\Phi_1\otimes\Phi_2)\times(\Phi_1\otimes\Phi_2)$, daß

$$(\theta^1\otimes\theta^2)\Big(\sum_i\varphi_i^1\otimes\varphi_i^2,\ \sum_j\psi_j^1\otimes\psi_j^2\Big)=\sum_{ij}\theta^1(\varphi_j^1,\psi_j^1)\,\theta^2(\varphi_i^2,\psi_j^2)$$

für $\varphi_i^k,\psi_j^k\in\Phi_k$, $k=1,2$, gilt. Wir beweisen jetzt folgendes

LEMMA 3.1. *Falls θ^i stetige Kerne auf $\Phi_i\times\Phi_i$, $i=1,2$, sind, dann ist $\theta^1\otimes\theta^2$ stetig auf $(\Phi_1\otimes\Phi_2)\times(\Phi_1\otimes\Phi_2)$, genauer es gibt solche stetige Halbnormen $\|\ \|_p$, $\|\ \|_q$ auf $\Phi_1\otimes\Phi_2$, und $M>0$, daß*

$$(3.3)\qquad |(\theta^1\otimes\theta^2)(\varphi,\psi)|\leqslant M\|\varphi\|_p\|\psi\|_q\quad \text{für}\quad \varphi,\psi\in\Phi_1\otimes\Phi_2.$$

Beweis. Aus (3.2) und (3.1) erhalten wir für $\varphi\in\sum\varphi_i^1\otimes\varphi^2$, $\psi\in\sum\psi_j^1\otimes\psi_j^2\in\Phi_1\otimes\Phi_2$:

$$(3.4)\qquad |(\theta^1\otimes\theta^2)(\varphi,\psi)|\leqslant\sum_{i,j}M_1\|\varphi_i^1\|_{p_1}\|\psi_j^1\|_{q_1}M_2\|\varphi_i^2\|_{p_2}\|\psi_j^2\|_{q_2}$$
$$\leqslant M_1M_2\Big(\sum_i\|\varphi_i^1\|_{p_1}\|\varphi_i^2\|_{p_2}\Big)\sum_j\|\psi_j^1\|_{q_1}\|\psi_j^2\|_{q_2}.$$

Aber (3.4) gilt für jede Darstellung von φ und ψ, daher

$$|(\theta^1\otimes\theta^2)(\varphi,\psi)|\leqslant M_1M_2\inf\Big(\sum_i\|\varphi_i^1\|_{p_1}\|\varphi_i^2\|_{p_2}\Big)\inf\Big(\sum_j\|\psi_j^1\|_{q_1}\|\psi_j^2\|_{q_2}\Big)$$
$$\leqslant M_1M_2\|\varphi\|_{p_1\otimes p_2}\|\psi\|_{q_1\otimes q_2}\quad (\text{vgl. } (1.3)).$$

Das vorstehende Lemma erlaubt $\theta^1\otimes\theta^2$ auf $(\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2)\times(\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2)$ durch Stetigkeit fortzusetzen:

$$(3.2')\qquad (\theta^1\otimes\theta^2)(\varphi,\psi)\overset{\mathrm{df}}{=}\lim_{n,m}(\theta^1\otimes\theta^2)(\varphi_n,\psi_n),$$

wobei $\varphi=\lim\varphi_n$, $\psi=\lim\psi_m$, wo $\varphi_n,\psi_m\in\Phi_1\otimes\Phi_2$.

Wir führen jetzt die Definition der Spektralkerne und der differenzierter Spektralkerne an.

Definition. Es sei $A=\int\lambda dE(\lambda)$ ein s. a. Operator in einem Hilbertschen Raume H; *Spektralkerne des Operators A* heißen solche Kerne Θ_λ, daß $\Theta_\lambda(\varphi,\psi)=(E(\lambda)\varphi|\psi)$, wo $\varphi,\psi\in\Phi$ und Φ ein Nuklearer Unterraum von H ist, der in H dicht ist und dessen Topologie feiner als die von H induzierte relative Topologie ist (vgl. die Einführung).

Aus der Stetigkeit der Einbettung $\Phi\to H$ folgt, daß Θ_λ ein Hermitesch, linear bezüglich des ersten — und antilinear bezüglich des zweiten Argumentes — und stetiger Kern ist:

$$|\Theta_\lambda(\varphi,\psi)|=|(E(\lambda)\varphi|\psi)|\leqslant M^2\|\varphi\|_{p_1}\|\psi\|_{p_2}.$$

Es gilt der folgende — im wesentlichen schon in [5] enthaltene

SATZ 3.1. *Es sei A ein s. a. Operator in H, σ ein A-Spektralmaß; dann gibt es eine Schar $t\to\theta_t$ der Kerne auf $\Phi\times\Phi$, daß Spektralkerne des Operators A*

$$(3.5)\qquad \Theta_\lambda=\int_{-\infty}^{\lambda}\theta(t)\,d\sigma(t)\quad (\textit{schwaches Integral}).$$

Beweis. Wie in [5] bewiesen wurde ist die lineare Abbildung

$$(3.6)\qquad \Phi\ni\varphi\to\hat{\varphi}(t)\in\hat{H}(t)$$

nuklear — also stetig — und

$$(3.7)\qquad (E(\lambda)\varphi|\psi)=\int_{-\infty}^{\lambda}(\hat{\varphi}(t)|\hat{\psi}(t))_t\,d\sigma(t),\qquad \varphi,\psi\in\Phi.$$

Aus der Stetigket von (3.2) folgt, daß die 2-Formen

$$(3.8)\qquad (\varphi,\psi)\to\theta_t(t;\varphi,\psi)\overset{\mathrm{df}}{=}(\hat{\varphi}(t)|\hat{\psi}(t))_t\in C^1$$

Hermitesche Kerne sind.

Aus (3.7) und (3.8) folgt also die Behauptung.

Definition. Die in (3.8) definierte Kerne $\theta(t)$ heißen *differenzierte A-Spektralkerne.*

Wir beweisen jetzt ein nützliches

LEMMA 3.2. *Es seien $A_i : E_i \to F_i$, $i = 1, 2$, lineare stetige Abbildungen der l. k. Räume; so ist $\overline{A_1 \otimes A_2} : E_1 \hat{\otimes} E_2 \to F_1 \otimes F_2$ stetig.*

Beweis. Aus der Definition des projektiven Topologie in $E_1 \otimes E_2$ und in $F_1 \otimes F_2$ folgt, daß

$$A_1 \otimes A_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$

stetig ist bei projektiven Topologien. Daher bildet auch die Abschliessung $\overline{A_1 \otimes A_2}$ den Raum $E_1 \hat{\otimes} E_2$ stetig in $F_1 \hat{\otimes} F_2$ ab.

Grundlage aller folgender Untersuchungen der Eigenfunktionale und Eigenkerne bildet ein Satz von K. Maurin (vgl. [5]) den wir hier kurz in der uns bequemen Form wiedergeben:

SATZ 3.2. *Es sei $\Phi \subseteq H \subset \Phi'$, $\hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda) d\mu(\lambda)$ ein direktes Integral der Hilbertschen Räume $\hat{H}(\lambda)$ mit den Skalarprodukten $(\,|\,)_\lambda$ und $F : H \to \hat{H}$ eine Λ-Fouriertransformation. Dann ist die Abbildung $F(\lambda) : \Phi \to \hat{H}(\lambda)$*

$$(3.9) \qquad \Phi \ni \varphi \to \hat{\varphi}(\lambda) = F(\lambda)\varphi \in \hat{H}(\lambda)$$

stetig, also nuklear.

Es gibt sogar eine positive Funktion $C(\cdot) \in L^2(\mu)$, daß für μ-f. a. $\lambda \in \Lambda$

$$(3.10) \qquad \|\hat{\varphi}(\lambda)\|_\lambda \leqslant C(\lambda)\|\varphi\|_p,$$

also $|\theta(\lambda)(\varphi, \psi)| \leqslant C^2(\lambda)\|\varphi\|_p\|\psi\|_p$ für eine geeignete Halbnorm $\|\;\|_p$ gilt; d. h. die Kerne $\theta(\lambda)$ sind stetig.

Beweis. Da $F : H \to \hat{H}$ unitar ist und die identische Einbettung $i : \Phi \to H$ nuklear ist, ist $i \circ F$ — nuklear, d. h.

$$(3.11) \qquad \Phi \ni \varphi \to \hat{\varphi} = \sum_k \langle \varphi, \varphi_k' \rangle \hat{h}_k \in \hat{H}, \quad \text{wo} \quad \hat{h}_k \in \hat{H},\ \varphi_k' \in \Phi',$$

wobei die Reihe

$$(3.12) \qquad \sum_k \|\varphi_k'\|_{-p}\|\hat{h}_k\| < \infty$$

für gewisses p, wo

$$(3.13) \qquad \|\varphi'\|_{-p} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} |\langle \varphi, \varphi' \rangle|.$$

Normieren wir jetzt die $\hat{h}_k : \|\hat{h}_k\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, dann haben wir also wegen (3.12)

$$(3.14) \qquad \sum_k \|\varphi_k'\|_{-p} = \sum \|\varphi_k'\|_{-p}\|\hat{h}_k\| < \infty.$$

Aus (3.14) und dem Satz von Fubini folgt

$$\int \sum_k \|\varphi'\|_{-p}\|\hat{h}_k(\lambda)\|_\lambda^2 d\mu(\lambda),$$

d. h. die Funktion

$$(3.15) \qquad \lambda \to (C_1(\lambda))^2 = \sum_k \|\varphi_k'\|_{-p}\|\hat{h}_k(\lambda)\|_\lambda^2 < \infty \quad \text{für} \quad \mu\text{-f. a. } \lambda$$

endlich und

$$(3.16) \qquad \int (C_1(\lambda))^2 d\mu(\lambda) < \infty.$$

Aus (3.13) - (3.15) und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\|\hat{\varphi}(\lambda)\|_\lambda^2 = \Big(\sum_k |\langle \varphi, \varphi_k' \rangle| \, \|\hat{h}_k(\lambda)\|_\lambda\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_k \|\varphi\|_p \|\varphi_k'\|_{-p}\|\hat{h}_k(\lambda)\|_\lambda\Big)^2$$
$$= \|\varphi\|_p^2 \Big(\sum_k \big(\|\varphi_k'\|_{-p}^{1/2}\|\hat{h}_k(\lambda)\|_\lambda\big)\|\varphi_k'\|_{-p}^{1/2}\Big)^2$$
$$\leqslant \|\varphi_p\|^p \sum_k \|\varphi_k'\|_{-p}\|\hat{h}(\lambda)\|_\lambda^2 \sum_k \|\varphi_k'\|_{-p} \leqslant (C(\lambda)\|\varphi\|_p)^2,$$

d. h. $\|\hat{\varphi}(\lambda)\|_\gamma \leqslant C(\lambda)\|\varphi\|_p$, wo $C(\lambda) = \sum \|\varphi_k'\|_{-p} \cdot C_1(\lambda)$ quadratisch μ-integrierbar ist.

Bemerkung. Es ist oft zweckmäßig die Räume $\hat{H}(\lambda)$ als Hilbertsche Folgenräume zu verstehen, d. h. $\hat{\varphi}(\lambda) = (\hat{\varphi}_i(\lambda))$, $i = 1, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda) = N(\lambda)$.

Dann folgt aus (3.10), daß

$$(3.17) \qquad \hat{\varphi}_i(\lambda) = \langle \varphi, e_i(\lambda) \rangle, \quad \text{wo} \quad e_i(\lambda) \in \Phi'.$$

Da $A : \Phi \to \Phi$ stetig ist, hat man $(A\varphi)_i(\lambda) = \langle A\varphi, e_i(\lambda) \rangle = \lambda \langle \varphi, e_i(\lambda) \rangle$, d. h.

$$(3.18) \qquad A' e_i(\lambda) = \lambda e_i(\lambda), \quad i = 1, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda).$$

Die Funktionale $e_i(\lambda)$ sind also Eigenfunktionale des Operators A', oder — wie man es ausdrückt — verallgemeinerte Eigenelemente des Operators A, die dem $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ zugeordnet sind. Es ist vorteilhaft auf den Vektoren $e_i(\lambda)$, $i = 1, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda)$, einen dem $\hat{H}(\lambda)$ isomorphen Hilbertschen Raum $H(\lambda)$ aufzuspannen, wobei jetzt $e_i(\lambda)$ als orthonormale Basis des Raumes $H(\lambda) \subset \Phi'$ fungieren sollen.

Der Raum $H(\lambda)$ soll in folgendem der — zu $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ zugeordnete — *(verallgemeinerte) Eigenraum* heißen und seine Elemente — *verallgemeinerte Eigenvektore von* A:

$$\Phi' \supset H = \int_{\mathrm{Sp}(A)} H(\lambda) d\mu(\lambda), \quad H(\lambda) \subset \Phi'.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir differenzierte Spektralkerne $\theta_t = \theta(t)$ des s. a. Operators A durch die verallgemeinerte Eigenvektoren darstellen:

SATZ 3.3. *Es sei $\theta(t)$, $t \in \mathrm{Sp}(A)$, ein differenzierter A-Spektralkern; dann hat man für beliebige $\varphi, \psi \in \Phi$*

$$\theta(t;\varphi,\psi) = \langle \varphi\otimes\psi, \sum_{i=1}^{N(t)} e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle, \tag{3.19}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{N(t)} e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t) \in (\Phi\hat{\otimes}\Phi). \tag{3.20}$$

Beweis. Wir haben

$$\theta(t;\varphi,\psi) = (\hat{\varphi}|\hat{\psi})_t = \sum_{i=1}^{N(t)} \langle\varphi, e_i(t)\rangle\overline{\langle\psi, e_i(t)\rangle} \tag{3.20'}$$

$$= \sum_{i=1}^{N(t)} \langle\varphi, e_i(t)\rangle\langle\psi, \bar{e}_i(t)\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle\varphi\otimes\psi, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle.$$

Die Formel (3.20) folgt einfach aus

LEMMA 3.3. *Es seien $\Phi_i \subset H_i \subset \Phi_i'$, A_i ein s. a. Operator in H_i, $\int \hat{H}_i(\lambda_i)\,d\mu_i(\lambda_i)$ ein A_i-direktes Integral, $F_i(\lambda_i)\colon \Phi_i \to \hat{H}_i(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \mathrm{Sp}(A_i)$, die durch (3.9) definierte nukleare Abbildung. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{N_1(\lambda_1)}\sum_{l=1}^{N_2(\lambda_2)} |\langle\varphi, e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\rangle| < \infty \tag{3.21}$$

für $\varphi\in\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$, wobei $A_i' e_k^i(\lambda_i) = \lambda_i\cdot e_k^i(\lambda_i)$.

Beweis. Aus der Nuklearität von $\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$ und Lemma (3.2) folgt, daß die Abbildung

$$F_1(\lambda_1)\otimes F_2(\lambda)\colon \Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2 \to H_1(\lambda_1)\overline{\otimes}H_2(\lambda_2)$$

nuklear ist, daher hat man, da $\big(e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\big)$ v. o. s. in $\hat{H}_1(\lambda_1)\overline{\otimes}\hat{H}_2(\lambda_2)$ ist,

$$\big(F_1(\lambda_1)\otimes F_2(\lambda_2)\big)\varphi = \sum_{k,l}\langle\varphi, e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\rangle\big(e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\big),$$

dabei ist für eine Halbnorm $\|\ \|_p$ in $\Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$

$$\sum_{k,l}\|e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\|_{-p} < \infty, \tag{3.22}$$

daher

$$\sum_{k,l}|\langle\varphi, e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\rangle| \leqslant \sum\|\varphi\|_p\|e_k^1(\lambda_1)\otimes e_l^2(\lambda_2)\|_{-p} < \infty,$$

w. z. b. w.

Jetzt können wir den Beweis von (3.20) zum Abschluß bringen. Wegen der schwachen Vollständigkeit von $(\Phi\hat{\otimes}\Phi)'$ genügt es zu zeigen, daß für jedes $\varphi\in\Phi\hat{\otimes}\Phi$ die Reihe

$$\sum_{i=1}^{N(t)}\langle\varphi, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle$$

konvergent ist.

Wir setzen $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$ im Lemma (3.3). Es sei $\|\ \|_p$ eine solche Halbnorm in $\Phi\hat{\otimes}\Phi$, daß (3.22) gilt. Es sei $\varphi\in\Phi\hat{\otimes}\Phi$ und (φ_n) eine Folge der Elementen aus $\Phi\otimes\Phi$, für die

$$\|\varphi-\varphi_n\|_p \to 0, \quad n\to\infty, \tag{$*$}$$

gilt. Es gibt also ein solches $M > 0$, daß $\|\varphi_n\|_p < M$ für alle n. Man hat also

$$|\langle\varphi_n, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle| \leqslant \|\varphi_n\|_p\|e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\|_{-p} \leqslant M\|e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\|_{-p}. \tag{3.23}$$

Aus (3.22) und (3.23) folgt also

$$\Big|\sum_{i=1}^{N(t)}\langle\varphi_n, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{N(t)} M\|e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\|_{-p} < \infty. \tag{3.24}$$

Da aber aus

$$|\langle\varphi_n, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle - \langle\varphi, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle| \leqslant \|\varphi_n-\varphi\|_p C$$

und aus $(*)$ für jedes $i = 1, 2, \ldots$

$$\lim_n\langle\varphi_n, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle = \langle\varphi, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle \tag{$**$}$$

folgt, sind in (3.23), (3.24) und $(**)$ die Voraussetzungen des Satzes von Lebesgue enthalten. Es gilt also für jedes $\varphi\in\Phi\hat{\otimes}\Phi$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N(t)}\langle\varphi_n, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle = \sum_{i=1}^{N(t)}\lim_{n\to\infty}\langle\varphi_n, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{N(t)}\langle\varphi, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle,$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{N(t)}|\langle\varphi, e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_p\sum_{i=1}^{N(t)}\|e_i(t)\otimes\bar{e}_i(t)\|_{-p} < \infty.$$

Der Satz (3.2) ist also hiermit bewiesen.

Aus Satz (3.2) folgt das

LEMMA 3.4. *Es seien*

$$\Phi_i \subset H \subset \Phi_i', \quad \hat{H}_i = \int_{\Lambda_i} \hat{H}_i(\lambda_i)\, d\sigma_i(\lambda_i), \quad i = 1, 2,$$

und $F_i: \Phi_i \to \hat{H}_i$ *die* A_i*-Fouriertransformation von welchen der Satz* (3.2) *handelt. Die nuklearen Abbildungen* $F_i(\lambda_i): \Phi_i \to H_i(\lambda_i)$ *induzieren mit*

$$\hat{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \big(F_1(\lambda_1) \hat{\otimes} F_2(\lambda_2)\big)\hat{\varphi} \in H_1(\lambda_1) \overline{\otimes} H_2(\lambda_2)$$

eine Abbildung

$$F_1(\lambda_1) \otimes F_2(\lambda_2): \Phi \hat{\otimes} \Phi \to H(\lambda_1, \lambda_2) \overset{\mathrm{df}}{=} H_1(\lambda_1) \overline{\otimes} H_2(\lambda_2).$$

Dann gibt es eine positive Funktion $C \in L^2(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$, *daß für* $\sigma_1 \otimes \sigma_2$*-f. a.* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ *gilt, für alle* $\varphi \in \Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$

$$\|\hat{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2)\|_{(\lambda_1, \lambda_2)} \leqslant C(\lambda_1, \lambda_2)\|\varphi\|_{pq} \tag{3.25}$$

für eine gewisse Halbnorm $\| \|_{pq}$ *in* $\Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$. *In* (3.25) *ist (wegen Nuklearität von* $\Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$*) die Nuklearität der Abbildung* $F_1(\lambda_1) \hat{\otimes} F_2(\lambda_2)$ *enthalten.*

Beweis. Wir werden im folgenden zur Abkürzung $(\hat{\varphi}_i|\hat{\psi}_i)_{\lambda_i}$ für $(\hat{\varphi}_i(\lambda_i)\hat{\psi}^i(\lambda_i))_{\lambda_i}$ und $(\hat{\varphi}|)\hat{\psi}_{\lambda_1\lambda_2}$ für $\big(\hat{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2|\hat{\psi}(\lambda_1, \lambda_2)\big)_{(\lambda_1\lambda_2)}$ schreiben. Da

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 \ni \bar{\varphi} = \sum \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2 \to \hat{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_i \hat{\varphi}_i^1(\lambda_1) \otimes \hat{\varphi}_i^2(\lambda_2) \tag{3.26}$$

erhalten wir aus (1.2) für vorstehendes φ aus $\Phi_1 \otimes \Phi_2$

$$\|\hat{\varphi}\|^2_{\lambda_1\lambda_2} = \sum_{ij} (\varphi_i^1|\varphi_j^1)_{\lambda_1}(\varphi_i^2|\varphi_j^2)_{\lambda_2} \leqslant \Big(\sum_i \|\varphi_i^1\|_{\lambda_1}\|\varphi_i^2\|_{\lambda_2}\Big)^2.$$

Aus (3.10) folgt also für fast alle (λ_1, λ_2)

$$\|\hat{\varphi}\|_{\lambda_1\lambda_2} \leqslant C_1(\lambda_1)C_2(\lambda_2)\sum_i \|\varphi_i^1\|_p\|\varphi_i^2\|_q \quad \text{wo} \quad C_k \in L^2(\sigma_k), \quad k = 1, 2. \tag{3.27}$$

Da in (3.27) die $C_k(\lambda_k)$ unabhängig von der Darstellung von φ als $\sum \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2$ sind, können wir in (3.27) zu infimum über alle solche Darstellungen von φ übergehen und erhalten

$$\|\hat{\varphi}\|_{\lambda_1\lambda_2} \leqslant C_1(\lambda_1)C_2(\lambda_2) \inf \sum_i \|\varphi^1\|_p\|\varphi_i^2\|_q^1 = C_1(\lambda_1)C_2(\lambda_2)\|\varphi\|_{pq}, \tag{3.28}$$

wo $\| \|_{pq}$ eine projektive Halbnorm in $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ ist. (vgl. (1.3)).

Wenn wir $C(\lambda_1, \lambda_2) \overset{\mathrm{df}}{=} C_1(\lambda_1)C_2(\lambda_2)$ setzen, haben wir $C \in L^2(\sigma_1 \otimes \sigma_2)$ und aus (3.28) folgt

$$\|\hat{\varphi}\|_{\lambda_1\lambda_2} \leqslant C(\lambda_1, \lambda_2)\|\varphi\|_{pq} \quad \text{für jedes} \quad \varphi \in \Phi_1 \otimes \Phi_2. \tag{3.29}$$

Aus Stetigkeitsgründen (vgl. Lemma (3.2)) gilt also (3.29) für beliebiges $\varphi \in \Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$, w. z. b. w.

Aus dem Berezanskij Lemma (2.3), dem vollständigen Spektralsatz und Lemma (3.3) folgt

LEMMA 3.5. *Für* $\varphi, \psi \in \Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2$ *gilt für jedes* $\lambda \in R^1$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} (\hat{\varphi}, \hat{\psi})_t\, d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2(s_2) \int_{-\infty}^{\lambda - s_2} (\hat{\varphi}, \hat{\psi})_{s_1 s_2}\, d\sigma_1(s_1), \tag{3.30}$$

wobei σ *ein Spektralmass der Berezanskij-Fortsetzung* B *von* $A_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes A_2$ *ist.*

Beweis. Es sei $\| \|_{pq}$ eine Halbnorm für welche (3.29) gilt. Es seien $\varphi, \psi \in \Phi_1 \otimes \Phi_2$ und $\|\varphi - \varphi_n\|_{pq}$, $\|\psi - \psi_n\|_{pq} \to 0$ für $n \to \infty$, wobei $\varphi_n, \psi_m \in \Phi_1 \otimes \Phi_2$, d. h.

$$\varphi_n = \sum_i \varphi_{ni}^1 \otimes \varphi_{ni}^2, \quad \psi_m = \sum_j \psi_{mj}^1 \otimes \psi_{mj}^2.$$

Aus Lemma (2.3), den Formeln (2.10), (2.11), der Inklusion $\Phi_1 \hat{\otimes} \Phi_2 \subset H_1 \overline{\otimes} H_2$ und dem vollständigen Spektralsatz folgt

$$(E(\lambda)\varphi|\psi) = \int_{-\infty}^{\lambda} (\hat{\varphi}|\hat{\psi})_t\, d\sigma(t) \tag{3.31}$$

$$= \lim_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2(s_2) \int_{-\infty}^{\lambda - s_2} \sum_{ij} (\hat{\varphi}_{ni}^1|\hat{\psi}_{mj}^1)_{s_1}(\hat{\varphi}_{ni}^2|\hat{\psi}_{mj}^2)_{s_2}\, d\sigma_1(s_1).$$

Aus (3.26) und (1.1) folgt, für $\varphi = \sum \varphi_i^1 \otimes \varphi_i^2$, $\psi = \sum \psi_j^1 \otimes \psi_j^2$,

$$(\hat{\varphi}|\hat{\psi})_{\lambda_1\lambda_2} = \sum_{ij} (\hat{\varphi}_i^1|\hat{\psi}_j^1)_{\lambda_1}(\hat{\varphi}_i^2|\hat{\psi}_j^2)_{\lambda_2}, \tag{3.32}$$

daher können wir (3.31) in der Form

$$\int_{-\infty}^{\lambda} (\hat{\varphi}|\hat{\psi})_t\, d\sigma(t) = \lim_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma_2(s_2) \int_{-\infty}^{\lambda - s_2} (\hat{\varphi}_n|\hat{\psi}_m)_{s_1 s_2}\, d\sigma_1(s_1) \tag{3.31'}$$

schreiben. Aus der Stetigkeit des Skalarproduktes und aus (3.29) folgt für f. a. (s_1, s_2)

$$\lim_{n,m} (\hat{\varphi}_n|\hat{\psi}_m)_{s_1 s_2} = (\hat{\varphi}|\hat{\psi})_{s_1 s_2}. \tag{3.33}$$

Daher haben wir wegen Lemma (3.4)

$$|(\hat{\varphi}_n|\hat{\psi}_m)_{s_1s_2}| \leqslant \|\varphi_n\|_{s_1s_2}\|\psi_m\|_{s_1s_2} \leqslant C(s_1, s_2)\|\varphi_n\|_{pq}\|\psi_m\|_{pq}. \tag{3.34}$$

Da die Folgen $\|\varphi_n\|_{pq}$, $\|\psi_m\|_{pq}$ konvergent sind, gibt es ein solches $M > 0$, daß $\|\varphi_n\|_{pq}\|\psi_m\|_{pq} < M$ für alle n, m. Daher folgt aus (3.34)

$$|(\hat{\varphi}_n|\hat{\psi}_m)_{s_1s_2}| \leqslant C^2(s_1, s_2)\cdot M^2.$$

Da $C \in L^2(\sigma_1\otimes\sigma_2)$ und da $(\hat{\varphi}_n|\hat{\psi}_m)_{s_1s_2}$ für fast alle (s_1, s_2) konvergent ist, können wir auf die rechte Seite von (3.31′) den Lebesgue Satz anwenden. Wegen (3.33) erhalten wir also (3.31).

Jetzt ergibt sich mühelos das folgende Korollar zu Lemma (3.5):

KOROLLAR 3.2. *Es seien $\theta^i(s_i; \varphi^i, \psi^i)$ differenzierte Spektralkerne des Operators A_i, $i = 1, 2$, $\theta(s; \varphi, \psi)$ — differenzierter Kern der Berezanskij Fortsetzung des Operators $A_1\otimes 1_2 + 1_1\otimes A_2$. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\lambda}\theta(s; \varphi, \psi)\,d\sigma(s) = \int_{-\infty}^{\infty}d\sigma_2(s_2)\int_{-\infty}^{\lambda-s_2}\big(\theta^1(s_1\otimes\theta^2(s_2)\big)(\varphi, \psi)\,d\sigma_1(s_1). \tag{3.35}$$

Beweis. Aus der Definition des Spektralkernes (3.8), (3.2) und (1.1) folgt für $\varphi = \sum \varphi_i^1\otimes\varphi_i^2$, $\psi = \sum \psi_j^1\otimes\psi_j^2$

$$\begin{aligned}\big(\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)\big)\Big(\sum\varphi_i^1\otimes\varphi_i^2, \sum\psi_j^1\otimes\psi_j^2\Big) &= \sum_{ij}\theta^1(s_1)(\varphi_i^1, \psi_j^1)\,\theta^2(s_2)(\varphi_i^2, \psi_j^2)\\ &= \sum_{ij}(\hat{\varphi}_i^1|\hat{\psi}_j^1)_{s_1}(\hat{\varphi}_i^2|\hat{\psi}_j^2)_{s_2} = (\hat{\varphi}|\hat{\psi})_{s_1s_2}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Aus Stetigkeitsgründen (3.2′) folgt daraus für $\varphi = \lim\varphi_n$, $\psi = \lim\psi_m \in \Phi_1\hat{\otimes}\Phi_2$, wo $\varphi_n, \psi_m \in \Phi_1\otimes\Phi_2$,

$$\big(\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)\big)(\varphi, \psi) = \lim_{n,m}\big(\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)\big)(\varphi_n, \psi_m) = (\hat{\varphi}|\hat{\psi})_{s_1s_2}. \tag{3.36′}$$

Bemerkung. Wir haben sogar bewiesen, daß für $\varphi, \psi \in \Phi_1\otimes\Phi_2$ die Funktion $(s_1, s_2) \to \big(\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)\big)(\varphi, \psi)$ — $\sigma_1\otimes\sigma_2$ — integrierbar ist.

Jetzt stellen wir einige Begriffe und Ergebnisse aus der Integrationstheorie Radonscher Maße zusammen, die im folgenden benötigt werden.

Bilder von Maßen. Es sei $P: X \to Y$ eine stetige Abbildung eines lokal-kompakten Raumes X in einen lokal-kompakten Raum Y. Es sei μ ein endliches Maß auf X.

Dann ist $P\mu$ ein (endliches) Maß auf Y erklärt durch die Identität:

$$\int f(y)\,d(P\mu)(y) = \int (f\circ P)\,d\mu, \quad f \in C_0(Y).$$

Faltung der Maßen. Es sei G eine lokal-kompakte Gruppe und σ_1, σ_2 endliche Maßen auf G. Dann ist $\mu = \sigma_1\otimes\sigma_2$ (Produktmaß auf $G\times G$) ein endliches Maß auf $X = G\times G$ und $P: (x, y) \to xy \in G = Y$ ist eine stetige Abbildung. In diesem Falle heißt das Bild $P(\sigma_1\otimes\sigma_2)$ des Maßes $\sigma_1\otimes\sigma_2$ die *Faltung der Maßen* σ_1, σ_2 und wird mit $\sigma_1 * \sigma_2$ bezeichnet. Es gilt also die Gleichung

$$\int f(v)\,d(\sigma_1*\sigma_2) = \iint f(xy)\,d\sigma_1(x)\,d\sigma_2(y), \quad f \in C_0(G).$$

Im folgenden werden wir bloß die Faltung auf der Geraden $G = R^1$ benutzen, dann schreiben wir $x+y$ statt xy.

Desintegration des Maßes. Es gilt ein wichtiger Theorem über Desintegration der Maßen (vgl. Bourbaki [2]), den wir hier aussprechen als

LEMMA 3.6. *Es seien T, B lokal-kompakte Räume mit abzählbaren Basis (l. k. separable Räume). Es sei μ ein endliches Maß auf T und $P: T \to B$ stetig. Es sei $v = P\mu$ das Bildmaß auf B. Dann gibt es eine Schar der Maßen $B \ni b \to \sigma_b \in M(T)$ — der Maßen auf T — mit den Eigenschaften*

1° $\sigma_b \neq 0$ *für* $b \in P(T)$,

2° *der Träger von* σ_b *ist in* $P^{-1}(b)$ *enthalten,*

3° *für jedes* $h \in L^1(\mu)$ *gilt*

$$\int_T h(t)\,d\mu(t) = \int_B d(P\mu)(b)\int_{P^{-1}(b)}h(t)\,d\sigma_b(t). \tag{3.37}$$

Aus dem Bourbaki-Satz folgt augenblicklich das folgende

LEMMA 3.7. *Es seien σ_i, $i = 1, 2$, endliche Maße auf R^1 und g eine $\sigma_1\otimes\sigma_2$-integrierbare Funktion auf der Ebene $R^2: g \in L^1(\sigma_1\otimes\sigma_2)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma_2(s_2)\int_{-\infty}^{\lambda-s_2}g(s_1, s_2)\,d\sigma_1(s_1) &= \int_{s_1+s_2\leqslant\lambda}g(s_1, s_2)\,d\sigma_1(s_1)\,d\sigma_2(s_2)\\ &= \int_{-\infty}^{\lambda}d(\sigma_1\otimes\sigma_2)(b)\int_{s_1+s_2=b}g(s_1, s_2)\,d\sigma_b(s_1, s_2),\end{aligned} \tag{3.38}$$

wo σ_b, $b \in R^1$ eine Schar der (endlichen) Maßen auf R^2 ist.

Beweis. Wir setzen im Lemma (3.6) $T = R^2$ $B = R^1$,

$$P(s_1, s_2) = s_1 + s_2; \quad h = \chi_\lambda g,$$

wo

$$\chi_\lambda(s_1, s_2) = \begin{cases}1 & \text{für} \quad s_1+s_2 \leqslant \lambda,\\ 0 & \text{für} \quad s_1+s_2 > \lambda.\end{cases}$$

Aus (3.37) folgt

$$\int_{R^2} \chi_\lambda g d\sigma_1 \otimes d\sigma_2 = \int_{s_1+s_2\leqslant\lambda} g(\xi,\eta)d\sigma_1(\xi)d\sigma_2(\eta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d(\sigma_1\otimes\sigma_2)(b) \int_{s_1+s_2=b} \chi_\lambda(s_1,s_2)d\sigma_b(\xi,\eta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} d(\sigma_1 * \sigma_2)(b) \int_{s_1+s_2=b} g(s_1,s_2)d\sigma_b(s_1,s_2).$$

Satz 3.4. *Es sei A_i s. a. Operator in H_i; σ_i — ein Spektralmaß von A_i, $i=1,2$. Dann ist $\sigma_1 * \sigma_2$ absolutstetig in bezug auf das Spektralmaß δ der Berezanskij - Fortsetzung von B von $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$.*

Beweis. Es sei h^i ein solcher Vektor aus H_i, daß $d\big(E_i(\lambda_i)h^i|h^i\big)_i = d\sigma_i(\lambda_i)$, $i=1,2$. Es sei $E(t)$ die Spektralschar von B, dann hat man aus (2.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(t-s)d\sigma_2(s) = (\sigma_1 * \sigma_2)(t) = (E(t)h^1\otimes h^2|h^1\otimes h^2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \|(h^1\otimes h^2)^\wedge\|_\lambda^2 d\sigma(\lambda).$$

Es gilt also für $\lambda_2>\lambda_1$

$$\sigma_1 * \sigma_2\{[\lambda_1,\lambda_2]\} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \|(h^1\otimes h^2)^\wedge\|_t d\sigma(t).$$

Da der Körper der $S.\,L.$ - meßbaren Mengen auf R^1 durch Intervalle erzeugt ist, folgt für jede Borel-Menge $G\subset R^1$

$$(\sigma_1 * \sigma_2)(G) = \int_G \|(h^1\otimes h^2)^\wedge(t)\|_t^2 d\sigma(t),$$

d. h. das Maß $\sigma_1 * \sigma_2$ ist absolutstetig bezüglich σ.

Jetz können wir das Hauptergebnis dieses Abschnittes beweisen:

Satz 3.5 (II Hauptsatz). *Es sei A_i s. a. Operator in H_i, σ_i — das Spektralmaß von A_i, θ^i ein differenzierter Spektralkern von A_i, $i=1,2$. Es sei B die Berezanskij - Fortsetzung von $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$, σ — ein Spektralmaß von B, θ der B - Spektralkern. Dann gilt für σ - f. a. λ:*

$$\theta(\lambda) = \int \theta^1(\lambda_1)\otimes\theta^2(\lambda_2)d\tilde\sigma_\lambda(\lambda_1,\lambda_2),$$

wobei der Träger des Maßes $\tilde\sigma_\lambda$ in der Menge $\{\lambda_1+\lambda_2=\lambda:\ \lambda_i\in \mathrm{Sp}(A_i),\ i=1,2\}$ enthalten ist.

Beweis. Es seien $\Phi_i\subset H_i\subset\Phi_i'$, $i=1,2$. Dann haben wir fü $\varphi,\psi\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$ aus (3.35), (3.38) und Satz (3.4)

$$\int_{-\infty}^{\lambda}\theta(t;\varphi,\psi)d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\lambda} g(b)d\sigma(b)\int_{s_1+s_2=b}\big(\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)\big)(\varphi,\psi)d\sigma_b(s_1,s_2),$$

wobei $g\in L^1(\sigma)$. Da die obige Gleichung für σ-f. a. λ gilt, können wir, wenn wir $d\tilde\sigma_\lambda = g(\lambda)d\sigma_\lambda$ setzen, schreiben wir

$$(3.39)\qquad \theta(\lambda;\varphi,\psi) = \int\big(\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)\big)(\varphi,\ \psi)d\tilde\sigma_\lambda(s_1,s_2),\qquad \varphi,\psi\in\Phi.$$

Da der Träger des Maßes $\sigma_1\otimes\sigma_2$ gleich $\mathrm{Sp}(A_1)\times\mathrm{Sp}(A_2)$ ist, ist der Träger des Maßes $\tilde\sigma_\lambda(s_1,s_2)$ in der Menge $\{s_1+s_2=\lambda:\ s_i\in\mathrm{Sp}(A_i),\ i=1,2\}$ enthalten.

Da (3.29) für alle $\varphi,\psi\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$ gilt, erhalten wir wegen der Definition des schwachen Integrals

$$(3.40)\qquad \theta(\lambda,\cdot,\cdot) = \int\theta^1(s_1)\otimes\theta^2(s_2)d\tilde\sigma_\lambda(as_1,s_2),$$

w. z. b. w.

4. Darstellung der Eigenfunktionale von $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$ durch Eigenfunktionale der Operatoren A_1 und A_2

Es seien: A_i selbstadjungierter Operator in H_i, $e_k^i(t_i)$ — Eigenfunktionale von A_i, $i=1,2$ (vgl. Bemerkung zu Satz 3.2). In diesem Paragraphen zeigen wir wie man Eigenfunktionale $e_i(t)$ des Operators $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$ aus den Eigenfunktionalen der Operatoren A_1, A_2 aufbauen kann. Zunächst stellen wir den Kern $\theta^1(t_1)\otimes\theta^2(t_2)$ durch die Eigenfunktionale $e_k^1(t_1)$, $e_l^2(t_2)$ dar. Wir beweisen jetzt das folgende

Lemma 4.1. *Es bedeute $N_i(t_i) = \dim\hat H_i(t_i)$, $i=1,2$, dann gilt für alle $\varphi,\psi\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$*

$$\theta^1(t_1)\otimes\theta^2(t_2)(\varphi,\psi) = \sum_{k=1}^{N_1(t_1)}\sum_{l=1}^{N_2(t_2)}\langle\varphi, e_k^1(t_1)\otimes e^2(t_2)\rangle\overline{\langle\psi, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle}.$$

Beweis. Es sei $\|\ \|_p$ eine solche Halbnorm in $\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$, daß

$$K = \sum_{k}^{N_1(t_1)}\sum_{l}^{N_2(t_2)}\|e_k^1(t_1)\hat\otimes e_l^2(t_2)\|_{-p} < \infty$$

(vgl. (3.22)).

Es seien $\varphi,\psi\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$ und $\|\varphi_n-\varphi\|_p$, $\|\psi_n-\psi\|_p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, wobei $\varphi_n,\psi_n\in\Phi_1\otimes\Phi_2$. Daher gibt es ein solches $M>0$, daß

$$\|\varphi_n\|_p,\ \|\psi_n\|_p < M \qquad \text{für}\quad n=1,2,\ldots$$

Da

$$(4.1)\qquad |\langle\varphi_n, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle\langle\psi_m, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle| \leqslant \|\varphi_n\|_p\|\psi_m\|_p\|e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\|_{-p}^2$$

folglich gilt

$$\Big|\sum_{k=1}^{N_1(t_1)}\sum_{l=1}^{N_2(t_2)}\langle\varphi_n, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle\overline{\langle\psi_m, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle}\Big|$$

$$\leqslant M^2\sum_{k=1}^{N_1(t_1)}\sum_{l=1}^{N_2(t_2)}\|e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\|_{-p}^2 \leqslant M^2K < \infty .$$

Aus (4.1) und Korollar (3.1) folgt

$$(4.2)\qquad \lim_{n,m}\langle\varphi_n, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle\overline{\langle\psi_m, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle} = \langle\varphi, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle\overline{\langle\psi, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle}.$$

Da $\theta^i(t_i)$, $i=1,2$, stetig sind, gilt

$$|\theta^i(t_i)(\varphi^i,\psi^i) = |(\hat\varphi^i|\hat\psi^i)_{t_i}| \leqslant \|\hat\varphi^i\|_{t_i}\|\hat\psi^i\|_{t_2} \leqslant C_i^2(t_i)\|\varphi^i\|_{p_i}\|\psi^i\|_{p_i}, \qquad i=1,2,$$

daher bekommen wir aus Lemma (3.1), Korollar (3.1) und (3.36), (3.20′)

$$\big(\theta^1(t_1)\otimes\theta^2(t_2)\big)(\varphi,\psi) = \lim_{n,m}\sum_{k=1}^{N_1(t_1)}\sum_{l=1}^{N_2(t_2)}\langle\varphi_n, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle\overline{\langle\psi_m, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle}.$$

Hieraus und aus (4.1), (4.1′), (4.2) folgt (wegen Lebesgueschen Satz für Reihen)

$$(4.3)\qquad \big(\theta^1(t_1)\otimes\theta^2(t_2)\big)(\varphi,\psi) = \sum_{k=1}^{N_1(t_1)}\sum_{l=1}^{N_2(t_2)}\langle\varphi, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle\overline{\langle\psi, e_k^1(t_1)\otimes e_l^2(t_2)\rangle}$$

für alle $\varphi,\psi\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$.

Jetz sind wir imstande das Hauptergebnis dieses Paragraphen zu beweisen:

Hauptsatz. *Es sei A_i ein s. a. Operator in H_i, und es sei $e_{k_i}^i(\lambda_i)$, $k_i=1,2,\dots,N_i(\lambda_i)$, $\lambda_i\in\operatorname{Sp}(A_i)$, ein vollständiges System der verallgemeinerten Eigenelemente von A_i, $i=1,2$. Dann gibt es eine solche Schar $\lambda\to\tilde\sigma_\lambda$ positiver Maßen auf R^2, wobei der Trager von $\tilde\sigma_\lambda$ in der Menge $\{(\lambda_1,\lambda_2)\in R^2:\lambda_1+\lambda_2=\lambda,\ \text{wo}\ \lambda_i\in\operatorname{Sp}(A_i),\ i=1,2\}$ enthalten ist, daß Eigenfunktionale $e(\lambda)$ der Berezanskij-Forsetzung B von $A_1\otimes 1_2+1_1\otimes A_2$ sich folgendermaßen durch $e_i^1(\lambda_1)$, $e_j^2(\lambda_2)$ für σ-f. a. λ darstellen lassen:*

$$e(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\int\sum_{i=1}^{N_1(\lambda_1)}\sum_{j=1}^{N_2(\lambda_2)}\overline{\langle\psi_n, e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)\rangle}e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)\,d\tilde\sigma_\lambda(\lambda_1,\lambda_2).$$

D. h. $$H(\lambda) = \int_{\lambda_1+\gamma_2=\lambda} H(\lambda_1)\overline{\otimes} H(\lambda_2)\,d\sigma_\lambda(\lambda_1,\lambda_2).$$

(Die Reihen und das Integral sind schwach konvergent. Der Limes ist im Sinne der Konvergenz im Eigenraume $H(\lambda)$ verstanden).

Beweis. Aus den Formeln (3.39) — nach Berücksichtigung von (3.20′) und (4.3) — erhält man für $\varphi,\psi\in\Phi_1\otimes\Phi_2$

$$(4.4)\qquad \Big\langle\varphi, \sum_{i=1}^{\dim\hat H(\lambda)}\overline{\langle\psi, e_i(\lambda)\rangle}e_i(\lambda)\Big\rangle = \sum_{i=1}^{\dim\hat H(\lambda)}\langle\varphi, e_i(\lambda)\rangle\overline{\langle\psi, e_i(\lambda)\rangle}$$

$$= \int\Big\langle\varphi, \sum_{i=1}^{N_1(\lambda_1)}\sum_{j=1}^{N_2(\lambda_2)}\overline{\langle\psi, e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)\rangle}e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)\Big\rangle d\tilde\sigma_\lambda$$

für σ-f. a. λ.

Da (4.4) identisch für $\varphi\in\Phi_1\otimes\Phi_2$ gilt, erhält man aus der Definition des schwachen Integrals (in $(\Phi_1\hat\otimes\Phi_2)$)

$$(4.5)\qquad \sum_l\overline{\langle\psi, e_l(\lambda)\rangle}e_l(\lambda) = \int\sum_i\sum_j\overline{\langle\psi, e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)\rangle}e_i^1(\lambda_1)\otimes e_j^2(\lambda_2)\,d\tilde\sigma_\lambda(\lambda_1,\lambda_2).$$

Weil die Menge

$$\Big\{\sum_{l=1}^{\dim H(\lambda)}\overline{\langle\psi, e_l(\lambda)\rangle}e_l(\lambda):\ \psi\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2\Big\}$$

n $H(\lambda)$ dicht ist, gibt es zu $e(\lambda)\in H(\lambda)$ solche $\psi_n\in\Phi_1\hat\otimes\Phi_2$ $(n=1,2,\dots)$, daß

$$(4.6)\qquad e(\lambda) = \lim_n\sum_l\overline{\langle\psi_n, e_l(\lambda)\rangle}e_l(\lambda),$$

wo der Limes im Sinne der Norm in $H(\lambda)$ verstanden wird. Aus (4.5) und (4.6) folgt also die Behauptung.

Literaturnachweis

[1] Ju. M. Berezanskij, *Eigenfunktionsentwicklungen selbstadjungierter Operatoren*, Mat. Sbornik 43 (85) (1957), S. 75-126 (russisch).

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, Chap. 6, Paris 1959.

[3] H. O. Cordes, *Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen*, Math. Ann. 128 (1954/5), S. 257-289; 373-411.

[4] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[5] K. Maurin, *Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Spektraldarstellung abstrakter Kerne. Eine Verallgemeinerung der Distributionen auf Lie'schen Gruppen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. math. astr. et phys., 7 (1959), S. 471-479.

TECHNISCHE HOCHSCHULE
UNIVERSITÄT WARSZAWA

Reçu par la Rédaction le 7. 6. 1962