Added in proof. It seems that in the case of odd n our formula (4.9) on p. 234 differs form that in [6] and [13] p. 125, (Théorème 1) by the additional factor $\exp\left(-\frac{|E_0U|^2}{4s}\right)$ under the integral sing. However, in the particular case $n = 3$, these formulas agree up to the sign before $\frac{|u|^2}{s}$ in the argument of the exp function, cf. [13] p. 126.

References

[1] P. Bernat et al., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris 1972.

[2] G. B. Folland, *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. Soc. 79 (1973), pp. 373–376.

[3] — *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. 13 (1975), pp. 161–207.

[4] B. Gaveau, *Holonomie stochastique et représentations du groupe d'Heisenberg*, C. R. Acad. Sci. Paris, sér. A 280 (1975), pp. 571–573.

[5] — *Principe de moindre action et propagation de la chaleur pour le groupe d'Heisenberg*, ibid. sér. A 281 (1975), pp. 327–328.

[6] — *Solutions fondamentales, représentations, et estimées sous-elliptiques pour les groupes nilpotents d'ordre* 2, ibid. sér. A 282 (1976), pp. 563–566.

[7] A. Hulanicki, *Commutative subalgebra of $L^1(G)$ associated with a subelliptic operator on a Lie group G*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), pp. 121-124.

[8] — *The distribution of energy in the Browian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group*, Studia Math. 56 (1976), pp. 165–173.

[9] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, Москва 1972.

[10] F. Rellich, *Störungstheorie der Spektralzerlegung*, II, Math. Ann. 113 (1936), pp. 677–685.

[11] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford 1950.

[12] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, изд. 2, Наука, Москва 1971.

[13] B. Gaveau, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. 139 (1977), pp. 95–153.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
BRANCH IN WROCŁAW

Received November 19, 1976 (1229)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXIV. (1979)

Quelques propriétés de l'espace des opérateurs compacts

par

HICHAM FAKHOURY (Villeurbanne)

Résumé. Soient $\boldsymbol{K}(W, V)$ (resp. $\boldsymbol{F}(W, V)$) l'espace des opérateurs compacts (resp. faiblement compacts) d'un espace de Banach W dans V. On donne des conditions suffisantes pour que $\boldsymbol{K}(W, V)$ ne contienne pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\boldsymbol{N})$ ou bien soit faiblement séquentiellement complet. Le bidual de $\boldsymbol{K}(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{L}(W'', V'')$ l'espace des opérateurs bornés de W'' dans V''. Si V est un espace $C(X)$ ou bien si W est un espace $L^1(\mu)$, on montre que $\boldsymbol{F}(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace du bidual de $\boldsymbol{K}(W, V)$. Si X est le support d'une mesure ou bien si la mesure μ est σ-finie, l'espace $\boldsymbol{F}(W, V)$ s'injecte dans $\boldsymbol{K}_1''(W, V)$ l'adhérence séquentielle de $\boldsymbol{K}(W, V)$ dans son bidual.

Introduction et notations. Soient W et V deux espaces de Banach; on se propose d'établir les résultats annoncés plus haut en se basant sur un résultat assez simple qui permet de représenter les opérateurs compacts ou faiblement compacts de W dans V comme des fonctions continues sur des compacts adéquats. L'isométrie de $\boldsymbol{K}''(W, V)$ dans $\boldsymbol{L}(W'', V'')$ en résultera de façon naturelle. L'injection de $\boldsymbol{F}(W, V)$ dans $\boldsymbol{K}''(W, V)$ ou même $\boldsymbol{K}_1''(W, V)$ quand W ou bien V vérifient les hypothèses citées plus haut provient de cette représentation et de l'étude des fonctions séparément continues sur le produit de deux compacts. En particulier, on retrouve que l'image d'un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure σ-finie par un opérateur faiblement compact est un espace séparable.

Soit V un espace de Banach; on note $B(V)$ sa boule unité fermée et son dual V' sera, sauf mention du contraire muni de $\sigma(V', V)$. Si A est une partie de V on note $\operatorname{conv}(A)$ son enveloppe convexe et on désigne par $E(X)$ l'ensemble des points extrémaux d'un convexe X. Rappelons qu'un espace vérifie la propriété de Radon–Nikodym si pour tout espace mesuré (X, Σ, μ) où μ est une mesure positive et toute mesure σ-additive m définie sur (X, Σ) à valeurs dans V, à variation bornée et qui est absolument continue par rapport à μ, il existe une fonction f, intégrable au sens de Bochner de X dans V, telle que $m = f\cdot\mu$. Il résulte des travaux de Stegall [8] qu'un espace dual V' possède cette propriété si est seulement si tout sous-espace séparable de V a un dual séparable.

Si W et V sont deux espaces de Banach on note $\boldsymbol{K}(W, V)$ (resp.

$\boldsymbol{F}(W, V)$, $\boldsymbol{L}(W, V)$) l'espace des opérateurs compacts (resp. faiblement compacts, bornés) de W dans V. On écrira $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}$, si aucune confusion n'est à craindre.

Si X est un compact on note $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X muni de sa norme habituelle et $M(X)$ l'espace des mesures sur X. On dira que V est un *espace de Lindenstrauss* si son dual est isométrique à un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ. Cette classe contient évidemment les espaces $C(X)$. Si E est un espace de Banach on désigne par E_1'' le sous-espace de E'' formé des éléments qui sont limites de suites de points de E; c'est donc l'espace des fonctions linéaires bornées sur $B(E')$ qui sont de première classe de Baire. On notera E_B'' l'espace des fonctions linéaires bornées sur $B(E')$ qui sont de Baire affines c'est-à-dire limites itérées de suite de E pour la topologie $\sigma(E'', E')$.

Les résultats. Soient W et V deux espaces de Banach, on note φ l'opérateur de $\boldsymbol{L}(W, V)$ dans l'espace des fonctions bornées, séparément linéaires sur le produit $B(W'')\times B(V')$ défini par $\varphi(T)(w'', v') = w''\big(T'(v')\big)$, pour tout (w'', v') dans $B(W'')\times B(V')$. Il est clair que φ est une isométrie de $\boldsymbol{L}(W, V)$ sur le sous-espace des fonctions continues pour la première variable en tout point (w'', v') et continues pour la deuxième variable en tout point (w, v') où w appartient à $B(W)$. La démonstration du lemme suivant repose sur le fait qu'un opérateur de W dans V est compact (resp. faiblement compact) si et seulement si sa transposée est continue de V' muni de $\sigma(V', V)$ dans W muni de sa norme (resp. $\sigma(W', W'')$), ainsi que sur le fait qu'une partie bornée simplement compacte dans un espace $C(X)$ est faiblement compacte.

LEMME 1. (a) *L'espace $\varphi(\boldsymbol{K})$ coïncide avec le sous-espace de $\varphi(\boldsymbol{L})$ formé des fonctions continues sur le produit $B(W'')\times B(V')$.*

(b) *L'espace $\varphi(\boldsymbol{F})$ coïncide avec le sous-espace de $\varphi(\boldsymbol{L})$ formé des fonctions séparément continues sur le produit $B(W'')\times B(V')$.*

De ce lemme on déduit que la topologie faible $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$ est identique à la topologie faible induite sur $\varphi(\boldsymbol{K})$ par l'espace $C\big(B(W'')\times B(V')\big)$. En particulier, une suite (T_n) dans $\boldsymbol{K}$ est faiblement de Cauchy si et seulement si la suite $\varphi(T_n)$ converge simplement sur le compact $B(W'')\times B(V')$. On peut donc conclure que si W est réflexif, une partie bornée de $\boldsymbol{K}(W, V)$ est $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$ compacte si et seulement si elle est compacte pour la topologie faible d'opérateurs. En effet, une partie bornée de $C\big(B(W'')\times B(V')\big)$ est faiblement compacte si et seulement si elle est simplement compacte.

PROPOSITION 2. *Soit (T_n) une suite de $\boldsymbol{K}$, pour que (T_n) converge au sens de $\sigma(K, K')$ vers T, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout (w'', v') de $E\big(B(W'')\big)\times E\big(B(V')\big)$ on ait:*

$$w''\big(T(v')\big) = \lim_{n\to\infty} w''\big(T_n'(v')\big).$$

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Inversement, en vertu d'un théorème de Rainwater [6], il suffit de montrer que tout point extrémal de $B(\boldsymbol{K}')$ est une fonctionnelle de la forme $T\to w''\big(T(v')\big)$, où (w'', v') est un point de $E\big(B(W'')\big)\times E\big(B(V')\big)$. Or $\boldsymbol{K}$ est isométrique à un sous-espace de $C\big(B(W'')\times B(V')\big)$; soit R la restriction canonique du compact $M_1\big(B(W'')\times B(V')\big)$ des mesures sur $B(W'')\times B(V')$ de norme inférieure à 1 sur le compact $B(\boldsymbol{K}')$. Cette application étant surjective et continue, l'image réciproque de tout point extrémal k de $B(\boldsymbol{K}')$ contient une mesure de Dirac $\varepsilon_{w'',v'}$, sur $B(W'')\times B(V')$. Comme k est extrémal, il est clair que w'' et v' sont extrémaux dans $B(W'')$ et $B(V')$. En effet, si $w'' = (w_1''+w_2'')/2$ on a $R(\varepsilon_{w'',v'}) = \big(R(\varepsilon_{w_1'',v'})+(R_{w_2'',v'})\big)/2$; par conséquent, on a $R(\varepsilon_{w_1'',v'}) = R(\varepsilon_{w_2'',v'})$. Or ceci est impossible puisque l'on peut toujours construire un opérateur T de rang 1 tel que $\varphi(T)$ sépare les points $R(\varepsilon_{w_1'',v'})$ et $R(\varepsilon_{w_2'',v'})$. On montre de même que v' est extrémal, ce qui achève la démonstration. ■

Dans la suite, on écrira $E\supset F$ pour exprimer le fait que F est isomorphe à un sous-espace de E. Remarquons que $\boldsymbol{K}(W, V)$ contient isométriquement les espaces W' et V. Ainsi, dire que $\boldsymbol{K}(W, V)\not\supset l^1(\boldsymbol{N})$ implique trivialement que $W'\not\supset l^1(\boldsymbol{N})$ et $V\not\supset l^1(\boldsymbol{N})$, le théorème suivant constitue une réciproque partielle. Signalons que la condition "V' possède la proprieté de Radon-Nikodym" est strictement plus forte que "$V\not\supset l^1(\boldsymbol{N})$"

THÉORÈME 3. *Soient W et V deux espaces de Banach vérifiant l'une des deux conditions suivantes:*

(a) *$W'\not\supset l^1(\boldsymbol{N})$ et V' possède la propriété de Radon–Nikodym.*

(b) *W'' est séparable et $V\not\supset l^1(\boldsymbol{N})$.*

Alors l'espace $\boldsymbol{K}(W, V)$ ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\boldsymbol{N})$.

Demonstration. En se basant sur un résultat de Odell et Rosenthal [5], il suffit de montrer que toute suite (T_n) bornée dans $\boldsymbol{K}(W, V)$ possède une sous-suite $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$-Cauchy.

(a) On se place dans les hypothèses de (a). Pour tout n le sous-espace $T_n(W)$ est séparable, le sous-espace de V défini par $V_1' = \overline{\operatorname{lin}\big(\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} T_n(W)\big)}$ est donc séparable; l'hypothèse sur V implique que V_1' est séparable. On ne réduit donc pas la généralité en supposant V' séparable. Soit (v_p') une suite dense dans $B(V')$ pour la topologie de la norme; pour tout p fixe la suite de fonctions $w''\to\varphi(T_n)(w'', v_p') = w''\big(T_n'(v_p')\big)$ est formée de fonctionnelles continues sur $B(W'')$; ce sont donc des points de W'. Comme ce dernier ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\boldsymbol{N})$, cette suite contient une sous-suite $\sigma(W', W'')$ de Cauchy. En utilisant un procédé diagonal on obtient une sous-suite (T_{n_q}) de la suite (T_n) telle que pour tout p la suite $(\varphi(T_{n_q})(\cdot, v'_p))$ converge simplement sur $B(W'')$. Comme (v'_p) est normiquement dense dans $B(V')$, il en est de même pour la suite $(\varphi(T_{n_q})(\cdot, v'))$ pour tout v' de $B(V')$. D'après le lemme 1 la suite (T_{n_q}) est de Cauchy dans $\boldsymbol{K}(W, V)$ pour $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$.

(b) On se place dans l'hypothèse (b) et on applique la même méthode en introduisant une suite (w''_p) normiquement dense dans $B(W'')$. ■

Ce résultat n'est, *à priori*, pas le meilleur possible puisque l'on ignore si toutes les hypothèses sur V' sont nécessaires dans (a), ou bien si l'on peut se contenter de supposer que $V \not\supset l^1(\boldsymbol{N})$ et si, dans (b), on peut se contenter de $W' \supset l^1(\boldsymbol{N})$. En tout cas, il contient le résultat suivant de [2] qui affirme que dans l'espace $\boldsymbol{K}(W, V)$ toute suite bornée contient une sous-suite $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$-Cauchy pourvu que W et V soient réflexifs. Si $\boldsymbol{K}(W, V)$ est faiblement séquentiellement complet, il en est évidemment de même pour W' et V. La réciproque est fausse sans hypothèse supplémentaire comme le montre le cas où $W = V = l^2(\boldsymbol{N})$.

Théorème 4. *Soient W et V deux espaces de Banach tels que W' et V soient faiblement séquentiellement complets; alors $\boldsymbol{K}''_B(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{F}(W, V)$.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite dans $\boldsymbol{K}(W, V)$ qui est $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$-Cauchy. D'après le lemme 1, ceci revient à dire que la suite de fonctions $\varphi(T_n)$ converge simplement sur le compact $B(W'') \times B(V')$. Soit $l(w'', v') = \lim \varphi(T_n)(w'', v')$, la fonction l est bornée et séparément linéaire sur $B(W'') \times B(V')$. Soit v' fixe, la suite de fonctions $w'' \to \varphi(T_n)(w'', v')$ est $\sigma(W', W'')$-Cauchy dans W', comme il est faiblement séquentiellement complet, elle converge dans W'. Ainsi la fonction $w'' \to l(w'', v')$ est continue sur $B(W'')$. On établit de même que $v' \to l(w'', v')$ est continue sur $B(V')$ quand w'' est fixé. D'aprés le lemme 1, la fonction l s'identifie à un opérateur de $\boldsymbol{F}(W, V)$. Le cas général se démontre de la même façon, la seule hypothèse ayant servi est que $\varphi(T_n)$ est séparément continue. ■

Corollaire 5. *Soient W et V deux espaces de Banach tels que W' et V soient faiblement séquentiellement complets. L'espace $\boldsymbol{K}(W, V)$ est faiblement séquentiellement complet dès qu'il coincide avec $\boldsymbol{F}(W, V)$.*

Sachant qu'un espace de Banach qui ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\boldsymbol{N})$ et qui est faiblement séquentiellement complet est réflexif, on obtient le résultat de [3] et de [7] établi sous l'hypothèse supplémentaire que W ou V possède la propriété d'approximation, en effet, il est clair maintenant que si W et V sont réflexifs et si $\boldsymbol{L}(W, V) = \boldsymbol{K}(W, V)$ alors $\boldsymbol{K}(W, V)$ est réflexif. En reprenant la méthode utilisée pour établir le théorème 4 on obtient le résultat suivant qui se réduit au théorème classique de Banach–Steinhaus si l'un au moins des espaces W ou V est réflexif.

Proposition 6. *Soient W et V deux espaces de Banach tels que W' et V soient faiblement séquentiellement complets. Soit $(T_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite de $\boldsymbol{F}(W, V)$ telle que la suite $\big(w''(T'_n(v'))\big)_{n\in\boldsymbol{N}}$ converge pour tout (w'', v') dans $B(W'') \times B(V')$; alors l'opérateur T de $\boldsymbol{L}(W, V)$ défini par $T(w) = \lim_{n\to\infty} T_n(w)$ est faiblement compact.*

Théorème 7. *L'espace $\boldsymbol{K}''(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{L}(W'', V'')$, l'injection naturelle de $\boldsymbol{K}(W, V)$ dans $\boldsymbol{K}''(W, V)$ coincidant avec l'application $T \to T''$.*

Démonstration. Soit $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille ultrafiltrée de $B(\boldsymbol{K})$ qui converge pour $\sigma(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}')$ vers un élément T de $\boldsymbol{K}''$. Alors $\varphi(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge faiblement vers $\varphi''(T)$. En particulier, pour tout (w'', v') de $B(W'') \times B(V')$ on a $\lim_{\alpha\in A} w''\big(T'_\alpha(v')\big) = \varphi''(T)(w'', v')$. Soit w'' fixé dans $B(W'')$; la famille $v' \to w''\big(T'_\alpha(v')\big)$ est une famille ultrafiltrée de fonctionnelles sur $B(V')$ qui est simplement convergente. Sa limite $v' \to \varphi''(T)(w'', v')$ est un élément de $B(V'')$ que l'on note $\varphi''(T)(w'')$. L'application $w'' \to \varphi''(T)(w'')$ est un opérateur de $\boldsymbol{L}(W'', V'')$ de même norme que T. Ce théorème généralise un résultat de [2]. ■

Proposition 8. *Soit X un compact; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Tout compact faible de $C(X)$ est métrisable.*

(b) *Pour tout compact Y, toute fonction séparément continue sur $X \times Y$ est de première classe de Baire.*

Si X est le support d'une mesure il vérifie ce qui précéde.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). Soit f une fonction séparément continue sur $X \times Y$ que l'on suppose bornée sans diminuer la généralité. En effet f est de première classe si et seulement si les fonctions f_n définies par $f_n(x, y) = \big(f(x, y)^\vee - n\big) \wedge n$ le sont. On pose $A = \{f_y;\ y \in Y\}$ où f_y est la fonction de $C(X)$ définie par $f_y(x) = f(x, y)$. L'ensemble A est borné dans $C(X)$ et il est compact pour la convergence simple puisque l'application $y \to f_y$ est continue. Il est donc faiblement compact et métrisable grace à l'hypothèse. Par conséquent il est séparable. Soit $(f_{y_n})_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite dense dans A; on note X' le quotient de X par la relation d'équivalence associée à la suite (f_{y_n}), le compact X' est métrisable puisqu'il est séparé par une suite de fonctions continues. Soit θ l'application canonique de X sur X'; comme f est constante sur les classes d'équivalence de θ, on pose $f'(x', y) = f(x, y)$ pour $\theta(X) = x'$. Cette fonction est séparément continue sur $X' \times Y$ et vérifie $f = f' \circ \theta$. Il suffit donc de démontrer le résultat pour la fonction f'. Pour tout n de N le compact X' peut être recouvert par une famille finie $\left(\mathring{B}\left(x'_i, \frac{1}{n}\right)\right)_{i=1,\ldots,p_n}$ de boules ouvertes. Soit $(\psi^n_i)_{i=1,\ldots,p_n}$ une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, la suite de fonctions $f'_n(x', y) = \sum_1^{p_n} \psi^n_i(x') f'(x'^n_i, y)$ converge simplement vers f' sur $X' \times Y$.

(b) ⇒ (a). Soit A un compact faible dans $C(X)$. On considère la fonction définie sur $X\times A$ par $f(x, a) = a(x)$ pour tout (x, a) de $X\times A$. Soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite dans $C(X\times A)$ qui converge simplement vers f; comme $\|f\| = 1$ on peut supposer $\|f_n\|\leqslant 1$. Soit $A_n = \{f_{n,a};\ a\in A\}$; cet ensemble est compact dans $C(X)$ muni de sa norme et $A\subset \overline{\bigcup_n A_n}$ où l'adhérence est prise au sens de la convergence simple sur X. D'après le théorème de Lebesgue A est dans l'adhérence faible, donc forte, de l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_n A_n$. Ainsi A est séparable, comme il est faiblement compact il est donc métrisable. ■

La dernière assertion est bien connue, en effet, si μ est une mesure de support X et A un compact faible de $C(X)$, il est aisé de vérifier grace au théorème de Lebesgue que A muni de la distance associée à la norme de $L^1(\mu)$ est compact et qu'il est homéomorphe à A muni de la topologie faible.

Corollaire 9. *Une fonction séparément continue sur le produit $X\times Y$ de deux compacts est universellement mesurable.*

Démonstration. Soient ν une mesure sur $X\times Y$ et $P_X(\nu)$ sa projection sur X. Si $S(P_X(\nu))$ est le support de $P_X(\nu)$, il suffit de s'occuper de la restriction de f au produit $S(P_X(\nu))\times Y$; or cette restriction est de première classe de Baire d'aprés ce qui précéde. Signalons que ce corollaire est dû à Mokobodzki qui l'a établi par une méthode différente. ■

Proposition 10. *Soient X et Y deux espaces compacts et f une fonction séparément continue sur $X\times Y$. Si f est une fonction de Baire alors elle est de premiére classe de Baire.*

Démonstration. D'aprés la preuve précédente il suffit de montrer que $A = \{f_y;\ y\in Y\}$ est séparable pour la convergence simple sur X. On peut supposer $\|f\| = 1$; comme c'est une fonction de Baire elle est dans l'adhérence séquentielle itérée d'une suite $(g_n)_{n\in N}$ de fonctions continues sur $X\times Y$ telle que $\|g_n\|\leqslant 1$. Les ensembles $A_n = \{g_{n,y};\ y\in Y\}$ sont compacts dans $C(X)$ et A est inclus dans l'adhérence séquentielle itérée de $\bigcup_n A_n$ pour la convergence simple. Le théorème de Lebesgue montre que A est dans l'espace vectoriel faiblement fermé dans $C(X)''$ engendré par $\bigcup_n A_n$. Comme les ensembles A_n sont compacts A est dans l'adhérence forte de l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_n A_n$, et par suite il est séparable. ■

On revient maintenant à l'espace des opérateurs compacts; les résultats précédents permettent de montrer le

Théorème 11. (a) *Soient W un espace de Banach, Z un compact et V l'espace $C(Z)$. Il existe une isométrie canonique de $\boldsymbol{F}(W, V)$ dans l'espace $\boldsymbol{K}''(W, V)$.*

(b) *Tout opérateur T de $\boldsymbol{F}(W, V)$ tel que $\varphi(T)$ est dans $\boldsymbol{K}''_B(W, V)$ est en fait dans $\boldsymbol{K}''_1(W, V)$.*

(c) *Si tout compact faible de V est métrisable, en particulier si Z est le support d'une mesure, $\boldsymbol{F}(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{K}''_1(W, V)$.*

Démonstration. D'après le lemme 1 et la représentation naturelle des fonctions de $C(Z)$ comme fonctions linéaires continues sur $B(M(Z))$, l'espace $\boldsymbol{K}(W, V)$ (resp. $\boldsymbol{F}(W, V)$) est canoniquement isométrique à l'espace des fonctions continues (resp. séparément continues) sur $B(W'')\times Z$ et qui sont linéaires pour la première variable. Soit T un opérateur faiblement compact de W dans V; si ν est une mesure sur $B(W'')\times Z$ dont la réstriction à $\varphi(\boldsymbol{K})$ est nulle, la démonstration de la proposition 8 et du corollaire 9 montre que la réstriction de $\varphi(T)$ au produit $B(W'')\times S(P_Z(\nu))$ est la limite d'une suite de fonctions continues sur $B(W'')\times Z$ et qui sont linéaires pour la première variable. D'aprés le théorème de Lebesgue $\nu(\varphi(T)) = 0$. Ceci montre que $\varphi(T)$ appartient au bipolaire de $\varphi(\boldsymbol{K})$ dans le bidual de $C(B(W'')\times Z)$ et s'identifie par conséquent à un élément de $\boldsymbol{K}''(W, V)$. Si de plus tout compact faible de $C(Z)$ est métrisable, la fonction $\varphi(T)$ est de première classe de Baire sur $B(W'')\times Z$, par suite elle est dans $\boldsymbol{K}''_1(W, V)$. L'assertion (b) s'établit comme plus haut en invoquant cette fois la proposition 10. ■

Dans le théorème précédent on peut remplacer $C(Z)$ par un espace de Banach V tel qu'il existe une partition affine de l'identité dans $B(V')$. C'est le cas pour un espace de Lindenstrauss. De plus, si le résultat est vrai pour un espace V, il est vrai pour tout facteur direct dans V. Comme il est par ailleurs invariant par isomorphie linéaire, on peut finalement énoncer:

Théorème 12. *Soient W un espace de Banach et V un espace isomorphe à un facteur direct dans un espace de Lindenstrauss. Alors l'espace $\boldsymbol{F}(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{K}''(W, V)$.*

Proposition 13. *Soit V un espace de Banach tel que pour tout espace reflexif W l'espace $\boldsymbol{F}(W, V)$ soit canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{K}''_1(W, V)$. Alors tout compact faible de V est métrisable.*

Démonstration. Quitte à remplacer A par $\overline{\mathrm{conv}}(A\cup -A)$ on peut supposer que A est un convexe symétrique faiblement compact. D'aprés le théorème de factorisation de [1] il existe un espace réflexif W et un opérateur T de $\boldsymbol{L}(W, V)$ tels que $A = \overline{T(B(W))}$. D'après l'hypothèse il existe une suite $(T_n)_{n\in N}$ d'opérateurs compacts de W dans V qui converge vers T pour la topologie faible d'opérateurs. Soient $A_n = \overline{T_n(B(W))}$ et $A'_n = \mathrm{conv}(\bigcup_{p\leqslant n} A_p)$; la suite $(A'_n)_{n\in N}$ est évidemment croissante, et comme chaque A_n est normiquement compact, il en est de même pour A'_n.

D'après ce qui précéde on a donc $A \subset \overline{\bigcup_n A'_n}$ où l'adhérence est prise au sens de la topologie faible de V. Mais $\bigcup_n A'_n$ étant convexe, ses adhérences faible et forte coincident. Le compact faible A étant séparable est donc métrisable. ■

Si W est un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure μ, l'espace W' est isométrique à un espace $C(X)$ où X est un compact hyperstonien. Le résultat suivant est sans doute connu.

LEMME 14. *Soient $W = L^1(\mu)$ et $W' = C(X)$; alors X est le support d'une mesure si et seulement si la mesure μ est σ-finie.*

Démonstration. Si μ n'est pas σ-finie, l'espace $L^1(\mu)$ contient un facteur direct isométrique á $l^1(\Gamma)$ relatif à un ensemble Γ non dénombrable. L'espace W' contient donc un facteur direct isométrique à $l^\infty(\Gamma)$. Ce dernier contient des sous-espaces réflexifs non séparable, par exemple $l^2(\Gamma)$. D'aprés la proposition 8, le compact X n'est pas le support d'une mesure. Inversement, si μ est σ-finie, l'espace $L^1(\mu)$ contient une partie faiblement compacte totale [4]. Soit A cette partie; A est faiblement compacte dans $M(X)$ et il existe par conséquent une mesure ν sur X telle que $A \subset L^1(\nu)$. De plus, A est vaguement totale dans $M(X)$, par suite, la réunion des supports des mesures de A est dense dans X, ce qui implique que le support de ν est tout X. ■

En reprenant les méthodes du théorème 11 on a:

THÉORÈME 15. *Soient $W = L^1(\mu)$ et V un espace de Banach; il existe une isométrie canonique de $\boldsymbol{F}(W, V)$ dans $\boldsymbol{K}''(W, V)$. Si de plus μ est σ-finie, l'espace $\boldsymbol{F}(W, V)$ est canoniquement isométrique à un sous-espace de $\boldsymbol{K}_1''(W, V)$.*

En reprenant la démonstration de la proposition 13 on obtient le résultat suivant dû à Grothendieck et dont la preuve habituelle repose sur la propriété de Dunford–Pettis.

COROLLAIRE 16. *L'image par une application faiblement compacte d'un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure σ-finie est séparable.*

Bibliographie

[1] W. J. Davies, W. B. Johnson, T. Figiel, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*, J. Functional Analysis 17 (1974), pp. 311–327.

[2] M. Feder, P. Saphar, *Spaces of compact operators and their duals*, Israel J. Math. 21 (1975), pp. 38–49.

[3] J. Holub, *Hilbertian operators and reflexive tensor products*, Pacific J. Math. 36 (1971), pp. 185–194.

[4] J. Lindenstrauss, *Weakly compact sets. Their topological properties and the Banach spaces they generate*, Symposium on infinite dimensional topology, Ann. of Math. Studies 69.

[5] E. Odell, H. Rosenthal, *A double dual characterization of Banach spaces containing l^1*, Israel J. Math. 20 (1975), pp. 375–384.

[6] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand Math. Studies 1966.

[7] W. H. Ruckle, *Reflexivity of $L(E, F)$*, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), pp. 171–174.

[8] C. Stegall, *The Radon–Nikodym property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), pp. 213–223.

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
VILLEURBANNE, FRANCE

Adresse actuelle:
EQUIPE D'ANALYSE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ DE PARIS VI
PARIS, FRANCE

Received November 19, 1976 (1230)