Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Bekanntlich lässt sich der topologische Satz von der Invarianz des n-dimensionslen Gebietes bei eineindeutigen und stetigen Abbildungen nicht ohne weiteres auf Räume unendlich hoher Dimension übertragen. Ja — es gibt sogar lineare, eineindeutige und stetige Abbildungen des Hilbertschen Raumes in sich, die Gebiete in nirgends dichte Mengen überführen. Um also die Invarianz des Gebietes auch hier behaupten zu können, müssen wir uns auf eine engere Klasse von Abbildungen beschränken. Nun hat wohl zuerst Hilbert gezeigt, welche fundamentale Rolle den linearen, vollstetigen Abbildungen zukommt [1]). Dabei nennen wir eine nicht notwendig lineare Abbildung vollstetig, wenn sie schwachkonvergente Folgen in starkkonvergente überführt.

Wir wollen zunächst den Begriff einer schwachkonvergenten Folge präzisieren, sowie diejenigen Funktionalräume näher bestimmen, in welchen unsere Sätze gelten sollen. Es sind dies erstens vollständige, normierte, lineare Räume im Sinne des Herrn Banach [2]). Für solche Räume lässt sich der Begriff einer schwachkonvergenten Folge, wie folgt, fassen. Eine Elementenfolge $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots}$ konvergiert schwach gegen das Element x (im Zeichen $\xrightarrow{\text{schwach}}$) wenn für jedes stetige, lineare Funktional $A(x)$ [3]) die Beziehung gilt

$$\lim_{i=\infty} A(x_i) = A(x). \tag{1}$$

---

[1]) D. Hilbert: „Grundzüge einer allg. Theorie der linearen Integralgleichungen". Kap. XI, Seite 147.

[2]) St. Banach: „Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales". Fund. Math. Band III, Seite 133—181, insbesondere S. 135—136.

[3]) Eine Funktion, die jedem „Elemente" (Punkte) des Raumes eine reelle

Weiter wollen wir zu den Axiomen des Herrn Banach noch die zwei folgenden hinzufügen:

a) die in Betracht kommenden Räume besitzen eine lineare Basis $\{\mathfrak{e}_n\}_{n=1,2,\dots}$ d. h. es gilt für jedes Element x die eindeutige Entwicklung nach der Norm

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \mathfrak{e}_i \text{ (dies bedeutet } \lim_{n=\infty} \| x - \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mathfrak{e}_i \| = 0). \tag{2}$$

Hier sind $c_i(x)$ reelle Zahlen, die stetige, lineare Funktionale des x darstellen sollen — die Koeffizienten der eindeutigen Entwicklung.

b) die Räume sind schwachkompakt, dass heisst in jeder beschränkten Elementenfolge gibt es schwachkompakte Teilfolgen [4]).

Wir können jetzt für einen linearen Raum L, der allen diesen Axiomen [5]) genügt, folgenden Hauptsatz aussprechen:

Satz A. *Die Operation $U(x)$ liefere die eineindeutige* [6]) *Abbildung des im Raume L gelegenen Gebietes G auf eine andere Menge $U(G)$, die in demselben Raume gelegen ist. Ist dann die Operation*

$$U(x) - x \tag{3}$$

vollstetig, so ist auch $U(G)$ ein Gebiet.

Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei Teile, in einen topologischen und in einen aus der Theorie der Funktionalanalysis. Der topologische Teil ist eine unseren Zwecken angepasste

---

Zahl zuordnet, nenne ich ein Funktional. Handelt es sich aber um Zuordnung der Elemente eines Raumes den Elementen eines anderen Raumes, so spreche ich von einer Operation. Jede Operation liefert eine entsprechende Abbildung.

[4]) Für die beiden unter a) und b) zitierten Axiome vergl. man J. Schauder, Math. Zeitschrift, Band 26, Seite 47—65: Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. Siehe insb. S. 47—48 und S. 61.

[5]) Ich bemerke, dass die Forderung der Existenz einer Basis durch folgende, weniger einschränkende, ersetzt werden kann: Es gibt eine Folge von Elementen $\{\mathfrak{e}_i\}$ samt den zugeordneten Funktionalen $A_i(x)$ so, dass die Beziehungen gelten:

α) $A_i(\mathfrak{e}_i) = 1$; $A_i(\mathfrak{e}_k) = 0$ für $i \neq k$

β) $\|\mathfrak{e}_i\| = 1$, $\|A_i\| \leq M$ für $i = 1, 2\dots$

γ) das „biortogonale" System der $\{\mathfrak{e}_i\}$, $\{A_i\}$ ist vollständig, d. h. aus

$A_i(x) = 0$ für $i = 1, 2\dots$ fofgt $x = 0$

und aus $A(\mathfrak{e}_i) = 0$ für $i = 1, 2\dots$ folgt $A(x) \equiv 0$.

[6]) Ich betone ausdrücklich, dass $U(x)$ nicht notwendig linear sein muss.

Verallgemeinerung und Weiterentwicklung der entsprechenden Brouwer'schen Sätze und wird mittels ähnlicher Methode bewiesen [7]).

Als Konsequenz des Hauptsatzes ergibt sich ein Satz aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Es sei zu diesem Zwecke eine Funktion $f(x, y, z, p, q)$ gegeben, von der wir nur voraussetzen, dass sie im ganzen 5-dimensionalen (x, y, z, p, q) Raume stetig ist. Es sei ferner ϱ ein konstanter Kreis in der x, y Ebene. Wir betrachten eine beliebige Funktion $\psi(x, y)$, die in ϱ erklärt ist und dort mit ihrer α-ten Potenz im Lebesgue'schen Sinne integrierbar ist $(\alpha > 2)$ und eine beliebige Funktion $\varphi(s)$, die am Rande des Kreises ϱ definiert ist und Ableitungen bis zur zweiten Ordnung inklusive besitzt. Wir beweisen den

Satz B. *Voraussetzung: Für beliebige Paare $\psi(x, y)$, $\varphi(s)$ besitze die Gleichung*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \psi(x, y) \tag{4}$$

höchstens eine Lösung mit dem Randwerte $\varphi(s)$.

Behauptung: Ist die Gleichung (4) für ein gewisses Paar $\varphi_0(s), \psi_0(x, y)$ lösbar, so ist sie auch für „benachbarte" φ, ψ lösbar. Das Wort benachbart wird im Sinne der Distanzen in entsprechenden Räumen verstanden [8]).

---

[7]) L. E. I. Brouwer: „Beweis der Invarianz der Dimensionszahl". Math. Annalen, Bd 70, S. 161—165, 1911.

— „Zur Invarianz des n-dimensionalen Gebiets". Math. Annalen, Bd 72. S. 55—56, 1912.

— „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten". Math. Ann. Bd 71, S. 97—115, 1911.

— „Über Jordansche Mannigfaltigkeiten". Math. Ann. Bd 71, S. 320—327, 1911.

[8]) Ein Satz solcher Art ist meines Wissens nicht bekannt. Denn man fordert gewöhnlich, dass die sog. „Jacobische Differentialgleichung" keine „Nulllösungen" besitzt, woraus auch die Lösung der entsprechenden Gleichung für benachbarte Randwerte folgt. Vgl. z. B.: L. Lichtenstein: Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Enz. d. math. Wissensch. Bd. II_3 Heft 8 insb. S. 1324—7.

Unsere Bedingungen sind ganz anders gebaut. Es wird nur verlangt, dass wie man auch die Funktionen $\varphi(s)$, $\psi(x, y)$ wählt, die „entsprechende" Gleichung (4) höchstens eine Lösung besitzt. Weiter braucht $f(x, y, z, p$ keineswegs differenzierbar zu sein. Es genügt nur, sie als stetig vorauszusetzen.

I.

Es seien R^1, R^2, R^3 drei Räume von derselben endlichen Dimension n, die auch zusammenfallen können[9]). Sei g ein Gebiet, das im Raume R^1 gelegen ist und es werde g vermittels einer stetigen Abbildung Φ auf eine in R^2 gelegene Menge $\Phi(g) = \bar{g}$ abgebildet. Der Einfachheit halber nehmen wir an, das g ein durch ein gewisses $(n-1)$ dimensionales Polyeder P_{n-1} berandetes, konvexes Gebiet darstellt. Weiter werde $\bar{g}$ durch die stetige, nur in $\bar{g} = \Phi(g)$ erklärte Abbildung $\Psi(\bar{g})$ auf eine in R^3 gelegene Menge $\Psi(\bar{g}) = \bar{\bar{g}}$ abgebildet.

Betrachten wir die erste Abbildung etwas genauer. Dem Randpolyeder P_{n-1} entspricht das Polyederbild $\bar{P}_{n-1} = \Phi(P_{n-1})$. Ein Element (Punkt) des Raumes R^2, der nicht auf $\bar{P}_{n-1}$ liegt, besitzt in Bezug auf $\bar{P}_{n-1}$ eine wohldefinierte Ordnung (Abbildungsgrad[10]). Weiter bemerken wir, dass die zu $\bar{P}_{n-1} = \Phi(P_{n-1})$ gehörende, im Raume R^2 gelegene Komplementärmenge in Gebietskomponenten zerfällt. Alle Punkte des Raumes R^2, die zu derselben Komponente gehören, besitzen in Bezug auf $\bar{P}_{n-1}$ dieselbe Ordnung.

Sei also $\bar{\pi}$ ein festgewählter Punkt, der nicht auf $\bar{P}_{n-1} = \Phi(P_{n-1})$ liegt. Jeder Punkt, der sich mit $\bar{\pi}$ durch einen Streckenzug verbinden lässt, ohne dabei $\bar{P}_{n-1}$, zu passieren, besitzt in Bezug auf $\bar{P}_{n-1}$ dieselbe Ordnung. $\bar{\pi}$ gehöre jetzt zu $\Phi(g)$. Es gibt also einen Punkt $\pi \varepsilon g$ so, dass

$$\Phi(\pi) = \bar{\pi}; \quad \pi \varepsilon g. \tag{5}$$

Durch die zweite Abbildung geht der Punkt $\bar{\pi}$ in einen Punkt $\bar{\bar{\pi}}$

$$\bar{\bar{\pi}} = \Psi(\bar{\pi}) = \Psi[\Phi(\pi)] \tag{6}$$

über. Die den Punkt $\bar{\pi}$ enthaltende Komponente, bezw. genauer der Durchschnitt dieser Komponente mit $\Phi(g)$, geht in eine den Punkt $\bar{\bar{\pi}}$ enthaltende Menge über. — Im allgemeinen Falle kann aber auch eine andere Komponente in eine den Punkt $\bar{\bar{\pi}}$ enthaltende Menge übergehen. Wir setzen nun voraus, dass dies

[9]) Die Räume R^1, R^2, R^3 sind lineare Räume mit einer beliebigen, nicht notwendig euklidischen Norm.

[10]) Wenn ich im folgenden manchmal diese zwei Begriffe verwechslen werde, so tue ich es, weil sie — in unserem Falle — zahlenmässig dieselbe ganze Zahl ergeben. Vgl., was die Definition anbetrifft, die unter [6]) zitierten Arbeiten von Brouwer.

nicht der Fall ist und beweisen dann den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz I. *Sei*

a) m_1 *die Ordnung des in* R^2 *gelegenen Punktes* $\bar{\pi} = \Phi(\pi)$ *in Bezug auf* $\bar{P}_{n-1} = \Phi(P_{n-1})$.

b) m_2 *die Ordnung des in* R^3 *gelegenen Punktes* $\bar{\bar{\pi}} = \Psi(\bar{\pi})$ *in Bezug auf* $\Psi(\bar{P}_{n-1})$[11]).

c) $m_{1,2}$ *die Ordnung des Punktes* $\bar{\bar{\pi}}$ *in Bezug auf* $\Phi_{1,2}(P_{n-1})$, *wo* $\Phi_{1,2}$ *die Zusammensetzung der beiden Abbildungen* Φ *und* Ψ *bedeutet.*

Wenn dann $\bar{\bar{\pi}}$ *zum Bilde nur einer Komponente gehört, dann gilt*

$$m_1 \cdot m_2 = m_{1,2} \text{ [12]}), \tag{7}$$

wobei wir natürlich voraussetzen, dass $\Phi(P_{n-1}) = \bar{P}_{n-1}$ *nicht den Punkt* $\bar{\pi}$ *und* $\Psi\,\Phi(P_{n-1}) = \bar{\bar{P}}_{n-1}$ *nicht den Punkt* $\bar{\bar{\pi}}$ *enthält.*

Beweis. Wir beginnen mit folgender Bemerkung:

Es genügt unseren Hilfssatz nur für simpliziale Abbildungen zu beweisen[13]). Es sei dann das Gebiet g simplizial in Simplexe Δ_1 zerlegt[14]), $\bar{g} = \Phi(g)$ in Simplexe Δ_2. Durch eine eventuelle Unterteilung kann man immer erreichen, das zwei verschiedenen Simplexen Δ_1 entweder genau dasselbe Simplex Δ_2 entspricht, oder zwei verschiedene Simplexe Δ_2', Δ_2'', die genau eine $k-1$ dimensionale Seite $(k = 1, \ldots n)$ gemein haben, oder endlich Simplexe, die überhaupt keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen. Der Punkt $\bar{\pi}$ oder genauer gesagt, das Simplex Δ_2, zu welchem $\bar{\pi}$ gehört, wird genau durch m_1 Bildsimplexe $\Phi(\Delta_1)$ überdeckt. Jeder Punkt, der zu derselben Komponente wie $\bar{\pi}$ gehört, wird durch dieselbe Anzahl von Simplexen überdeckt.

Betrachten wir jetzt den Punkt $\bar{\bar{\pi}} = \Psi(\bar{\pi})$. Er wird durch genau m_2 Bildsimplexe $\Phi(\Delta_2) = \Delta_3$ überdeckt. Aus den Voraussetzungen des Hilfssatzes folgt, dass jedes solche Simplex Δ_2,

[11]) m_2 nenne man besser den „Abbildungsgrad" der Abbildung Ψ im Punkte $\bar{\pi}$.

[12]) Vgl. L. E. J. Brouwer: Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. Bd 71, S. 320—327 insb. 326, 327.

[13]) Also beide Abbildungen Φ und Ψ sollen simplizial sein.

[14]) Dies war der nähere Grund, warum wir g als durch ein konvexes Polyeder P_{n-1} berandet annahmen. Es lässt sich dann leicht in Simplexe zerlegen. Den allgemeinen Fall bekommen wir sofort durch Approximation.

dessen Bild $\bar{\bar{\pi}} = \Psi(\bar{\pi})$ bedeckt, zu derselben Komponente wie π gehört. Jedes aber zu derselben Komponente, wie $\bar{\bar{\pi}}$ gehörende Simplex Δ_2 wird — nach dem vorher gesagten — durch m_1 Simplexe $\Phi(\Delta_1)$ überdeckt. Also wird der Punkt $\bar{\bar{\pi}}$ genau durch $m_1 . m_2$ Bildsimplexe $\Psi\Phi(\Delta_1)$ überdeckt. w. z. b. w.

II.

Vorgegeben eine stetige, simpliziale Abbildung Φ der n-dimensionalen Kugel g

(8) $$\|\pi\| \leq 1 \text{ [15])}$$

in einem linearen n-dimensionalen Raume R_n^1 [16]) auf eine Menge $\Phi(g)$, die in einem zweiten solchen Raume R_n^2 gelegen ist. Bezeichnen wir mit r den Rand von g (d. h. die Menge der Punkte, wo $\|\pi\| = 1$ ist) und mit O den Nullpunkt; wir setzen dann folgendes voraus:

1) *$\Phi(O)$ besitzt von $\Phi(r)$ eine positive Entfernung $h > 0$.*

Bemerkung. Sind dann zwei Punkte $\bar{\pi}$, $\bar{\pi}'$, des Bildes um mehr als $h > 0$ voneinander entfernt, so gibt es (da Φ stetig ist) eine Zahl $m_h > 0$, so dass die Entfernung der entsprechenden Urbilder $> m_h$ wird.

2) *Es gibt ein gewisses Zahlenpaar ε_o, δ_o $\left(\varepsilon_o \leq \frac{m_h}{4};\ \delta_o \leq \frac{h}{4}\right)$[17]) so dass, wenn für zwei Punkte π und π' der Kugel g*

(9) $$\|\pi - \pi'\| \geq \varepsilon_o$$

wird, dann auch immer

(10) $$\|\bar{\pi} - \bar{\pi}'\| \geq \delta_o \textit{ ist.}$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende

Hilfssatz II. *Der Punkt $\Phi(O)$ ist ein innerer Punkt des Bildes $\Phi(g)$ und es gehört sogar die ganze Kugel um den Punkt $\Phi(O)$ mit dem Radius h zur Bildmenge.*

Beweis. Unsere Abbildung war schon als simplizial vorausgesetzt [18]). Unbeschadet der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass kein Bildsimplex ausgeartet ist. Wir bilden eine weitere simpliziale Unterteilung der Kugel g, so dass zwei

[15]) d. h. für jeden Punkt $\pi \varepsilon g$ ist: $\|\pi\| \leq 1$.
[16]) vgl. [9]).
[17]) Die Zahlen h, m_h aus der vorhergehenden Bemerkung.
[18]) Dies ist nicht notwendig.

Bildsimplexe dieser Unterteilung entweder keinen Punkt gemein haben, oder genau eine $n-k$ $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$ [19]) dimensionale Seite. Durch eine zweite Unterteilung [20]) vom Durchmesser ε_o können wir uns so einrichten, dass die zuletzt genannte Eigenschaft uns nicht verloren geht und dabei Punkten, die innerhalb desselben Simplexes liegen, Punkte entsprechen, deren Entfernung kleiner ist als $\leq \delta_o$ [21]) (wegen Stetigkeit der Abbildung Φ). Man kann es endlich so einrichten, dass $\Phi(O)$ im Innern der diesen Punkt bedeckenden Bildsimplexe liegt.

Es sei jetzt Δ_2 ein beliebiges Bildsimplex $\Delta_2 = \Phi(\Delta_1)$ seien $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \ldots, \bar{\nu}_{n+1}$ seine Eckpunkte. Wir ordnen jetzt dem Punkte $\bar{\nu}_i$ einen beliebigen von seinen Urbildern ν_i zu, d. h. einen Punkt so, das

(11) $$\Phi(\nu_i) = \bar{\nu}_i; \qquad i = 1, 2 \ldots, n+1$$

und ergänzen simplizial diese Abbildung zu der Abbildung des ganzen $\bar{g} = \Phi(g)$ auf g [22]). Sei „Ψ" das Zeichen für diese „inverse" Abbildung. Durch $\Phi(r)$ wird der „Abbildungsraum" R_n^2 in Komponenten zerlegt [23]). Betrachten wir diese Komponente, in welcher $\Phi(O)$ liegt. Sei Δ_2^o ein beliebiges Simplex von $\Phi(g)$, das (natürlich ganz) zu einer anderen Komponente gehört. Seien $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \ldots \bar{\gamma}_{n+1}$ seine Eckpunkte. Sie gehen infolge der „inversen" Abbildung in die Urbilder $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_{n+1}$. Die Entfernung der Punkte γ_i vom Nullpunkte ist

(12) $$\|\gamma_i\| > m_h; \quad \bar{\gamma}_i = \Phi(\gamma_i). \qquad i = 1, 2, \ldots n+1$$

In der Tat, wäre $\|\gamma_{i_o}\| \leq m_h$, dann müsste nach der Bedeutung der Zahl m_h [24])

(13) $$\|\Phi(\gamma_{i_o}) - \Phi(O)\| < h, \text{ d. h. } \|\bar{\gamma}_{i_o} - \Phi(O)\| < h$$

sein. Nun hatte der Punkt $\Phi(O)$ von $\Phi(r)$ die Entfernung $h > 0$ [25]). Alle Punkte, die von $\Phi(O)$ eine Entfernung $< h$ besitzen, gehören

[19]) $k = 0$ bedeutet, dass die beiden Bildsimplexe identisch sind.
[20]) der Kugel g.
[21]) D. h. jedes Bildsimplex hat einen Durchmesser $\leq \delta$.
[22]) Vgl. L. E. J. Brouwer. Invarianz der Dimensionszahl. Man kann $\Psi\Phi(O) = 0$ voraussetzen.
[23]) Ich erinnere, das r den Rand der Kugel g bedeutete.
[24]) Vgl. die Bemerkung zur Bedingung 1) der Voraussetzungen dieses Hilfssatzes, Seite 128.
[25]) nach Bedingung 1.

also zu derselben Komponente, wie $\Phi(O)$. Dies müsste auch nach (13) für den Eckpunkt $\bar{\gamma}_{i_o}$ des Simplexes Δ_2^o zutreffen, während doch nach Voraussetzung das Simplex Δ_2^o zu einer anderen Komponente gehören sollte.

Nun behaupte ich weiter, dass die Urbilder $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{n+1}$ von einander eine Entfernung besitzen, die kleiner ist als ε_o

(14) $$\|\gamma_i - \gamma_k\| \leq \varepsilon_o \qquad i, k = 1, 2, \dots n+1.$$

Denn wäre das z. B. für $\gamma_{i_o}, \gamma_{k_o}$ nicht der Fall, d. i. wäre

(15) $$\|\gamma_{i_o} - \gamma_{k_o}\| > \varepsilon_o,$$

dann wäre auch

(16) $$\|\bar{\gamma}_{i_o} - \bar{\gamma}_{k_o}\| > \delta_o \text{ (nach Bed. 2, S. 128)},$$

während doch die $\bar{\gamma}_i$ als Eckpunkte desselben Bildsimplexes Δ_2^o eine Entfernung besitzen, die δ_o[26]) nicht übersteigt.

Da also jeder Punkt $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{n+1}$ von O um mehr als m_h entfernt ist (Formel 12) und die Punkte γ_i von einander weniger als ε_o entfernt sind (Formel 14), so ist jeder Punkt π des Bildsimplexes $\Psi(\Delta_2^o)$ vom Nullpunkte O mehr als um $m_h - \varepsilon_o$ entfernt, bedeckt also wegen der Wahl der Zahl ε_o den Punkt O nicht[27]).

Wir haben somit gezeigt, dass kein Simplex Δ_2, das zu einer anderen Komponente als $\Phi(O)$ gehört, infolge der Abbildung Ψ (O) überdecken kann. Somit können wir auf die Abbildungen Φ, Ψ den Hilfssatz I anwenden und erhalten

(17) $$m_1 \,.\, m_2 = m_1,$$

wenn wir mit m_1, m_2, $m_{1,2}$ die „Abbildungsgrade" der Abbildung Φ im Punkte $\Phi(O)$, der Abbildung Ψ im Punkte $\Psi\Phi(O)$[22]) und der zusammengesetzten Abbildung im Punkte O[22]) bezeichnen.

Nun erweist sich aber $m_{1,2} \neq 0$. Denn die zusammengesetzte Abbildung $\Psi . \Phi$ ist eine Abbildung der Kugel g auf eine in

[26]) Vgl. [21]).

[27]) $\varepsilon_o \leq \dfrac{m_h}{4}$; man hat nämlich die Darstellung:

$$\pi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \gamma_i, \text{ wo } \lambda_i \geqq 0; \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Es folgt also

$$\|\pi\| = \|\Sigma \lambda_i \cdot \gamma_i\| = \|\Sigma \lambda_i \cdot \gamma_i - \gamma_1 + \gamma_1\| \geqq \|\gamma_1\| - \|\Sigma \lambda_i \cdot \gamma_i - \gamma_1\| =$$
$$= \|\gamma_1\| - \|\Sigma \lambda_i (\gamma_i - \gamma_1)\| \geqq \|\gamma_1\| - \varepsilon_o \,.\, \Sigma \lambda_i \geqq m_k - \varepsilon_o.$$

demselben Raume gelegene Menge, bei welcher jeder Punkt aus seiner Lage um weniger als $2\varepsilon_o$ verschoben wird. In der Tat, ist

(18) $$\pi \,\varepsilon\, g \text{ }^{28}),$$

so wird infolge der Abbildung Ψ dem Punkte $\Psi\Phi(\pi)$ ein gewisses Urbild π' zugewiesen, so aber, dass

(19) $$\Phi(\pi) = \Phi(\pi') \text{ }^{28}).$$

Wäre nun

(20) $$\|\pi - \pi'\| \geqq \varepsilon_o,$$

so wäre auch

(21) $$\|\Phi(\pi) - \Phi(\pi')\| \geqq \delta_o > 0, \text{ (Bed. 2)}$$

gegen (19).

Somit lässt sich $\Psi . \Phi$ in die Identität stetig deformieren, so aber, dass die Abbildung des Kugelrandes r den Punkt O nicht passiert, woraus $m_{1,2} = 1$ folgt.

Somit ist auch

(22) $$m_1 \neq 0 \text{ (nach 17)}$$

und da alle Punkte $\bar{\pi}$ (im Raume R_n^2) die von $\Phi(O)$ weniger als um h entfernt sind, dieselbe Ordnung (Abbildungsgrad) in bezug auf $\Phi(r)$ besitzen[29]), so folgt daraus leicht, dass alle diese Punkte zum Bilde gehören, w. z. b. w.

III.

Es sei jetzt eine den Bedingungen das Hauptsatzes genügende Abbildung $U(x)$

(23) $$y = U(x),$$

wo also $U(x) - x$ vollstetig ist. Wir beweisen nun den

Hilfssatz III. *Vorgegeben eine beliebige positive Zahl* $\varepsilon > 0$; *dann kann man* δ_ε *so bestimmen, dass, sobald für zwei Punkte* x, x' *aus* G[30])

(24) $$\|s_n(x) - s_n(x')\| \geqq \varepsilon$$

ist, dann immer

(25) $$\|s_n U(x) - s_n U(x')\| \geqq \delta_\varepsilon \text{ für } n > N(\varepsilon)$$

[28]) Es genügt dies zu beweisen, wenn π ein Eckpunkt ist.

[29]) Vgl. Bedingung 1.

[30]) G ist das Zeichen für das Funktionalgebiet, in welchem $U(x)$ erklärt ist. Da unser Hauptsatz eine Eigenschaft „im kleinem" aussagt, so kann man G als beschränkt voraussetzen.

wird. Hier bezeichnet $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihenentwicklung $x = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \, . \, \mathfrak{e}_i$ d. i. wir setzen

(26) $$s_n(x) = \sum_{=0}^{n} c_i \, . \, \mathfrak{e}_i \text{ [31]}.$$

Beweis. Wäre dieser Hilfssatz falsch, so könnte man für ein gewisses ε_o Punktepaare $\{x_n\}$, $\{x_n'\}$ so finden, dass es wäre

(27) $$\| s_n(x_n) - s_n(x_n') \| \geqq \varepsilon_o$$

(28) $$\lim_{n=\infty} \| s_n \, U(x) - s_n \, U(x_n') \| = 0$$

Da die Folgen $\{x_n\}$ und $\{x_n'\}$ im beschränkten Gebiete G liegen [32]), so kann man aus ihnen Teilfolgen $\{x_{n_k}\}$, $\{x'_{n_k}\}$ so aussondern, dass diese zugleich gegen die Elemente x bezw. x' schwach konvergieren. Es sind nun zwei Fälle möglich

a) x und x' sind identisch,

b) x und x' sind verschieden.

Wir setzen

(29) $$T(x) = U(x) - x$$

$T(x)$ ist nach der Voraussetzung vollstetig. Dann haben wir im ersten Falle

Fall a) $y = x + T(x) = U(x)$; $\quad y_n = x_n + T(x_n)$; $\quad x_n \xrightarrow{\text{schwach}} x$ [33])

$y' = x' + T(x') = U(x')$; $y_n' = x_n' + T(x_n')$; $x_n' \xrightarrow{\text{schwach}} x'$

(30) $$x = x'; \text{ also}$$

$$U(x) = U(x'); \; T(x) = T(x')$$

Wegen der Vollstetigkeit folgt aus (30)

(31) $$\lim_{n=\infty} \| T(x_n) - T(x) \| = \lim_{n=\infty} \| T(x_n') - T(x') \| = \lim_{n=\infty} \| T(x_n') - T(x) \| = 0,$$

da doch $x = x'$ ist.

Aus (31) folgern wir, dass umsomehr

(32) $$\lim \| s_n T(x_n) - s_n T(x) \| = \lim \| s_n T(x_n') - s_n T(x) \| = 0$$

und endlich (nach 32)

31) $\{\mathfrak{e}_i\}$ sind die Basiselemente der Reihenentwicklung.

32) Vgl. 30.

33) Wir schreiben wieder x_n bezw. x_n' für x_{n_k} bezw. x'_{n_k}, um die Benutzung zu vieler Indizes zu vermeiden.

(33) $$\lim_{n=\infty} \| s_n T(x_n) - s_n T(x_n') \| \leqq \lim \| s_n T(x_n) - x_n T(x) \| + \\ + \lim \| s_n T(x_n') - s_n T(x) \| = 0.$$

Aus (28) und (33), (29) schliessen wir

(34) $$\lim_{n=\infty} \| s_n(x_n) - s_n(x_n') \| = 0,$$

was der Beziehung (27) widerspricht.

Fall b) $x \neq x'$

$y = x + T(x) = U(x)$; $\quad y_n = x_n + T(x_n)$; $\quad x_n \xrightarrow{\text{schwach}} x$ [33])

$y' = x' + T'(x) = U(x')$; $y_n' = x_n' + T(x_n')$; $x_n' \xrightarrow{\text{schwach}} x'$

(35) $$T(x) = U(x) - x \ldots \text{ vollstetig!}$$

Aus (35) folgt wieder

(36) $$\lim \| T(x_n) - T(x) \| = 0, \\ \lim \| T(x_n') - T(x') \| = 0.$$

Da also die Folge $\{x_n\}$ schwach nach x konvergiert und die $\{T(x_n)\}$ — wegen (36) — stark nach $T(x)$ konvergieren, so folgt insgesamt, das

(37) $$x_n + T(x_n) = U(x_n)$$

schwach nach $x + T(x) = U(x)$ konvergieren.

Auf dieselbe Weise überzeugt man sich, dass $U(x_n')$ schwach nach $U(x')$ konvergiert.

(38) $$U(x_n) \xrightarrow{\text{schwach}} U(x) \\ U(x_n') \xrightarrow{\text{schwach}} U(x')$$

Wegen (28) schliessen wir aus (38)

(39) $$U(x) = U(x'), \qquad x \neq x'$$

was mit der Eineindeutigkeit unvereinbar ist.

Auf dieselbe Weise lässt sich der folgende Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz III'. *Zu jeder vorgegebenen Zahl $h > 0$, kann man die Zahl m_h so bestimmen, dass aus*

(40) $$\| s_n U(x) - s_n U(x') \| \geqq h$$

für genügend grosses n

(41) $$\| s_n(x) - s_n(x') \| \geqq m_h$$

folgt. (Wegen Stetigkeit).

IV.

Wir können jetzt zum Beweise unseres Satzes (A) schreiten. Wir betrachten zu diesem Zwecke die n-dimensionale Kugel g der Punkte π

(42) $$\pi = \sum_{i=1}^{n}{}' c_i \cdot \mathfrak{e}_i; \quad \|\pi\| \leq 1\,^{34}),$$

wo $\{\mathfrak{e}_i\}$ die n ersten Elemente der Basis sind, und ordnen dem Punkte π den Punkt $\Phi(\pi)$,

(43) $$\Phi(\pi) = s_n U(\pi) \qquad \pi \varepsilon g$$

zu. Die Randpunkte dieser n-dimensionalen Kugel sind vom Nullpunkte genau um 1 entfernt. Nach Hilfssatz III folgt daraus, dass es eine Zahl δ_1 gibt, so dass für genügend grosses n die Beziehung gilt

(44) $$\|s_n U(r) - s_n U(O)\| = \|\Phi(r) - \Phi(O)\| \geq \delta_1,$$

wo r symbolisch einen beliebigen Randpunkt der Kugel g bezeichnet.

Man setze nun

(45) $$h = \delta_1$$

Nach Hilfssatz III′ gibt es eine Zahl m_h, so dass

(46) $$\|s_n(\pi) - s_n(\pi')\| \geq m_h,$$

sobald nur

(47) $$\|s_n U(\pi) - s_n U(\pi')\| = \|\Phi(\pi) - \Phi(\pi')\| \geq h. \qquad n > N.$$

Da aber in unserem Falle $s_n(\pi) = \pi$, so hat die Zahl m_h die Eigenschaft, dass

(48) $$\|\pi - \pi'\| \geq m_h,$$

sobald nur

(49) $$\|\Phi(\pi) - \Phi(\pi')\| \geq h.$$

Sei endlich ε_o eine beliebige Zahl, so dass

(50) $$\varepsilon_o \leq \frac{m_h}{4}.$$

Nach Hilfssatz III gibt es ein δ_{ε_o}, so dass aus

(51) $$\|s_n(\pi) - s_n(\pi')\| = \|\pi - \pi'\| \geq \varepsilon_o$$

[34]) Wir nehmen an, dass die funktionale „Kugel" mit dem Radius 1 ganz zu unserem Gebiete G gehört, was wohl keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet.

immer

(52) $$\|\Phi(\pi) - \Phi(\pi')\| \geq \delta_{\varepsilon_o} \text{ folgt}\,^{35}).$$

Dieses δ_{ε_o} können wir natürlich beliebig klein wählen; wir wählen es

(53) $$\delta_{\varepsilon_o} \leq \frac{h}{4}.$$

Die Abbildung Φ der Kugel g auf den n-dimensionalen s_n-Raum besitzt dann alle Eigenschaften, die wir im Hilfssatz II vorausgesetzt haben mit den Konstanten

(54) $$h = \delta_1, \quad m_h = m_h, \quad \delta_o \leq \frac{m_h}{4}, \quad \delta_o = \delta_{\varepsilon_o}$$

Die ganze n-dimensionale Kugel in dem s_n-Raum um den Punkt $\Phi(O)$ mit dem Durchmesser h gehört also zur Abbildung $\Phi(g)$, woraus wir durch Grenzübergang wegen der „Schwachkompakheit" des Raumes und der Vollstetigkeit der Operation $U(x) - x$ folgern, dass auch die ganze Kugel des Funktionalraumes um den Punkt $U(O)$ mit dem Durchmesser h zum Bilde $U(G)$ gehört, w. z. b. w.

V.

Auf dieselbe Art und Weise beweist man den folgenden scheinbar allgemeineren Satz. *Es seien n-Tupel von Elementen $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ gegeben und vollstetige Operationen $T_1(x_1, x_2 \ldots x_n) \ldots$, $T_n(x_1, x_2 \ldots x_n)$, so dass die Abbildung*

(55) $$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + T_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= x_n + T_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{aligned}$$

der $(x_1 x_2, \ldots x_n)$ zu $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ eineindeutig ist. Dann geht jedes „n-dimensionale Funktionalgebiet" in ein „n-dimensionales Funktionalgebiet" über.

VI.

Beweis des Satzes B. Wir werden, um die Idee besser hervortreten zu lassen, $\psi_o(x, y) = 0$ voraussetzen und dann beweisen, dass falls die Voraussetzungen dieses Satzes B erfüllt sind und falls die Gleichung

[35]) $\Phi(\pi) = s_n U(\pi)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{56}$$

für eine gewisse Randfunktion φ_o lösbar ist, dieselbe Gleichung auch für benachbarte $\psi(x,y)$, $\varphi(s)$ ihre Lösung besitzt[36]).

Wir setzen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\Delta z=\Omega(x,y) \tag{57}$$

dann gilt (56)

$$\Omega=f\left((x,y,z_{\Omega,\varphi},\frac{\partial z_{\Omega,\varphi}}{\partial x},\frac{\partial z_{\Omega,\varphi}}{\partial z}\right)=-T(\Omega,\varphi) \tag{58}$$

wo

$$z_{\Omega,\varphi}=\iint\limits_{\varrho} G(x,y,\xi,\eta)\,\Omega(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta+v_\varphi(x,y);$$

dabei bedeutet $G(x,y,\xi,\eta)$ die Green'sche Funktion des Kreises ϱ und v_φ diejenige h a r m o n i s c h e Funktion, die mit den Randwerten $\varphi(s)$ gebildet wurde.

Wir betrachten nun die „Abbildung"

$$\begin{aligned}\Psi(x,y)&=\Omega+T(\Omega,\varphi)=U(\Omega,\varphi)\\ \varphi(s)&=\varphi(s)+\text{Null},\end{aligned} \tag{59}$$

die jedem Funktionenpaar Ω,φ, das Funktionenpaar Ψ,φ entsprechen lässt. Aus der Voraussetzung folgt sofort, dass die Abbildung eineindeutig ist. Wir müssen also — um den Hauptsatz bezw. seine in Paragraph V gegebene Verallgemeinerung anwenden zu können — nur noch beweisen, dass

$$T(\Omega,\varphi)=-f\left(x,y,z_{\Omega,\varphi},\frac{\partial z_{\Omega,\varphi}}{\partial x},\frac{\partial z_{\Omega,\varphi}}{\partial y}\right) \tag{60}$$

vollstetig ist. Zu diesem Zwecke wollen wir zuerst die Normierung der Funktionen $\Omega(x,y)$ und $\varphi(s)$ näher präzisieren. Wir setzen

$$\begin{aligned}\|\Omega(x,y)\|&=\sqrt[\alpha]{\iint|\Omega|^\alpha\,d\xi\,d\eta}\ldots\alpha>2;\\ \|\varphi(s)\|&=\int\limits_0^L\sqrt{\varphi^2+\varphi'^2+\varphi''^2}ds\end{aligned} \tag{61}$$

wo ds das Bogendifferential am Rande des Kreises ϱ und L die Länge des Kreises ϱ bedeutet.

[36]) Wohlgemerkt, wir beweisen nur, dass die Gleichung (56) fast überall erfüllt ist. [Anm. b. d. Korr.].

Konvergieren dann die Funktionen $\Omega_n(x,y)$ schwach gegen die Funktion Ω, so bedeutet das nach der üblichen Definition der schwachen Konvergenz nichts anderes als[37]), dass für jede Funktion τ, die mit der konjugierten Potenz[38]) integrierbar ist, die Beziehung gilt

$$\lim_{n=\infty}\iint\limits_{\varrho}\Omega_n(\xi,\eta)\,\tau(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{\varrho}\Omega(\xi,\eta)\,\tau(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{62}$$

Setzen wir insbesondere

$$\tau(\xi,\eta)=G(x,y,\xi,\eta) \tag{63}$$

bezw.

$$\begin{aligned}\tau_1(\xi,\eta)&=\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,\xi,\eta)\\ \tau_2(\xi,\eta)&=\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,\xi,\eta),\end{aligned} \tag{64}$$

so bekommen wir die Relationen

$$\begin{aligned}&\lim_{n=\infty}\iint\limits_{\varrho}\Omega_n(\xi,\eta)\,G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\iint\limits_{\varrho}\Omega(\xi,\eta)\,G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\\ &\lim_{n=\infty}\iint\limits_{\varrho}\Omega_n(\xi,\eta)\,\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=\\ &=\iint\limits_{\varrho}\Omega(\xi,\eta)\,.\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,\xi.\eta)\,d\xi\,d\eta \text{ u. s. w.}\end{aligned} \tag{65}$$

Es gelten ferner folgende bekannte Formeln

$$|G(x,y,\xi,\eta|\leq M|\log r_{1,2}|;\ \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|\leq\frac{M}{r_{1,2}};\ \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\leq\frac{M}{r_{1,2}}\text{ }^{39)} \tag{66}$$

$$\text{mit } r_{1,2}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$$

Es folgt daraus endlich wegen $\alpha>2$:

$$\begin{aligned}&\left|\iint\limits_{\varrho}\Omega_n\,.\,G\,.\,d\xi\,d\eta\right|\leq M\left[\iint\limits_{\varrho}|\log r_{1,2}|^\beta d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{\beta}}.\left[\iint\limits_{\varrho}|\Omega_n|^\alpha\,d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{\alpha}}\\ &\left|\iint\limits_{\varrho}\Omega_n.\frac{\partial G}{\partial x}.d\xi\,d\eta\right|\leq M\left[\iint\limits_{\varrho}\left|\frac{1}{r_{1,2}}\right|^\beta d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{\beta}}.\left[\iint\limits_{\varrho}|\Omega_n|^\alpha\,d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{\alpha}}\\ &\left|\iint\limits_{\varrho}\Omega_n.\frac{\partial G}{\partial x}.d\xi\,d\eta\right|\leq M\left[\iint\limits_{\varrho}\left|\frac{1}{r_{1,2}}\right|^\beta d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{\beta}}.\left[\iint\limits_{\varrho}|\Omega_n|^\alpha\,d\xi\,d\eta\right]^{\frac{1}{\alpha}\,39)}.\end{aligned} \tag{67}$$

[37]) Vgl. F. Riesz. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69. (1910).

[38]) $1<\beta<2$ ist die zu α konjugierte Potenz, d. h. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

[39]) Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Enz. der math. Wissenschaften II C. 3, Neuere Entwicklung des Potentialtheorie, insb. Seite 247—248; $r_{1,2}$ ist die Entfernung der Punkte (x,y) und (ξ,η).

Da die Ω_n schwach konvergieren, so gibt es bekanntlich eine Zahl M, so dass

$$\left[\iint_{\varrho} |\Omega_n|^{\alpha}\, d\xi\, d\eta\right]^{\frac{1}{\alpha}} < M. \tag{68}$$

Wir sind also zum folgenden Ergebniss gelangt:

Wenn die Funktionen $\Omega_n(x,y)$ schwach gegen $\Omega(x,y)$ konvergieren, so konvergieren die Funktionen

$$\begin{gathered} z_{\Omega_n} = z_n(x,y) = \iint_{\varrho} G(x,y,\xi,\eta)\,\Omega_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ \frac{\partial z_{\Omega_n}}{\partial x} = \frac{\partial z_n}{\partial x}(x,y); \quad \frac{\partial z_{\Omega_y}}{\partial y} = \frac{\partial z_n}{\partial y}(x,y) \end{gathered} \tag{69}$$

im gewöhnlichen Sinne nach z_Ω, $\dfrac{\partial z_\Omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z_\Omega}{\partial y}$ [40] (wegen 65) und sind gleichmässig beschränkt (67, 68).

Es sei weiter $\varphi_n(s)$ eine Folge von Funktionen des Parameters s, die gegen eine Grenzfunktion $\varphi(s)$ schwach konvergieren, diese schwache Konvergenz im entsprechendem Felde, dass ist mit der Norm (60) verstanden. Bilden wir dann die harmonischen Funktionen v_{φ_n} mit den Randwerten φ_n, so beweist man ganz leicht — aus der vorausgesetzten schwachen Konvergenz der Funktionen $\varphi_n(s)$, — dass

$$\begin{gathered} \lim_{n=\infty} v_{\varphi_n}(x,y) = v_\varphi(x,y), \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial v_{\varphi_n}}{\partial y} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial y}, \\ \lim_{n=\infty} \frac{\partial v_{\varphi_n}}{\partial x} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \end{gathered} \tag{70}$$

und dass die Funktionen v_{φ_n}, $\dfrac{\partial v_{\varphi_n}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v_{\varphi_n}}{\partial x}$ gleichmässig beschränkt sind. Es folgt also, dass auch die Ausdrücke

$$z_{\Omega_n\varphi_n}; \quad \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial x}; \quad \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial y} \text{ [41]} \quad \text{(wegen 65, 67, 68, 70)} \tag{71}$$

gleichmässig beschränkt sind und wegen 65, 67, 66 und 70 nach $z_{\Omega,\varphi}$, $\dfrac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial z}$, $\dfrac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial y}$ konvergieren.

[40] $z = z_\Omega = \iint_{\varrho} G(x,y,\xi,\eta)\,\Omega(\xi,\eta),\, d\xi\, d\eta$.

[41] Es ist $z_{\Omega_n\varphi_n} = z_{\Omega_n} + v_{\varphi_n} = \iint_{\varrho} G(x,y,\xi,\eta)\,\Omega_n(\xi,\eta)\,d\xi + v_{\varphi_n}(x,y)$.

Daraus schliessen wir, dass

$$\lim_{n=\infty} f\left(x,y,z_{\Omega_n\varphi_n}, \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial x}, \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial y}\right) = f\left(x,y,z_{\Omega\varphi}, \frac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial y}\right) \tag{72}$$

und dass die Ausdrücke (72) gleichmässig beschränkt sind. Umsomehr gilt also

$$\lim_{n=\infty} \iint_{\varrho} \left[f\left(x,y,z_{\Omega_n\varphi_n}, \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial x}, \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial y}\right) - f\left(x,y,z_{\Omega\varphi}, \frac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial y}\right)\right]^{\alpha} dx\,dy = 0$$

und dies bürgt uns die Vollstetigkeit der Abbildung $T(\Omega, \varphi)$.

(Reçu par la Rédaction le 6. 11. 1928).

BERICHTIGUNGEN ZU DER ARBEIT

von

J. SCHAUDER

„Invarianz des Gebietes in Funktionalraümen"

(Studia Mathematica, I (1929), p. 123—139).

Seite **124**, Zeile 11 von oben, statt „schwachkompakte" lies „schwachkonvergente".

Seite **126**, Anm. 10... statt „unter 6) zitierten" lies „unter 7) zitierten".

Seite **129**, Anm 21... statt „δ" lies „δ_0".

Seite **131**, Zeile 5 von oben, statt „$\Psi\,\Phi(\pi)$" lies „$\Phi(\pi)$".

Seite **133**, Formel (33) lautet richtig:

$$\lim_{n=\infty} \| s_n T(x_n) - s_n T(x'_n) \| \leq \lim_{n=\infty} \| s_n T(x_n) - s_n T(x) \| + \lim_{n=\infty} \| s_n T(x'_n) - s_n T(x) \| = 0.$$

Seite **134**, Formel (44) lautet richtig:

$$\| s_n U(r) - s_n U(O) \| = \| \Phi(r) - \Phi(O) \| \geq \delta_1 .$$

Seite **138**, Zeile 14 von oben, statt „Norm (60)" lies „Norm (61)".

Seite **139**, Zeile 5 von oben lautet richtig:

$$\lim_{n=\infty} \iint_{\varrho} \left| f\left(x,y,z_{\Omega_n\varphi_n}, \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial x}, \frac{\partial z_{\Omega_n\varphi_n}}{\partial y}\right) - f\left(x,y,z_{\Omega\varphi}, \frac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial z_{\Omega\varphi}}{\partial y}\right)\right|^{\alpha} dx\,dy = 0$$