STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Sur les compacts d'interpolation du spectre de $H^\infty(D)$

par

A. DUFRESNOY (Grenoble, Orsay)

Sommaire. Nous donnons ici quelques résultats sur les compacts d'interpolation du spectre de $H^\infty(D)$. En particulier, nous montrons que tout compact d'interpolation infini du spectre de $H^\infty(D)$ contient un exemplaire du compactifié de Stone–Čech de $\boldsymbol{N}$ et que tout fermé du spectre de $H^\infty(D)$ rencontrant une infinité de parts de Gleason de $H^\infty(D)$ contient un compact d'interpolation isométrique.

§ 0. Introduction. Soient D le disque unité ouvert du plan complexe, T le cercle unité du plan complexe et $H^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions analytiques bornées dans D à valeurs complexes. Munie de la norme de la convergence uniforme sur D, $H^\infty(D)$ est une algèbre de Banach; son spectre est son espace de Gelfand. On dit qu'un compact K du spectre de $H^\infty(D)$ est d'*interpolation pour* $H^\infty(D)$ si l'algèbre des restrictions à K de l'algèbre des transformées de Gelfand de $H^\infty(D)$ est l'algèbre de toutes les fonctions continues sur K.

Le but de ce travail est essentiellement de donner des résultats de nature topologique sur les compacts d'interpolation du spectre de $H^\infty(D)$; nous obtenons en particulier le résultat suivant: *Soit K un compact d'interpolation infini du spectre de $H^\infty(D)$; alors K contient un exemplaire de $\beta\boldsymbol{N}$, le compactifié de Stone–Čech de $\boldsymbol{N}$.*

Si m désigne la mesure de Lebesgue sur T, on note $\mathscr{L}^\infty(T)$ l'algèbre des fonctions m-mesurables bornées de T à valeurs complexes munie de la norme de la convergence uniforme sur T et $L^\infty(T)$ l'algèbre quotient de $\mathscr{L}^\infty(T)$ par l'idéal des fonctions de $\mathscr{L}^\infty(T)$ nulles presque partout au sens de la mesure m. Cette algèbre munie de la norme quotient est une algèbre de Banach; la représentation de Gelfand de $L^\infty(T)$ est un isomorphisme isométrique de $L^\infty(T)$ sur l'algèbre des fonctions continues sur son spectre X qui est un espace topologique compact *stonien* (i.e.: un espace topologique où deux ouverts quelconques disjoints ont des adhérences disjointes) donc en particulier un *F-espace* (i.e.: un espace topologique où deux ouverts F_σ disjoints quelconques ont des adhérences disjointes).

D'après le théorème de Fatou, $H^\infty(D)$ est isométriquement isomorphe à *une algèbre uniforme sur X*, le spectre de $L^\infty(T)$ (i.e.: une sous-algèbre de fonctions continues sur X à valeurs dans $\boldsymbol{C}$, fermée pour la norme de la convergence uniforme sur X, contenant les constantes et séparant les points de X).

Dans toute la suite, nous considérerons $H^\infty(D)$ comme une algèbre uniforme sur X.

On montre en fait que $H^\infty(D)$ est *fondamentale sur* X (i.e.: pour tout point $\Phi \in \operatorname{Sp} H^\infty(D)$, il existe une mesure de probabilité *unique* portée par X telle que $\Phi(f) = \int f dm_\Phi$ pour tout $f \in H^\infty(D)$). (Pour plus de précisions cf. [1].)

§ 1. Compacts d'interpolation métrisables. Dans ce premier paragraphe, nous démontrons que *seuls les ensembles finis sont des compacts d'interpolation métrisable du spectre de $H^\infty(D)$.*

Pour cela nous utilisons des lemmes sur les mesures de Radon portées par un F-espace. Ces lemmes sont en fait des conséquences de résultats de Grothendieck [6]. Nous donnons des démonstrations directes de ces lemmes dans le § 5.

Donnons tout d'abord un résultat sur les compacts métrisables du spectre de $H^\infty(D)$; pour cela donnons une définition; si A est une algèbre uniforme sur X, Φ_1 et Φ_2 deux éléments de son spectre, on appelle *distance de Gleason* de Φ_1 à Φ_2 le nombre

$$\varrho(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{\substack{f \in A \\ \|f\| \leqslant 1}} |\Phi_1(f) - \Phi_2(f)|$$

A. M. Gleason a démontré que la relation $\varrho(\Phi_1, \Phi_2) < 2$ est une relation d'équivalence sur le spectre de A. On appelle *part de Gleason du spectre de A* les classes d'équivalence du spectre de A pour cette relation.

PROPOSITION 1. *Tout compact métrisable du spectre de $H^\infty(D)$ ne rencontre qu'un nombre fini de parts de Gleason du spectre de $H^\infty(D)$.* (En fait, il est union finie de compacts chacun inclus dans une seule part de Gleason du spectre de $H^\infty(D)$.)

Démonstration. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ de points du spectre de $H^\infty(D)$ convergeant vers un point x dont la part de Gleason ne rencontre pas $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$. Associons à chaque point x_n sa mesure représentative μ_n portée par la frontière de Silov de $H^\infty(D)$; $\{\mu_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ convergerait faiblement vers μ, mesure représentative de x, qui est singulière par rapport à chaque mesure μ_n ($n \in \boldsymbol{N}$). Mais ceci est en contradiction avec (§ 5, corollaire 1), ce qui démontre la proposition. ▲

THÉORÈME 1. *Il n'existe pas de compact d'interpolation métrisable infini dans le spectre de $H^\infty(D)$.*

Démonstration. Sinon, il existerait une suite $\{x_n\}$ convergente d'interpolation du spectre de $H^\infty(D)$; autrement dit, μ_n désignant *la* mesure représentative de x_n sur la frontière de Silov de $H^\infty(D)$, l'application φ: $H^\infty(D) \to c$ définie par $\varphi(f) = \{\int f d\mu_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ serait surjective donc l'application ψ: $C(X) \to c$ la prolongeant à fortiori, ce qui est en contradiction avec (§ 5, lemme 3). ▲

Il est alors clair, en utilisant l'existence d'un compact d'interpolation dans le spectre de toute algèbre uniforme séparable (cf., par exemple [2]) que:

COROLLAIRE. *Si A est une algèbre uniforme quotient de $H^\infty(D)$, le spectre de A n'est pas métrisable.*

§ 2. Précisions sur la non-métrisabilité de certains compacts du spectre de $H^\infty(D)$. Dans cette deuxième partie, nous allons préciser les résultats précédents. Nous donnons un résultat sur les compacts rencontrant une infinité de parts de Gleason que nous appliquons aux compacts d'interpolation, ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Si K est un compact d'interpolation du spectre de $H^\infty(D)$, alors ou bien K est fini ou bien K contient un exemplaire du compactifié de Stone Čech de $\boldsymbol{N}$.*

Démontrons tout d'abord:

PROPOSITION 2. *Tout compact du spectre de $H^\infty(D)$ rencontrant une infinité de parts de Gleason contient un exemplaire du compactifié de Stone–Čech de $\boldsymbol{N}$.* (En fait, *on peut le choisir de façon à ce que chacun de ses points soit dans une part de Gleason différente*).

Pour cela, nous utilisons le lemme suivant:

LEMME 1. *Soient X un espace topologique compact et $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de Radon sur X deux à deux singulières. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous suite $\{\mu_n^{(\varepsilon)}\}$ de $\{\mu_n\}$ et une suite $U_n^{(\varepsilon)}$ d'ouverts disjoints de X telles que:*

$$|\mu_n^{(\varepsilon)}|(U_n^{(\varepsilon)}) \geqslant (1-\varepsilon)\|\mu_n^{(\varepsilon)}\| \quad \textit{pour tout } n \in \boldsymbol{N}.$$

Démonstration. On peut évidemment se ramener au cas où les mesures μ_n sont de probabilité. Puisque celles-ci sont singulières, il existe $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ des fermés de X disjoints tels que $\mu_n(F_n) \geqslant 1-\varepsilon/2$. On considère alors $\omega_n = \operatorname{Inf}_{O \supset F_n} [\lim_{m \to \infty} \mu_m(O)]$ où O est un ouvert; on a évidemment $\sum_{n \in \boldsymbol{N}} \omega_n \leqslant 1$. Il existe donc un ouvert O_{n_1} et une suite $\mu_{\varphi_1(n)}$ telle que

$$\mu_{\varphi_1(n)}(O_{n_1}) < \varepsilon/4.$$

Choisissons $U_1^{(\varepsilon)}$ un ouvert dont l'adhérence est incluse dans O_{n_1}. On recommence le même procédé avec des ouverts de u complémentaire de $U_1^{(\varepsilon)}$ et des fermés qui sont les intersections de F_n avec le complémentaire de O_{n_1} en prenant $\mu_{\varphi_2(n)}(O_{\varphi_1(n_2)}) < \varepsilon/8$ et ainsi de suite. Le résultat est alors démontré. ▲

Démonstration de la proposition 2. Soit K un compact rencontrant une infinité de parts de Gleason du spectre de $H^\infty(D)$, $\{x_n\}$ une suite de points de K dans des parts de Gleason différentes. On utilise le lemme précédent pour construire des sous suites emboitées $\{\mu_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$, $\{\mu_n^{(1/2)}\}_{n\in\boldsymbol{N}}, \ldots, \{\mu_n^{(1/p)}\}_{n\in\boldsymbol{N}}, \ldots$

Soit alors $\tilde{K} = \bigcap_{p\in\boldsymbol{N}} \overline{\{x_n^{(1/p)}\}_{n\in\boldsymbol{N}}}$; $\tilde{K}$ est évidemment infini (aucune sous-suite de $\{x_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ ne converge d'après la proposition 1); on choisit alors $\{y_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ avec $y_n \in \tilde{K}$. Il est facile de voir que toute suite discrète de $\tilde{K}$ répond à la question. ▲

Démonstration du théorème 2. Puisque $H^\infty(D)$ est fondamentale, d'après le théorème de Wermer–Hoffman–Lumer [7], les parts de Gleason de son spectre sont des points ou des images continues de disques où les fonctions sont "analytiques"; l'intersection d'un compact d'interpolation du spectre de $H^\infty(D)$ avec chaque part de Gleason est dénombrable. D'après le théorème 1, K n'est pas métrisable donc pas dénombrable. K rencontre donc une infinité de parts de Gleason, ce qui permet d'appliquer la proposition 2.

Précisons maintenant le théorème 2 dans le cas où le compact K est d'*interpolation isométrique* (i.e.: quand l'application identique $C(K) \to A/I_K$ est une isométrie, $C(K)$ étant munie de la norme de la convergence uniforme sur K et A/I_K de la norme quotient de A par I_K, l'idéal des fonctions de A qui s'annulent sur K.):

Théorème 2bis. *Soit K un compact d'interpolation isométrique du spectre de $H^\infty(D)$. Alors K est un F-espace.*

Démonstration. Soient O_1 et O_2 deux ouverts F_σ de K disjoints. Il existe deux suites $\{F_i^{(n)}\}$ $(i = 1, 2)$ de fermés de K possèdant les propriétés suivantes

(i) $\bigcup_{n\in\boldsymbol{N}} F_i^{(n)} = O_i$ pour $i = 1, 2$.

(ii) $F_i^{(n+1)}$ est un voisinage, dans K, de $F_i^{(n)}$ pour tout $n\in\boldsymbol{N}$ et pour $i = 1, 2$.

Pour montrer que O_1 et O_2 ont des adhérences disjointes, il suffit de montrer que $\bigcup_{n\in 2\boldsymbol{N}} (F_1^{(n+1)} \setminus F_1^{(n)})$ et $\bigcup_{n\in 2\boldsymbol{N}+1} (F_2^{(n+1)} \setminus F_2^{(n)})$ ont des adhérences disjointes.

On note $C_{2n} = F_1^{(2n+1)} \setminus F_1^{(2n)}$ et $C_{2n+1} = F_2^{(2n+2)} \setminus F_2^{(2n+1)}$.

Remarquons que, grâce au choix des suites $\{F_i^{(n)}\}$, $\overline{C}_n$, l'adhérence de C_n dans K, est ouverte dans $\bigcup_{i\in\boldsymbol{N}} \overline{C}_i$.

Soit une suite $\{g_i\}$ de fonctions continues sur K à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ possédant les propriétés suivantes:

(i) $g_i(C_i) = \{1\}$ pour tout $i\in\boldsymbol{N}$;

(ii) $g_i(C_p) = \{-1\}$ si $p \neq i$, pour tout $i\in\boldsymbol{N}$;

(iii) $\|g_i\|_K = 1$ pour tout $i\in\boldsymbol{N}$.

Soit alors une suite $\{a_i\}_{i\in\boldsymbol{N}}$ de nombres réels positifs strictement tels que $\sum_{i\in\boldsymbol{N}} a_i \leqslant \frac{1}{8}$.

On considère $\{\tilde{g}_i\}$ une suite de fonctions de $H^\infty(D)$ qui prolongent respectivement les éléments de la suite $\{g_i\}$ et dont la norme est inférieure ou égale à $1+a_i^2$. Posons

$$E_n = \Big(\bigcap_{i<n} (\mathrm{Re}\,\tilde{g}_i)^{-1}(]-\infty, 1+a_i[)\Big) \cap \big((\mathrm{Re}\,\tilde{g}_n)^{-1}(]1-a_n, +\infty[)\big) \cap X$$

les ensembles E_n sont des ouverts F_σ disjoints de X et si μ est une mesure représentative d'un point de C_n, $\mu(E_n) > 1-\frac{1}{8}$.

Puisque la frontière de Silov de $H^\infty(D)$ est extremement disconnectée, il existe une fonction g, continue sur ce compact, de norme inférieure ou égale à 1 telle que $g(\bigcup_{n\in 2\boldsymbol{N}} E_n) = \{1\}$ et $g(\bigcup_{n\in 2\boldsymbol{N}+1} E_n) = \{-1\}$. Si μ est la mesure représentative d'un point de C_n, on a

$$\Big|\int g\,d\mu - (-1)^n\Big| \leqslant \tfrac{1}{4}.$$

Puisque $H^\infty(D)$ est fondamentale, on en déduit facilement que $\overline{(\bigcup_{n\in 2\boldsymbol{N}} C_n)} \cap \overline{(\bigcup_{n\in 2\boldsymbol{N}+1} C_n)} = \emptyset$. ▲

§ 3. Sur la richesse du spectre de $H^\infty(D)$ en compacts d'interpolation. Dans le § 2, nous avons montré que si K était un compact rencontrant un nombre fini de parts de Gleason, K ne contenait pas de compacts d'interpolation infini du spectre de $H^\infty(D)$. Nous donnons ici d'une part un résultat qui montre que dans le cas contraire, K contient des compacts d'interpolation:

Théorème 3. *Soit K un compact du spectre de $H^\infty(D)$ rencontrant une infinité de parts de Gleason du spectre de $H^\infty(D)$; alors K contient un compact d'interpolation infini* (ce dernier peut d'ailleurs être choisi isométrique).

D'autre part, on a aussi, plus particulièrement le résultat suivant:

Théorème 4. *Soient P une part de Gleason du spectre de $H^\infty(D)$ non réduite à un point et $\{x_n\}$ une suite de points de P dont l'adhérence n'est pas incluse dans P; alors il existe une sous-suite $\{y_n\}$ de $\{x_n\}$ telle que $H^\infty(D)/\{y_n\} = l^\infty$.*

Les démonstrations de ces deux résultats étant très similaires, nous nous bornerons à démontrer le théorème 3. Sa démonstration est basée sur les deux lemmes suivants:

Le premier est une conséquence immédiate du fait que $H^\infty(D)$ est fermée dans $L^\infty(T)$ pour la topologie faible de dual de $L^1(T)$:

LEMME 1. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $H^\infty(D)$ qui converge de façon ponctuelle bornée sur la frontière de Silov de $H^\infty(D)$ vers une fonction f. Alors il existe $g \in H^\infty(D)$ telle que g soit égale à f presque partout pour la mesure représentative de l'origine du disque D.*

Le second a été mis en évidence dans [3]:

LEMME 2. *Soient K un compact d'interpolation du spectre d'une algèbre uniforme de type c* (i.e.: telle que l'application identique $C(K) \to A/I_K$ soit de pente inférieure à c), *et $K_1, \ldots, K_n$ une partition finie de K en compacts, alors il existe $e_1, \ldots, e_n$ éléments de A tels que*

(i) $e_i(K_j) = \delta_{ij}$,

(ii) $\sum_{i=1}^{n} |e_i(x)| < c^2$ *pour tout* $x \in \mathrm{Sp}\, A$.

Démonstration du théorème 3. D'après le théorème 2, il nous suffit de démontrer ce résultat pour un exemplaire de $\beta\boldsymbol{N}$, le compactifié de Stone-Čech de $\boldsymbol{N}$ dont les points sont dans des parts de Gleason du spectre de $H^\infty(D)$ différentes.

Choisissons deux points x_1 et x_2 de $\beta\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}$ différents; il existe une fonction $f_1 \in H^\infty(D)$ telle que $\|f_1\| \leqslant 1+\alpha_1$, $f_1(x_1) = 1$, $f_1(x_2) = -1$.

En utilisant le lemme 2, il existe e_1 et r_1 telles que

$$e_1(x_1) = 1, \quad e_1(x_2) = 0, \quad r_1(x_1) = 0, \quad r_1(x_2) = 1,$$

et

$$|e_1(\lambda)| + |r_1(x)| \leqslant (1+\alpha_1)^2 \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{Sp}\, H^\infty(D).$$

Soit alors $x_3 \in e_1^{-1}(0) \cap r_1^{-1}(1)$, $x_3 \neq x_2$ et $x_3 \in \beta\boldsymbol{N}\setminus\boldsymbol{N}$. Il existe comme précedemment $f_2 \in H^\infty(D)$

$$\|f_2\| \leqslant 1+\alpha_2, \quad f_2(x_2) = 1, \quad f_2(x_3) = -1$$

d'après le lemme 2, il existe e_2' et r_2' comme précedemment et on pose $e_2 = e_2' r_1$ et $r_2 = r_2' \times r_1$. On construit ainsi grâce à un choix convenable de la suite $\{\alpha_n\}$, une suite $\{e_n\}$ de fonctions de $H^\infty(D)$ telles que

(i) $e_i(x_j) = \delta_{ij}$,

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} |e_i(x)| > \frac{5}{4}$ pour tout $x \in \mathrm{Sp}\, H^\infty(D)$;

le lemme 1 et un argument de série permettent alors d'affirmer que la suite $\{x_n\}$ est d'interpolation, ce qui achève la démonstration. ▲

§ 4. Sur la généralisation des résultats précédents. Dans ce chapitre nous donnons un exemple d'une sous algèbre A de $H^\infty(D)$ dont la frontière de Silov est la frontière de Silov de $H^\infty(D)$ telle que tous les résultats précédents sont faux pour A; ensuite nous donnerons quelques généralisations des résultats précédents. Tout d'abord:

Il existe A une algèbre uniforme sur la frontière de Silov de $H^\infty(D)$ tel que son spectre contienne des compacts d'interpolation stricte métrisables rencontrant une infinité de parts de Gleason du spectre de A.

Soit ψ une application continue de D dans une fibre du spectre de $H^\infty(D)$ telle que:

(i) pour tout $f \in H^\infty(D)$, $\hat{f} \circ \psi \in H^\infty(D)$,

(ii) pour tout $f \in H^\infty(D)$, il existe $g \in H^\infty(D)$ avec

$$\|g\| < \|f\| \quad \text{et} \quad \hat{g} \circ \psi = f.$$

L'existence d'un tel ψ est démontré dans un article de Shark [9] (cf. aussi [7]). On prend alors pour B l'algèbre des fonctions de $H^\infty(D)$ telles que $\hat{f} \circ \psi$ est constant.

Cette algèbre sépare les points de la frontière de Silov de $H^\infty(D)$ (cf. par exemple [4]), ceci est vrai à fortiori pour l'algèbre A des fonctions de $H^\infty(D)$ telles que $\hat{f} \circ \psi \in A(\bar{D})$ ($A(\bar{D})$ désignant l'algèbre des fonctions continues sur $\bar{D}$ analytiques dans D).

A est donc une algèbre uniforme sur la frontière de Silov de $H^\infty(D)$.

D'autre part, la restriction à A de l'application qui, à tout $f \in H^\infty(D)$ associe $\hat{f} \circ \psi$ est un homomorphisme surjectif de $\boldsymbol{C}$-algèbre de A sur $A(\bar{D})$. Il existe donc une injection continue φ de $\bar{D}$ dans le spectre de A; l'hypothèse (ii) sur φ met en évidence le fait que les points de $\varphi(\bar{D}\setminus D)$ sont dans des parts de Gleason différentes et que tout compact de $\varphi(\bar{D}\setminus D)$ est un compact d'interpolation stricte pour l'algèbre A.

Pour tout compact K dénombrable infini de $\bar{D}\setminus D$, $\varphi(K)$ est un compact d'interpolation stricte métrisable rencontrant une infinité de points de Gleason du spectre de A.

Nous allons maintenant donner une généralisation du théorème 1 (ainsi que de la proposition 1).

DÉFINITION 1. Soient A une algèbre uniforme sur un espace topologique compact X et K un fermé du spectre de A. On appelle *choix continu de mesures représentatives au dessus de K* une application continue S de K dans $M_R(X)$ (l'ensemble des mesures représentatives des points du spectre de A portées par X) telle que $S(k)$ soit une mesure représentative de k pour A.

DÉFINITION 2. Soient A une algèbre uniforme sur un espace topologique compact et Φ un élément du spectre de A. On dit que Φ a la *propriété S* si, pour tout compact K dénombrable ayant pour point d'accumulation le point Φ, il existe un compact K' inclus dans K ayant Φ pour point d'accumulation et un choix continu de mesures représentatives au dessus de K'.

Remarques. On démontre très facilement que Φ a la propriété S dans chacun des cas suivants:

(i) l'ensemble des mesures représentatives de Φ est faiblement métrisable (ce qui est le cas si cet ensemble est compact en norme);

(ii) Si l'ensemble des mesures de Jensen de Φ est faiblement métrisable.

D'autre part les lemmes de mesures que nous utilisons sont valables pour des F-espaces, ce qui nous permet de donner les résultats:

PROPOSITION 1'. *Soit A une algèbre uniforme sur un F-espace compact telle que tous les points de son spectre possèdent la propriétés S. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *K est un compact métrisable;*

(ii) *K est union finie de compacts chacun inclus dans une seule part de Gleason du spectre de A.*

THÉORÈME 1'. *Soient A une algèbre uniforme sur un F-espace compact telle que tous les points de son spectre possèdent la propriété S et K un compact d'interpolation métrisable du spectre de A. Alors K est fini.*

On a de même

THÉORÈME 2'. *Soient A une algèbre fondamentale sur un F-espace et K un compact d'interpolation de son spectre alors K contient un exemplaire du compactifié de Stone–Čech de $\boldsymbol{N}$.*

THÉORÈME 2bis'. *Soient A une algèbre uniforme sur un F-espace compact, K un compact d'interpolation isométrique de son spectre et un choix continu de mesures représentatives au dessus de K alors K est un F-espace.*

§ 5. Quelques lemmes de mesures de Radon sur les F-espaces. Ces lemmes, qu'il est facile de généraliser au cas où les mesures ne sont pas positives, sont une conséquence de résultats de [6] et d'un résultat cité dans [1] qui dit que si μ est une mesure de Radon portée par un F-espace, son support est, en fait, un espace stonien. Nous en donnons une démonstration directe:

DÉFINITION 1. Soit X un espace topologique compact X et $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de Radon sur X. On dit que $\{\mu_n\}$ tend *faiblement* (ou vaguement) *vers une mesure de Radon* μ si, pour tout $f \in C(X)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu$.

LEMME 1. *Soit X un F-espace compact, $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de Radon positives tendant faiblement vers une mesure de Radon μ. Pour tout ensemble borélien E de X, on a:* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E) = \mu(E)$.

Démonstration.

(a) Cas où E est un fermé de X.

On voit facilement que, puisque E est un fermé de X, $\overline{\lim}\, \mu_n(E) \leqslant \mu(E)$. Supposons que $\underline{\lim}\, \mu_n(E) \neq \mu(E)$; on a alors $\underline{\lim}\, \mu_n(E) = \mu(E) - a$ où $a > 0$. Pour tout ouvert O contenant E on a $\overline{\lim}\, \mu_n(O \setminus E) \geqslant a$.

En particulier, $\overline{\lim}\, \mu_n(X \setminus E) \geqslant a$. Il existe donc Ω_1 un ouvert F_σ de X dont l'adhérence ne rencontre pas E et une mesure μ_{n_1} telle que $\mu_{n_1}(\Omega_1) \geqslant a/2$.

On considère alors $O_2 = X \setminus \bar{\Omega}_1$. C'est un ouvert de X contenant E; comme précédemment, il existe Ω_2 et μ_{n_2} tels que $\mu_{n_2}(\Omega_2) \geqslant a/2$ avec Ω_2 ouvert F_σ de X dont l'adhérence ne rencontre pas E et $n_2 \geqslant n_1$.

Il existe donc une suite $\{\mu_{\varphi(n)}\}$ de mesures de Radon tendant faiblement vers μ et une suite $\{\Omega_n\}$ d'ouverts F_σ de X disjoints telles que $\mu_{\varphi(n)}(\Omega_n) \geqslant a/2$. On considère alors des parties infinies A_p de $\boldsymbol{N}$ telles que $\boldsymbol{N} = \bigcup_{p \in \boldsymbol{N}} A_p$ et on pose $\omega_p = \bigcup_{n \in A_p} \Omega_n$. On voit que les ensembles ω_p sont des ouverts F_σ disjoints de X et que $\overline{\lim}\, \mu_n(\bar{\omega}_p) \geqslant a/2$ donc, puisque $\bar{\omega}_p$ est fermé, $\mu(\bar{\omega}_p) \geqslant a/2$, ce qui est en contradiction avec le fait que μ soit bornée.

(b) Cas général.

Soit E un ensemble borélien. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert O tel que $F \subset E \subset O$ et $\mu(O \setminus F) < \varepsilon$. On a alors

$$\mu(F) \leqslant \underline{\lim}\, \mu_n(E) \leqslant \overline{\lim}\, \mu_n E \leqslant \mu(O);$$

la suite $\{\mu_n(E)\}$ admet donc une limite qui est $\mu(E)$. ▲

COROLLAIRE. *Soit X un F-espace compact et $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de Radon positives. Si μ est une mesure de Radon, non nulle, singulière avec chacune des mesures μ_n, $\{\mu_n\}$ ne tend pas faiblement vers μ.*

Démonstration. Puisque μ est singulière avec chacune des mesures μ_n il existe J un ensemble borélien de X tel que $\mu_n(J) = 0$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ et $\mu(\complement_X J) = 0$; puisque μ n'est pas nulle, et que μ ne peut être que positive si $\{\mu_n\}$ tend faiblement vers μ, $\mu(J) > 0$; d'après le lemme 1, $\{\mu_n\}$ ne tend pas faiblement vers μ. ▲

LEMME 2. *Soient X un F-espace compact, $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de Radon positives tendant faiblement vers une mesure de Radon μ et $\nu = \sum \frac{1}{2^n} \mu_n + \mu$. Si $\{\mu_n\}$ tend faiblement vers μ, alors, pour toute fonction $g \in L^\infty(d\nu)$, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\int g d\mu_n\Big] = \int g d\mu.$$

Démonstration. D'après le théorème de Lusin, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F de X tel que $\mu\big(\complement_X(F)\big) < \varepsilon$ et tel que la restriction de g à F soit continue. Soit alors $\tilde{g}$ un prolongement continu de g/F à X tel que $\|\tilde{g}\| \leqslant \|g\|$. On a:

$$\left|\int g d\mu_n - \int g d\mu\right| \leqslant \left|\int g d\mu_n - \int \tilde{g} d\mu_n\right| + \left|\int \tilde{g} d\mu_n - \int \tilde{g} d\mu\right| + \left|\int \tilde{g} d\mu - \int g d\mu\right|.$$

Le troisième terme est, par hypothèse, plus petit que $\varepsilon\|g\|$; le premier plus petit que $2\varepsilon\|g\|$ à partir d'un certain rang d'après le lemme 1; quand au second il tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque $\{\mu_n\}$ tend faiblement vers μ. ▲

LEMME 3. *Soient X un F-espace compact, $\{\mu_n\}$ une suite de mesures de Radon positives tendant faiblement vers une mesure de Radon μ. L'application ψ de $C(X)$ dans l'espace vectoriel c des suites convergentes à valeurs dans $\boldsymbol{C}$ définie par $\psi(f) = \{\int f d\mu_n\}$ n'est pas surjective.*

Démonstration. Soit S_n la suite convergente définie par $S_n(p) = 0$ si $p > n$ et $S_n(p) = 1$ si $p \leqslant n$. Si l'application ψ qui est linéaire et continue était surjective, d'après le théorème de l'application ouverte, il existerait une suite $\{f_n\}$ d'éléments de $C(X)$ tels que:

(a) $\psi(f_n) = S_n$;

(b) $\|f_n\| \leqslant k$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$.

Soit alors g une valeur d'adhérence de $\{f_n\}$ dans $L^\infty(d\nu)$ où

$$\nu = \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n.$$

On vort que $\int g d\mu_n = 1$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ et $\int g d\mu = 0$, ce qui est en contradiction avec le lemme 2. ▲

Bibliographie

[1] W. G. Bade et P. C. Curtis Jr, *Embedding theorems for commutative Banach algebras*, Pacific J. Math. (1966), pp. 391–409.

[2] A. Bernard, *Caractérisations de certaines parties d'un espace compact muni d'un espace vectoriel ou d'une algèbre de fonctions continues*, Ann. Inst. Fourier, 17 (1968) Fasc. 2, pp. 359–382.

[3] — *Algèbres quotients d'algèbres uniformes*, C. R. Acad. Sci. 272, Série A (1971), pp. 1101" 1104.

[4] J. Détraz, *Sous algébres d'algébres de Banach*, ibidem 264 (1967), pp. 187–189.

[5] A. Dufresnoy, *Compacts d'interpolation métrisables de certaines algèbres de fonctions*, ibidem 269 Série A (1969) pp. 1144–1146.

[6] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type $C(K)$*, Canad. J. Math. Vol. 3 (1953), pp. 129–173.

[7] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Englewood Cliffs, 1962.

[8] — *Bounded analytic functions and Gleason parts*, Ann. Math. 86 (1967), pp. 74–111.

[9] I. J. Schark, *The maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions*, J. Math. Mech. (1961), pp. 735–746.

Received August 25, 1971 (413)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Hereditarily periodic distributions

by

KRYSTYNA SKÓRNIK (Katowice)

Abstract. A periodic distribution f of q real variables $\xi_1, \ldots, \xi_q$ is called *hereditarily periodic*, iff there is a periodic distribution g such that $f = \dfrac{\partial^q g}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_q}$. Among all g satisfying this equality there is always exactly one which is hereditarily periodic. Hereditarily periodic distributions can be also characterized by their Fourier coefficients or by the integrals over their periods. Every periodic distribution is a sum of hereditarily periodic distributions of some of variables $\xi_1, \ldots, \xi_q$. An estimation of Fourier coefficients is given. Also a concept of a smooth integral is introduced as a substitute for the integral from a fixed to a variable point, which cannot be used in the case of distributions.

Introduction. In this paper we are concerned with distributions in the q-dimensional Euclidean space, which admit their values in a fixed Banach space $\mathscr{X}$. The q-dimensional Euclidean space is denoted by $\boldsymbol{R}^q$ and its points by $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$. Moreover, we shall use the following notation: $x+y = (\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_q+\eta_q)$, $x-y = (\xi_1-\eta_1, \ldots, \xi_q-\eta_q)$, $\lambda x = (\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_q)$, $x \cdot y = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_q\eta_q$, $xy = (\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_q\eta_q)$, $|x| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_q^2}$, where $y = (\eta_1, \ldots, \eta_q)$, and λ is a real number.

By *hereditarily periodic distributions* we understand periodic distributions which are derivatives of periodic distributions.

In this paper we characterize the hereditarily periodic distributions by a few properties, namely:

A periodic distribution is hereditarily periodic, if for every $p \in \boldsymbol{B}^q$ with at least one vanishing coordinate, the corresponding Fourier coefficient is equal to 0 (v. Theorem 12).

A periodic distribution is hereditarily periodic, iff $\int_0^1 f(x)\,dx^{e_i} = 0$ for $i = 1, \ldots, q$ (v. Theorem 15).

The real valued functions of the class L^p ($p \geqslant 1$) form a particular class of distributions. They are hereditarily periodic, iff they satisfy a certain minimality condition (v. Theorem 11).

Every periodic distribution f whose values are in $\mathscr{X}$ can be expanded into a Fourier series

$$f = \sum_{p \in \boldsymbol{B}^q} c_p E_p,$$