

- [4] S. Łojasiewicz, J. Włoka und Z. Zieleźny, *Über eine Definition des Wertes einer Distribution*, Bull. Polon. Acad. des Sc., (Cl. III. 3 (1955), p. 479-481.
- [5] L. Schwartz, *Théorie des distributions, I, II*, Paris 1950/1951.
- [6] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Am. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.
- [7] Z. Zieleźny, *Sur la définition de Łojasiewicz de la valeur d'une distribution dans un point*, Bull. Acad. Polon. des Sc., (Cl. III. 3 (1955), p. 519-520.

Reçu par la Rédaction le 10. I. 1956

## Sur un problème du calcul de probabilité (III)\*

(Mouvement d'une molécule dans l'espace)

par

S. PASZKOWSKI (Wrocław)

Cette note est un supplément à deux autres portant le même titre<sup>1)</sup>. Nous nous occupons ici d'une méthode qui permet d'analyser le mouvement d'une molécule dans l'espace  $n$ -dimensionnel sous certaines hypothèses relatives à la direction du mouvement ( $\mathcal{H}_1$ ), à des probabilités ( $\mathcal{H}_2$ ), ( $\mathcal{H}_3$ ) et une hypothèse analytique ( $\mathcal{H}_4$ ).

Le numérotage des paragraphes et des formules fait suite à celui des notes précédentes.

**3.1. Hypothèses.** La molécule se meut dans l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Nous supposons que

( $\mathcal{H}_1$ ) à chaque instant la direction du mouvement de la molécule est parallèle à l'un des axes d'un système de coordonnées cartésiennes.

Soit  $C$  un parallélépipède  $n$ -dimensionnel dont les arêtes, parallèles aux axes du système de coordonnées, ont les longueurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Nous introduisons les probabilités de certains phénomènes dans le mouvement de la molécule par rapport au parallélépipède  $C$ :

1°  $\pi_{\eta, \vartheta}(C)$  — probabilité pour que la molécule sorte du parallélépipède  $C$  dans la direction du vecteur

$$\underbrace{(0, \dots, 0, \vartheta)}_{j-1}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-j} \quad (\text{où } \vartheta^2 = 1),$$

en supposant qu'elle est entrée dans le parallélépipède  $C$  dans la direction du vecteur

$$(152) \quad \underbrace{(0, \dots, 0, \eta)}_{i-1}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n-i} \quad (\text{où } \eta^2 = 1);$$

\*) Ce travail fut présenté à la Section de Wrocław de la Société Polonaise de Mathématique le 2 décembre 1955.

<sup>1)</sup> Voir *Studia Mathematica* 15 (1955), p. 188-200 (note I), et p. 273-299 (note II).



3° aux fonctions  $r$ ,  $R$  (probabilités de l'absorption de la molécule dans le segment) correspondent les fonctions  $\pi_{k,l}$  pour  $|k| \neq |l|$ , c'est-à-dire les probabilités pour qu'il y ait changement de la direction du mouvement en une direction perpendiculaire ou bien arrêt de la molécule dans le parallélépipède.

Une différence essentielle apparaît donc au point 3°. Une autre différence consiste dans le nombre des arguments continus, les fonctions (153) en ayant  $n$  (à savoir  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).

### 3.3. Solution des équations fonctionnelles. En posant

$$p = \pi_{i,i}, \quad q = \pi_{i,-i}, \quad r = \sum_{l=-n, |l| \neq i}^n \pi_{i,l},$$

$$P = \pi_{i,-i}, \quad Q = \pi_{-i,i}, \quad R = \sum_{l=-n, |l| \neq i}^n \pi_{-i,l}$$

(où  $i = 1, 2, \dots, n$ ), en considérant  $x_i$  comme argument des fonctions  $p, q, r, P, Q, R$  et les autres arguments  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  comme paramètres et en écrivant  $x$  au lieu de  $x_i$  et  $y$  au lieu de  $x_i''$ , le système (154) devient identique au système (2)-(9) non seulement au point de vue formel, mais aussi au point de vue des hypothèses. Ainsi on peut appliquer les résultats de la note I, où (§ 1.2) l'on a donné toutes les solutions du système (2)-(9) qui sont des probabilités. Il faut cependant tenir compte du fait que, maintenant, les paramètres (14), (16) dépendent de  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ . Après avoir trouvé les fonctions  $r$  et  $R$  nous utilisons les résultats de la note II (§ 2.3, formules (71), (72), (74)-(81)); on y a démontré que ce sont toutes les solutions des équations (5) et (9) (sans les hypothèses (2) et (6)). Plus précisément, nous n'avons envisagé dans le § 2.3 que le cas  $p(0) = P(0) = 1$  (correspondant au cas I de la note I). Il est facile de compléter les solutions du § 2.3 lorsque la condition  $p(0) = P(0) = 1$  n'est pas satisfaite. Elles fournissent donc des expressions pour les fonctions  $\pi_{k,l}$  ( $|k| \neq |l|$ ). Seuls les paramètres  $\mu$  et  $M$  dans les formules (71), (72), (74)-(81) dépendent de l'indice  $l$ ;  $\mu$  et  $M$  doivent pourtant satisfaire à certaines conditions supplémentaires, provenant des relations  $0 \leq \pi_{k,l}(x) \leq 1$  et

$$r = \sum_{l=-n, |l| \neq i}^n \pi_{i,l}, \quad R = \sum_{l=-n, |l| \neq i}^n \pi_{-i,l},$$

qui doivent être vérifiées pour chaque  $x \geq 0$ .

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1956

## Sur les solutions linéairement indépendantes des équations différentielles à coefficients constants

par

J. MIKUSIŃSKI (Warszawa)

Dans un travail antérieur [2], j'ai démontré que le nombre de solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle opérationnelle

$$x^{(n)}(\lambda) + a_{n-1}x^{(n-1)}(\lambda) + \dots + a_0x(\lambda) = 0$$

ne peut surpasser le degré  $n$ . J'ai donné aussi une méthode qui permet d'établir le nombre exact de solutions linéairement indépendantes dans le cas particulier où le polynôme caractéristique correspondant à cette équation se décompose en facteurs linéaires. La démonstration s'appuyait sur des propriétés d'un déterminant qui est une généralisation du déterminant de Vandermonde.

Le but de cette note est de remplir une lacune dans le travail cité, en donnant des théorèmes généraux sur le nombre de solutions linéairement indépendantes, sans faire restriction au cas des facteurs linéaires. La méthode de démonstration est purement algébrique et concerne un espace linéaire quelconque<sup>1</sup>). Ainsi l'article peut être lu et compris sans avoir quelque idée sur le calcul opérationnel, de plus, les théorèmes sont susceptibles d'interprétations bien différentes.

1. Nos considérations concernent un espace linéaire  $\mathcal{C}$  quelconque. On suppose seulement que l'ensemble des coefficients est un corps commutatif  $\mathcal{C}$  de caractéristique 0.

Les éléments  $x_1, \dots, x_n$  de  $\mathcal{C}$  sont linéairement indépendantes lorsque l'égalité  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  ( $a_i \in \mathcal{C}$ ) entraîne  $a_1 = \dots = a_n = 0$ ; dans le cas contraire, ils sont linéairement dépendants.

On suppose qu'une opération de dérivation fait correspondre des éléments de  $\mathcal{E}$  à certains éléments de  $\mathcal{C}$  et que cette opération jouit des propriétés suivantes:

<sup>1</sup>) Pour un anneau linéaire, des théorèmes à peu près analogues ont été démontrés indépendamment, par la méthode des déterminants, par M. Kowalski dans un travail non publié encore.