ACTA ARITHMETICA
LXXXVII.2 (1998)

Caractérisation d'un ensemble généralisant l'ensemble des nombres de Pisot

par

TOUFIK ZAÏMI (Riyadh)

1. Introduction. Soient K un corps de nombres et θ un entier algébrique de module > 1 et de polynôme minimal $\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ sur K. Alors θ est dit *K-nombre de Pisot* si pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ le polynôme $\sigma\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ possède une unique racine de module > 1 et aucune racine de module 1. Ces nombres ont été définis par A. M. Bergé et J. Martinet [2]. Comme dans [2], on représente un K-nombre de Pisot θ dans l'algèbre $A = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$, où (r_1, r_2) désigne la signature du corps K, par la suite $(\theta_\sigma)_\sigma$ de ses conjugués de module > 1 et on note S_K leur ensemble dans A. D'après le théorème 1 de [7], l'ensemble S_K est fermé dans A seulement lorsque $K = \mathbb{Q}$ ou bien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d \in \mathbb{Z}^-$. On peut espérer obtenir dans A un ensemble fermé d'entiers algébriques généralisant l'ensemble $S_{\mathbb{Q}}$ en rajoutant aux éléments de S_K les points limites suivant la preuve du théorème 1 de [7] et l'on obtient alors un ensemble Σ_K qu'on peut définir comme étant l'ensemble des entiers algébriques θ de module > 1 tels que pour tout plongement σ le polynôme $\sigma\,\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ admet au plus une racine de module > 1 et aucune racine de module 1. L'ensemble Σ_K coïncide avec l'ensemble S_K seulement lorsque $K = \mathbb{Q}$ ou bien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ où $d < 0$ et dans ces cas il est fermé. On donne ici une caractérisation de cet ensemble.

2. Les résultats. La caractérisation suivante de l'ensemble $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ est dûe à C. Pisot :

THÉORÈME A [4]. *Soit θ un nombre complexe de module > 1. Alors $\theta \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$ si et seulement si il existe un nombre complexe non nul λ et une suite $(a_n)_n$ d'entiers de $\mathbb{Q}$ tels que*

$$\sum_{n\geq 0} (\lambda\theta^n - a_n)^2 < \infty.$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11R06.

Une autre caractérisation de l'ensemble $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ démontrée par C. Pisot et T. Vijayaraghavan est la suivante :

Théorème B [5]. *Soit θ un nombre complexe algébrique de module > 1. Alors $\theta \in \Sigma_{\mathbb{Q}}$ si et seulement si il existe un nombre complexe non nul λ et une suite $(a_n)_n$ d'entiers de $\mathbb{Q}$ tels que*

$$\lim_n (\lambda\theta^n - a_n) = 0.$$

Avec les notations précédentes et si on représente dans A un élément θ de Σ_K par la suite $(\theta_\sigma)_\sigma$ où θ_σ est soit la racine de module > 1 du polynôme $\sigma \operatorname{Irr}(\theta, K, z)$ lorsqu'elle existe, soit 0, on obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $\theta \in \Sigma_K$; il existe alors un nombre complexe non nul λ dans $K(\theta)$ et une suite $(a_n)_n$ d'entiers de K tels que*

$$\sum_\sigma \sum_{n\geq 0} |\sigma\lambda\theta_\sigma^n - \sigma a_n|^2 < \infty.$$

Ce théorème a été prouvé pour l'ensemble S_K lorsque le corps K est totalement réel dans [3] et la preuve donnée allait dans le sens de l'application de l'algorithme de Schur. On donne ici une preuve simple de ce résultat. De la dernière inégalité on déduit $\lim_n |\sigma\lambda\theta_\sigma^n - \sigma a_n| = 0$ pour tout σ et par suite le théorème 1 montre une des implications des théorèmes A et B.

Réciproquement, si d désigne le degré du corps K sur $\mathbb{Q}$ on a alors :

Théorème 2. (i) *Soient d nombres complexes $(\theta_\sigma)_\sigma$ tels que $|\theta_\sigma| > 1$ ou bien $\theta_\sigma = 0$. On suppose l'existence d'une suite $(a_n)_n$ d'entiers de K et de d nombres complexes $(\lambda_\sigma)_\sigma$ tels que $\prod_\sigma \lambda_\sigma \neq 0$ et $\sum_{\sigma\in G} \sum_{n\geq 0} |\lambda_\sigma\theta_\sigma^n - \sigma a_n|^2 < \infty$. Alors $\theta_\sigma \in \Sigma_{\sigma K}$ pour tout plongement σ tel que $|\theta_\sigma| > 1$.*

(ii) *Soient d nombres complexes algébriques $(\theta_\sigma)_\sigma$ tels que $|\theta_\sigma| > 1$ ou bien $\theta_\sigma = 0$. On suppose l'existence d'une suite $(a_n)_n$ d'entiers de K et de d nombres complexes $(\lambda_\sigma)_\sigma$ tels que $\prod_\sigma \lambda_\sigma \neq 0$ et $\lim_n(\lambda_\sigma\theta_\sigma^n - \sigma a_n) = 0$ pour tout σ. Alors $\theta_\sigma \in \Sigma_{\sigma K}$ pour tout plongement σ tel que $|\theta_\sigma| > 1$.*

Le théorème 2(i) a été également prouvé pour l'ensemble S_K lorsque le corps K est totalement réel dans [3].

3. Preuve des théorèmes

Preuve du théorème 1. Avec les notations précédentes, soient $\operatorname{Irr}(\theta, K, z) = z^s - u_1 z^{s-1} + u_2 z^{s-2} + \ldots + (-1)^s u_s$ et $\alpha_{1,\sigma}, \alpha_{2,\sigma}, \ldots, \alpha_{s,\sigma}$ les racines du polynôme $\sigma \operatorname{Irr}(\theta, K, z)$. Par induction sur les identités de Newton : $a_{k,\sigma} = (\sigma u_1)\, a_{k-1,\sigma} - (\sigma u_2)\, a_{k-2,\sigma} + \ldots + (-1)^{k+1} k \sigma u_k$, où $a_{k,\sigma} = \alpha_{1,\sigma}^k + \alpha_{2,\sigma}^k + \ldots + \alpha_{s,\sigma}^k$ et $k \geq 1$, on obtient alors $a_{k,\sigma} = \sigma a_k$ où $a_k = a_{k,I}$ est un entier de K, I désignant l'identité de $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

La série $\sum_{n\geq 0} |\sigma\lambda\theta_\sigma^n - \sigma a_n|^2$ où θ_σ désigne ou bien la racine de module > 1 du polynôme $\sigma \operatorname{Irr}(\theta, K, z)$ lorsqu'elle existe ou bien 0 et où $\lambda = 1$, converge alors comme une série géométrique pour tout σ; d'où le résultat.

Preuve du théorème 2. (i) Considérons le déterminant

$$\Delta_{n,\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma a_0 & \sigma a_1 & \dots & \sigma a_n \\ \sigma a_1 & \sigma a_2 & \dots & \sigma a_{n+1} \\ \vdots & & & \\ \sigma a_n & \sigma a_{n+1} & \dots & \sigma a_{2n} \end{vmatrix}.$$

Le développement de $\Delta_{n,\sigma}$ montre que les $(\Delta_{n,\sigma})_\sigma$ sont des entiers algébriques conjugués sur $\mathbb{Q}$. De manière identique à la preuve dans [4], on obtient la majoration $|\Delta_{n,\sigma}| < 1$ à partir d'un certain rang N ne dépendant pas de σ et par suite les $(\Delta_{n,\sigma})_\sigma$ sont tous nuls à partir d'un certain rang. Le critère de rationalité de Kronecker montre alors que la série $\sum_{n\geq 0} \sigma a_n z^n$ est récurrente pour tout plongement σ. Le lemme de Fatou généralisé [1] montre qu'on peut écrire la série $\sum_{n\geq 0} \sigma a_n z^n$ sous la forme $\sum \sigma a_n z^n = R_\sigma(z)/Q_\sigma(z)$ où R_σ et Q_σ sont deux polynômes à coefficients entiers de σK, premiers entre eux et tels que $Q_\sigma(0) = 1$. Soit f_σ la fonction définie par

$$f_\sigma(z) = \frac{\lambda_\sigma}{1 - \theta_\sigma z} - \sum_{n\geq 0} \sigma a_n z^n = \sum_{n\geq 0} (\lambda_\sigma \theta_\sigma^n - \sigma a_n) z^n \quad \text{lorsque } |\theta_\sigma| > 1.$$

Comme cette fonction a un rayon de convergence au moins égal à 1, le polynôme Q_σ admet une seule racine $1/\theta_\sigma$ de module < 1 et comme f_σ est sans pôle de module 1, les autres racines de Q_σ sont de module > 1. Soit P_σ le polynôme unitaire à coefficients entiers de σK défini par $P_\sigma(z) = z^q Q_\sigma(1/z)$ où q est le degré de Q_σ. Si $\theta_\sigma = 0$ alors les racines de P_σ sont toutes de module < 1 et si $|\theta_\sigma| > 1$ alors θ_σ est la seule racine de module > 1 du polynôme P_σ, ses autres racines sont de module < 1. Si on note $R(z)/Q(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ alors

$$\frac{\sigma R(z)}{\sigma Q(z)} = \sum_{n\geq 0} \sigma a_n z^n = \frac{R_\sigma(z)}{Q_\sigma(z)}.$$

Comme les fractions $\sigma R/\sigma Q$ et R_σ/Q_σ sont irréductibles on déduit que Q_σ divise σQ et σQ divise Q_σ. De l'égalité $Q_\sigma(0) = \sigma Q(0) = 1$ on déduit $Q_\sigma(z) = \sigma Q(z)$, d'où le résultat.

(ii) Soit $\operatorname{Irr}(\theta_\sigma, \sigma K, z) = \sigma u_0 z^k + \sigma u_1 z^{k-1} + \ldots + \sigma u_k$ le polynôme minimal de θ_σ sur σK, choisi tel que les $(u_i)_{0\leq i\leq k}$ soient des entiers de K. Le polynôme P défini par $P(z) = \prod_\sigma \sigma^{-1} \operatorname{Irr}(\theta_\sigma, \sigma K, z)$ où

$$\sigma^{-1} \operatorname{Irr}(\theta_\sigma, \sigma K, z) = u_0 z^k + u_1 z^{k-1} + \ldots + u_k,$$

est alors à coefficients entiers de K. De l'égalité $\sigma q_0 + \sigma q_1 \theta_\sigma + \sigma q_2 \theta_\sigma^2 + \ldots + \sigma q_s \theta_\sigma^s = 0$ où les $(q_i)_{0\leq i\leq s}$ sont tels que $P(z) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_s z^s$, on déduit $\lambda_\sigma \sum \sigma q_i \theta_\sigma^{i+n} = 0$. Si $\varepsilon_{\sigma,j} = \lambda_\sigma \theta_\sigma^j - \sigma a_j$ où $(j,n) \in \mathbb{N}^2$ alors

$$\sum_{i=0}^{s} \sigma q_i \sigma a_{i+n} = -\sum_{i=0}^{s} \sigma q_i \varepsilon_{\sigma,i+n}.$$

De l'hypothèse on déduit alors l'existence d'un rang N à partir duquel les entiers algébriques conjugués $(\sigma \sum_{i=0}^{s} q_i a_{i+n})_\sigma$ sont tous de module < 1 et donc nuls. La série $\sum_{n\ge 0} \sigma a_n z^n$ est alors récurrente pour tout plongement σ et la suite de la preuve est identique à celle du théorème 2(i).

L'hypothèse $\lim_n(\lambda_\sigma \theta_\sigma^n - \sigma a_n) = 0$ suffit pour que la fonction f_σ définie dans la preuve du théorème 2(i) soit sans pôle de module 1.

Remarque. Dans l'espoir d'obtenir des ensembles fermés d'entiers algébriques généralisant l'ensemble $S_{\mathbb{Q}}$, on peut enlever les points limites de l'ensemble S_K suivant la preuve du théorème 1 de [7] en rajoutant une hypothèse du type $\theta \in S_K$ et $K \subset \mathbb{Q}(\theta)$. Toutefois d'après [6], si K est un corps quadratique contenant une racine de l'unité non réelle j alors la suite $(\theta_n)_n$ définie par $|\theta_n| > 1$ avec θ_n racine du polynôme $z^n(z^2-z-1)+j(z^2-1)$ est une suite de K-nombres de Pisot qui vérifie $K \subset \mathbb{Q}(\theta_n)$ et converge vers le K-nombre de Pisot $\theta = (1+\sqrt{5})/2$ qui lui ne vérifie pas l'hypothèse $K \subset \mathbb{Q}(\theta)$.

Bibliographie

[1] B. Benzaghou, *Anneaux de Fatou*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, Théorie des nombres, 9-ième année (1968/69), no. 9, 8 p.

[2] A. M. Bergé et J. Martinet, *Notions relatives de régulateurs et de hauteurs*, Acta Arith. 54 (1989), 155–170.

[3] M. J. Bertin, *K-nombres de Pisot et de Salem*, ibid. 68 (1994), 113–131.

[4] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 7 (1938), 205–248.

[5] T. Vijayaraghavan, *On the fractional parts of the powers of a number* (*II*), Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1941), 349–357.

[6] T. Zaïmi, *Sur les nombres de Pisot relatifs*, thèse de l'université Paris 6, Mai 1994.

[7] —, *Sur la fermeture de l'ensemble des K-nombres de Pisot*, Acta Arith. 83 (1998), 363–367.

Department of Mathematics
King Saud University
P.O. Box 2455
Riyadh 11451, Saudi Arabia
E-mail: zaimitou@ksu.edu.sa

Reçu le 8.12.1997 (3313)