

by (10). We suppose that there is no homogeneous prime ideal \mathfrak{p} which satisfies the assertion for n . We consider the ideals $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ which are defined in Proposition 2 for the ideal $I^{(n)}$. Then for all j , $1 \leq j \leq s$,

$$v(\mathfrak{p}_j(\omega)) < (\lambda/4(8d)^{n-1})d^{l_1}t^{-nl_1}N^{m-n}M \cdot N(\mathfrak{p}_j) \\ + (\lambda/4(8d)^{n-1}n\mu)t^{-(n-1)l_1}N^{m-n+1} \cdot B(\mathfrak{p}_j).$$

By the equalities in Proposition 2, we have

$$v(I^{(n)}(\omega)) = v(b) + \sum_{j=1}^s k_j v(\mathfrak{p}_j(\omega)) \\ < v(b) + (\lambda/4(8d)^{n-1})d^{l_1}t^{-nl_1}N^{m-n}M \cdot N(I^{(n)}) \\ + (\lambda/4(8d)^{n-1}n\mu)t^{-(n-1)l_1}N^{m-n+1}(B(I^{(n)}) - B(b)) \\ \leq (\lambda/4(8d)^{n-1})d^{l_1}t^{-(n-1)l_1}N^{m-n+1}M \cdot N(\mathfrak{p}^{(n-1)}) \\ + (\lambda/4(8d)^{n-1}n\mu)t^{-(n-2)l_1}N^{m-n+2} \cdot B(\mathfrak{p}^{(n-1)}) \\ + (\lambda/4(8d)^{n-1}n)d^{l_1}t^{-(n-1)l_1}N^{m-n+1}M \cdot N(\mathfrak{p}^{(n-1)}).$$

This contradicts the inequality (12) and the assertion is proved.

We can find a nonnegative integer l_{m+1} in the same way as l_n in the proof of the assertion. Applying Lemma 5 to the ideal $\mathfrak{p}^{(m)}$ and the polynomial $Q_{l_{m+1}}$, we have

$$0 \geq (\lambda/2(8d)^m)d^{l_1}t^{-ml_1}M \cdot N(\mathfrak{p}^{(m)}) + (\lambda/2(8d)^m m\mu)t^{-(m-1)l_1}N \cdot B(\mathfrak{p}^{(m)}).$$

This is a contradiction and completes the proof of the theorem.

References

- [1] P.-G. Becker, *Effective measures for algebraic independence of the values of Mahler type functions*, to appear.
- [2] P.-G. Becker and K. Nishioka, *Measures of the algebraic independence for the values of Mahler type functions*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 11 (3) (1989), 89–93.
- [3] Yu. V. Nesterenko, *Estimates for the orders of zeros of functions of a certain class and applications in the theory of transcendental numbers*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 41 (1977); English transl. in Math. USSR Izv. 11 (1977), 239–270.
- [4] — *Estimates for the characteristic function of a prime ideal*, Mat. Sb. 123 (165) (1984); English transl. in Math. USSR Sb. 51 (1985), 9–32.
- [5] — *On algebraic independence of algebraic powers of algebraic numbers*, Mat. Sb. 123 (165) (1984); English transl. in Math. USSR Sb. 51 (1985), 429–454.
- [6] — *On a measure of the algebraic independence of the values of a certain functions*, Mat. Sb. 128 (170) (1985); English transl. in Math. USSR Sb. 56 (1987), 545–567.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NARA WOMEN'S UNIVERSITY
Kita-Uoya Nishimachi
Nara 630, Japan

Received on 15.3.1989

Sous-groupes minimaux des groupes de Lie commutatifs réels, et applications arithmétiques

par

DAMIEN ROY (Paris)

Introduction. On dit qu'un groupe abélien est de *type fini* s'il est engendré par un nombre fini d'éléments. Alors on définit son *rang* comme le plus petit entier $r \geq 0$ tel que le groupe soit engendré par r éléments. On convient qu'un groupe $\{e\}$, réduit à son élément neutre, est de rang 0. Cela étant posé, nous disons qu'un sous-groupe Γ d'un groupe topologique commutatif R est *minimal* s'il est de type fini, dense dans R , et si aucun sous-groupe de Γ de rang inférieur au rang de Γ n'est dense dans R . Dans cet article, on considère le cas où R est un groupe de Lie commutatif réel. L'étude des sous-groupes minimaux d'un tel groupe R est motivée par le problème suivant:

Soient k une extension algébrique de \mathbb{Q} de degré fini, et R le groupe des éléments inversibles de la R -algèbre $k \otimes_{\mathbb{Q}} R$, déduite de la \mathbb{Q} -algèbre k par extension des scalaires de \mathbb{Q} à R . C'est un groupe de Lie commutatif réel pour la structure différentielle de sous-variété ouverte de l'espace vectoriel réel $k \otimes_{\mathbb{Q}} R$. Via l'injection canonique, le groupe k^* s'identifie à un sous-groupe dense de R . Dans ce contexte, J.-L. Colliot-Thélène demandait ([3], remarque 3.8) si k^* contient toujours un sous-groupe de type fini, dense dans R . Cette question a été résolue de manière affirmative, d'abord par H. W. Lenstra Jr. [6] et J.-L. Brylinski ([2], et [10], ch. I, lemme 3.18), lorsque k est une extension abélienne de \mathbb{Q} , puis par M. Waldschmidt ([11], § 4, et [10], ch. I, cor. 3.17), dans le cas général. Pour préciser leurs solutions, désignons par r_1 le nombre de plongements réels de k , et par r_2 le nombre de paires de plongements complexes conjugués de k . Alors le degré d de k sur \mathbb{Q} s'écrit $r_1 + 2r_2$. Désignons aussi par R_0 la composante neutre de R . Chacun d'eux construit explicitement un sous-groupe de type fini de k^* qui est dense dans R_0 , de rang $2d - r_2$ chez H. W. Lenstra Jr., de rang $2d$ chez J.-L. Brylinski, de rang $d^2 - d + 2$ chez M. Waldschmidt. Comme le quotient R/R_0 est un groupe fini, et que k^* est dense dans R , cela répond bien à la question de J.-L. Colliot-Thélène. Suite à ces résultats, J.-J. Sansuc a demandé quel est le plus petit entier r tel que k^* contienne un sous-groupe de type fini, de rang r , dense dans R ([9], remarque 4.3). Puisqu'un tel sous-groupe de R est nécessairement minimal, une façon de répondre à cette question est de majorer le rang des sous-groupes minimaux de

(1914)

R contenus dans k^\times . Au § 3, on montre que ce rang est en général $\leq d + r_1 + r_2$, mais qu'il est égal à $r_1 + r_2 + 1$ si $d \leq 3$, ou si $d = 4$ et $r_2 = 0$, et qu'il est $< (3/2)d$ si $d > 4$ et $r_2 = 0$. On montre aussi que, si la conjecture de Schanuel est vraie, ce rang serait égal à $d + 1$ lorsque $r_2 = 0$ (c'est-à-dire lorsque k est totalement réel).

Voici le plan de l'article. Au § 1, on donne les définitions de sous-groupe minimal relatif et de sous-groupe étoilé relatif de R^n . On énonce ensuite des résultats sur ces sous-groupes, qui sont démontrés dans [7]. Au § 2, on montre comment l'étude des sous-groupes minimaux d'un groupe de Lie commutatif réel R se ramène à celle des sous-groupes minimaux de sa composante neutre R_0 . Au § 3, on applique l'ensemble de ces résultats pour majorer le rang des sous-groupes minimaux de $(R^\times)^p \times (C^\times)^q$ contenus dans $(\bar{Q}^\times \cap R^\times)^p \times (\bar{Q}^\times)^q$, où \bar{Q} désigne la clôture algébrique de Q dans C . L'outil essentiel de cette section est un théorème de transcendance de M. Waldschmidt ([12], théorème 4.1).

Dans une note parue précédemment [8], on trouvera un exposé concis sur les sous-groupes minimaux de R^n , et leurs applications arithmétiques. Cet article vient le compléter en y ajoutant plusieurs éléments nouveaux. La poursuite de cette recherche, commencée au doctorat avec le support d'une bourse doctorale du FCAR (Québec), a été rendue possible grâce au soutien d'une bourse en sciences de l'OTAN du CRSNG (Canada). Elle a été accomplie au cours d'un stage au sein de l'équipe "Problèmes diophantiens" de l'université Paris VI, que je remercie de son accueil chaleureux.

Notations. Les lettres Z , Q , R , et C , désignent respectivement l'anneau des entiers et les corps usuels. On note k^\times le groupe multiplicatif d'un corps k , et R_+^\times le groupe multiplicatif des nombres réels positifs. Pour chaque entier $n \geq 0$, on munit l'espace vectoriel réel R^n de sa forme bilinéaire standard, notée $(,)_n$. Par suite, la *transposée* d'une application R -linéaire $f: R^m \rightarrow R^n$ est définie comme l'application R -linéaire $f': R^n \rightarrow R^m$ vérifiant $(x, f'(y))_m = (f(x), y)_n$ pour tout $x \in R^m$ et tout $y \in R^n$. On dit que deux sous-espaces de Q^n ou de R^n sont *supplémentaires orthogonaux* si l'un est l'orthogonal de l'autre par rapport à $(,)_n$. Le terme *automorphisme* de R^n désigne dans la suite toute application R -linéaire bijective de R^n dans lui-même. Si F est un sous-corps de R , et S un sous-ensemble de R^n , on note $\langle S \rangle_F$ le F -sous-espace de R^n engendré par S . On note $\langle S \rangle$ le sous-groupe de R^n engendré par S . Dans l'introduction, on a déjà précisé ce qu'on entend par le *rang* d'un groupe abélien de type fini. On définit le *rang libre* d'un tel groupe Γ comme la dimension de $\Gamma \otimes_Z Q$ sur Q . Enfin, si m, n sont des entiers positifs, on désigne par $m|n$ la condition que m divise n .

1. Sous-groupes minimaux relatifs et sous-groupes étoilés relatifs de R^n . Soient n, n_1, n_2 des entiers positifs. On établit d'abord deux définitions:

DÉFINITION. On dit qu'un sous-groupe G de R^n est *minimal relativement à un sous-groupe* $H \subset G$ s'il est de type fini, dense dans R^n , et ne contient aucun sous-groupe dense dans R^n , de rang inférieur, contenant H .

Ainsi un sous-groupe de R^n est minimal si et seulement s'il est minimal relativement à 0.

DÉFINITION. On dit qu'un sous-groupe G de R^n est *étoilé relativement à un sous-groupe* $H \subset G$ s'il est de type fini, dense dans R^n , et si $G \cap \langle u \rangle_R$ est dense dans $\langle u \rangle_R$ pour tout $u \in H$. On dit qu'il est *étoilé* s'il est étoilé relativement à lui-même.

Pour montrer le lien entre ces notions, on introduit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-groupes de type fini de R^n , et sur l'ensemble des couples (H, G) de sous-groupes de type fini de R^n avec $H \subset G$. On introduit aussi une notion de dualité.

DÉFINITION. Soient G_1, G_2 des sous-groupes de type fini de R^n . On dit qu'ils sont *équivalents* s'il existe un automorphisme de R^n qui applique $\langle G_1 \rangle_Q$ sur $\langle G_2 \rangle_Q$.

Soient H_1 un sous-groupe de G_1 , et H_2 un sous-groupe de G_2 . On dit que les couples (H_1, G_1) et (H_2, G_2) sont *équivalents* s'il existe un automorphisme de R^n qui applique $\langle H_1 \rangle_Q$ sur $\langle H_2 \rangle_Q$ et $\langle G_1 \rangle_Q$ sur $\langle G_2 \rangle_Q$.

DÉFINITION. Soient G_1 un sous-groupe de type fini de R^{n_1} , et G_2 un sous-groupe de type fini de R^{n_2} . On dit qu'ils sont *duaux* s'ils ont même rang $m = n_1 + n_2$, et s'il existe des applications linéaires surjectives $f_1: R^{n_1} \rightarrow R^m, f_2: R^{n_2} \rightarrow R^m$, de noyaux supplémentaires orthogonaux, telles que $f_1(Q^{n_1}) = \langle G_1 \rangle_Q$ et $f_2(Q^{n_2}) = \langle G_2 \rangle_Q$.

Soient H_1 un sous-groupe de G_1 , et H_2 un sous-groupe de G_2 . On dit que les couples (H_1, G_1) et (H_2, G_2) sont *duaux* si G_1 et G_2 ont même rang $m = n_1 + n_2$, et s'il existe des applications linéaires f_1, f_2 comme ci-dessus, et des sous-espaces U_1, U_2 de Q^m , supplémentaires orthogonaux dans Q^m , tels qu'on ait en plus $f_1(U_1) = \langle H_1 \rangle_Q$ et $f_2(U_2) = \langle H_2 \rangle_Q$.

Les résultats qui suivent sont démontrés dans [7]:

(i) Résultats concernant l'équivalence et la dualité:

PROPOSITION 1.1. Soient G_1, G_2 des sous-groupes de type fini de R^n . Supposons qu'ils soient équivalents. Alors G_1 et G_2 ont même rang. De plus, si G_1 est un sous-groupe dense, minimal, ou étoilé de R^n , alors G_2 l'est aussi.

Soient H_1 un sous-groupe de G_1 , et H_2 un sous-groupe de G_2 . Supposons que les couples (H_1, G_1) et (H_2, G_2) soient équivalents. Alors G_1 et G_2 ont même rang. Si H_1 est discret, ou si H_1 contient une base de R^n sur R , la même chose vaut pour H_2 . Si G_1 est dense, G_2 l'est aussi. Enfin, si G_1 est un sous-groupe minimal ou étoilé de R^n relativement à H_1 , alors G_2 est dans la même relation par rapport à H_2 .

PROPOSITION 1.2. Soient G_1 un sous-groupe de type fini de R^{n_1} , et G_2 un sous-groupe de type fini de R^{n_2} . Supposons qu'ils soient duaux. On pose $m = n_1 + n_2$. Alors G_1 est dense dans R^{n_1} de rang m , et G_2 est dense dans R^{n_2} de rang m . De plus G_1 est un sous-groupe minimal de R^{n_1} si et seulement si G_2 est sous-groupe étoilé de R^{n_2} .

Soient H_1 un sous-groupe de G_1 , et H_2 un sous-groupe de G_2 . Supposons maintenant que les couples (H_1, G_1) et (H_2, G_2) soient duaux. On pose $m = n_1 + n_2$. Alors G_1 est dense dans \mathbb{R}^{n_1} de rang m , et G_2 est dense dans \mathbb{R}^{n_2} de rang m . De plus H_1 est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^{n_1} si et seulement si $\langle H_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{n_2}$. Enfin, G_1 est un sous-groupe minimal de \mathbb{R}^{n_1} relativement à H_1 si et seulement si G_2 est un sous-groupe étoilé de \mathbb{R}^{n_2} relativement à H_2 .

La proposition suivante lie équivalence et dualité:

PROPOSITION 1.3. Soit G un sous-groupe de type fini de \mathbb{R}^n , et soit m son rang. Pour que G admette un dual, il faut et il suffit qu'il soit dense dans \mathbb{R}^n . Alors m est $> n$, et les duaux de G sont des sous-groupes denses de \mathbb{R}^{m-n} , de type fini, de rang m . Ils constituent une classe d'équivalence dont chaque élément est dual à chaque élément de la classe d'équivalence de G .

Soit H un sous-groupe de G , et soit q son rang. Pour que le couple (H, G) admette un dual, il faut et il suffit que G soit dense dans \mathbb{R}^n . Alors m est $> n$, et les duaux de (H, G) sont des couples (H', G') de sous-groupes de type fini de \mathbb{R}^{m-n} , avec $H' \subset G'$, H' de rang $m - q$, et G' dense dans \mathbb{R}^{m-n} , de rang m . Ils constituent une classe d'équivalence dont chaque élément est dual à chaque élément de la classe d'équivalence de (H, G) .

Enfin la définition suivante permet de condenser en un théorème l'essentiel des résultats précédents:

DÉFINITION. On dit que deux classes d'équivalence sont *duales* si tout élément de l'une est dual à tout élément de l'autre.

THÉORÈME 1.4. Deux classes d'équivalence sont duales si un élément de l'une est dual à un élément de l'autre. Toute classe d'équivalence C composée de sous-groupes minimaux de \mathbb{R}^n de rang m (resp. de couples de sous-groupes (H, G) de \mathbb{R}^n , avec $H \subset G$, H discret, et G minimal relativement à H , de rang m) admet exactement une classe d'équivalence duale C' composée de sous-groupes étoilés de \mathbb{R}^{m-n} de rang m (resp. de couples (H', G') de sous-groupes de \mathbb{R}^{m-n} , avec $H' \subset G'$, $\langle H' \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{m-n}$, et G' étoilé relativement à H' , de rang m), et vice versa.

(ii) Résultats concernant les sous-groupes étoilés relatifs:

PROPOSITION 1.5. Soient $H \subset G$ des sous-groupes de type fini de \mathbb{R}^n . Si $\langle H \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$, et si G est étoilé relativement à H , le rang de G est $\geq 2n$.

Pour $n = 1$, un sous-groupe de type fini G de \mathbb{R}^n est étoilé relativement à un sous-groupe non nul $H \subset G$ si et seulement si son rang est ≥ 2 . Pour $n \geq 2$, la situation est décrite, dans deux cas particuliers, par les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1.6. Supposons $n \geq 2$, et soit G un sous-groupe de \mathbb{R}^n de type fini, de rang m . Alors G est un sous-groupe étoilé de \mathbb{R}^n si et seulement si $\langle G \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ et il existe une extension F de \mathbb{Q} , de degré fini $d \geq 2$, contenue dans \mathbb{R} , vérifiant $\dim_{\mathbb{Q}} \langle G \rangle_F \leq m + d - 2$.

THÉORÈME 1.7. Supposons $n \geq 2$, et soient $H \subset G$ des sous-groupes de \mathbb{R}^n de type fini, avec $\langle H \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ et $\text{rang}(G) = \text{rang}(H) + 1$. Alors G est un sous-groupe étoilé de \mathbb{R}^n relativement à H si et seulement si H ou G est un sous-groupe étoilé de \mathbb{R}^n .

(iii) Résultats concernant les sous-groupes minimaux relatifs:

La proposition suivante est duale de la proposition 1.5:

PROPOSITION 1.8. Soient $H \subset G$ des sous-groupes de type fini de \mathbb{R}^n . Si H est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n , et si G est minimal relativement à H , le rang de G est $\leq 2n$.

Les sous-groupes minimaux de \mathbb{R}^n sont aussi de rang $\geq n + 1$. Ceux de rang $n + 1$ sont décrits par le théorème de Kronecker ([2], §1, no. 3, prop. 7, cor. 2). Par dualité, ceux de rang $m \geq n + 2$ répondent aux sous-groupes étoilés de \mathbb{R}^{m-n} de rang m , et ces derniers sont décrits par le théorème 1.6. On peut donner un énoncé dual au théorème 1.6. Celui que j'ai obtenu est trop compliqué pour valoir la peine d'être présenté ici. Par contre, le théorème 1.6 fournit entre autres une description des sous-groupes étoilés de \mathbb{R}^n de rang $2n$ et $2n + 1$ pour $n \geq 2$. On en tire une description des sous-groupes minimaux de \mathbb{R}^n de rang $2n$ pour $n \geq 2$, de rang $2n - 1$ pour $n \geq 3$. De cette description, on ne retiendra ici que la conséquence suivante:

PROPOSITION 1.9. Soit G un sous-groupe minimal de \mathbb{R}^n de rang m . Si $n \geq 2$ et $m = 2n$, ou si $n \geq 3$ et $m = 2n - 1$, alors il existe deux éléments de G qui sont linéairement indépendants sur \mathbb{Q} , mais linéairement dépendants sur la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Une autre conséquence de ce théorème s'énonce:

PROPOSITION 1.10. Soit K un sous-corps de \mathbb{R} . Supposons que \mathbb{Q} soit algébriquement clos dans K . Alors le rang d'un sous-groupe minimal de \mathbb{R}^n contenu dans K^n est $n + 1$.

L'énoncé dual du théorème 1.7 est le suivant:

THÉORÈME 1.11. Supposons $n \geq 2$, et soient $H \subset G$ des sous-groupes de \mathbb{R}^n de type fini, avec H de rang 1, et G de rang $m \geq n + 2$. Soit $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ une application linéaire de noyau $\langle H \rangle_{\mathbb{R}}$. Alors G est sous-groupe minimal de \mathbb{R}^n relativement à H si et seulement si, ou bien G est un sous-groupe minimal de \mathbb{R}^n , ou bien G est un sous-groupe dense de \mathbb{R}^n , et $\pi(G)$ est un sous-groupe minimal de \mathbb{R}^{n-1} de rang $m - 1$.

Enfin, on a le critère suivant:

PROPOSITION 1.12. Soient m un entier positif, et q un entier ≥ 0 . Soient G un sous-groupe dense de \mathbb{R}^n , de type fini, de rang $m + q$, et H un sous-groupe de G de rang q . Soit (ϕ_1, \dots, ϕ_m) une base du sous-groupe de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$ constitué des

homomorphismes qui s'annulent sur H , et soient A_1, \dots, A_m des sous-ensembles de \mathbf{Z} de cardinalité $> m+q$. Le groupe G est un sous-groupe minimal de \mathbf{R}^n relativement à H si et seulement si, pour tout $(a_1, \dots, a_m) \in A_1 \times \dots \times A_m$ non nul, le noyau de $a_1\phi_1 + \dots + a_m\phi_m$ n'est pas dense dans \mathbf{R}^n .

2. Sous-groupes minimaux des groupes de Lie commutatifs réels. Soit R un groupe de Lie commutatif réel de dimension $n \geq 0$. On note R_0 sa composante neutre, et $v: R \rightarrow R/R_0$ la projection canonique. Il existe un homomorphisme de groupes de Lie $h: \mathbf{R}^n \rightarrow R_0$, surjectif, de noyau discret H . On note q le rang de H , et on pose $p = n - q$. Alors R_0 est isomorphe au quotient \mathbf{R}^n/H , lui-même isomorphe au produit $\mathbf{R}^p \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^q$. De plus, l'application $\Gamma \mapsto h^{-1}(\Gamma)$ établit une bijection entre les sous-groupes denses de R_0 et ceux de \mathbf{R}^n contenant H . On en déduit que R_0 contient des sous-groupes denses de type fini, et que si un sous-groupe de R_0 est dense dans R_0 , ses sous-groupes d'indice fini le sont aussi. En conséquence un sous-groupe minimal de R_0 est sans torsion, et on peut énoncer:

PROPOSITION 2.1. *L'application $\Gamma \mapsto h^{-1}(\Gamma)$ établit une bijection entre les sous-groupes minimaux de R_0 et les sous-groupes de \mathbf{R}^n contenant H comme facteur direct, qui sont minimaux relativement à H .*

En combinant ce résultat et la proposition 1.8, on obtient:

COROLLAIRE 2.2. *Le rang d'un sous-groupe minimal de R_0 est $\leq 2p+q$.*

Les caractères de R_0 sont les homomorphismes continus de R_0 dans \mathbf{R}/\mathbf{Z} . Soit $\pi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ la projection canonique. Pour chaque caractère χ de R_0 , il existe une fonctionnelle linéaire $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\chi \circ h = \pi \circ f$. Cela détermine un isomorphisme entre le groupe des caractères de R_0 , et le groupe des fonctionnelles linéaires de \mathbf{R}^n qui appliquent H dans \mathbf{Z} . Or, Michel Waldschmidt a démontré ([10], ch. I, lemme 3.12):

LEMME 2.3. *Un sous-groupe G de \mathbf{R}^n contient un sous-groupe G' , de type fini, dense dans \mathbf{R}^n , si et seulement s'il n'existe pas de fonctionnelle linéaire non nulle de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} qui applique G dans \mathbf{Q} .*

On en déduit:

PROPOSITION 2.4. *Un sous-groupe Γ de R_0 contient un sous-groupe Γ' , de type fini, dense dans R_0 , si et seulement s'il n'existe pas de caractère non nul de R_0 qui applique Γ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} .*

Enfin la proposition 1.12 fournit le critère de minimalité suivant:

PROPOSITION 2.5. *Supposons $n > 0$. Soit Γ un sous-groupe dense de R_0 , de type fini, sans torsion. Son rang est un entier $m > 0$. Soient (ϕ_1, \dots, ϕ_m) une base du groupe abélien libre $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Gamma, \mathbf{Z})$, et A_1, \dots, A_m des sous-ensembles de \mathbf{Z} de cardinalité $> m+q$. Le groupe Γ est un sous-groupe minimal de R_0 si et seulement si le noyau de $a_1\phi_1 + \dots + a_m\phi_m$ n'est pas dense dans R_0 pour tout $(a_1, \dots, a_m) \in A_1 \times \dots \times A_m$ non nul.*

Puisque R_0 est un sous-groupe ouvert de R , un sous-groupe Γ de R est dense dans R si et seulement si: $v(\Gamma) = R/R_0$ et $\Gamma \cap R_0$ est dense dans R_0 . On en déduit qu'un sous-groupe Γ de R contient un sous-groupe de type fini dense dans R si et seulement si: $v(\Gamma) = R/R_0$ est de type fini, et $\Gamma \cap R_0$ contient un sous-groupe de type fini dense dans R_0 . En particulier, R contient un sous-groupe dense de type fini si et seulement si R/R_0 est de type fini. Le théorème suivant ramène l'étude des sous-groupes minimaux de R à celle des sous-groupes minimaux de R_0 :

THÉOREME 2.6. *Supposons que R/R_0 soit de type fini, de rang r , de rang libre r_0 . Soit Γ un sous-groupe de R de type fini, de rang l . Alors Γ est un sous-groupe minimal de R si et seulement si l'une ou l'autre des conditions suivantes est remplie:*

- (i) $l = r$, $v(\Gamma) = R/R_0$, et $\Gamma \cap R_0$ est dense dans R_0 ,
- (ii) $l > r$, $v(\Gamma) = R/R_0$, et $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de R_0 de rang $l - r_0$.

De plus, si la condition (ii) est remplie, le groupe Γ est sans torsion.

Démonstration. Pour que Γ soit un sous-groupe minimal de R , il faut qu'il soit dense dans R . Pour cela, il faut qu'on ait $v(\Gamma) = R/R_0$, et que $\Gamma \cap R_0$ soit dense dans R_0 . Comme ces deux conditions sont contenues en (i) et (ii), on peut supposer qu'elles sont remplies. Si R est de dimension 0, cela entraîne $\Gamma = R$. Alors (i) est remplie, et comme R est discret, Γ est bien un sous-groupe minimal de R . Donc on peut aussi supposer que R est de dimension positive. Alors le rang de $\Gamma \cap R_0$ est positif.

Soit $f_1: \mathbf{Z}^l \rightarrow \Gamma$ un homomorphisme surjectif. On pose $p_1 = v \circ f_1: \mathbf{Z}^l \rightarrow R/R_0$. Par hypothèse, p_1 est surjectif. Son noyau est l'image réciproque de $\Gamma \cap R_0$ par f_1 . Il s'écrit $\langle d_1 u_1, \dots, d_m u_m \rangle$ pour une certaine base (u_1, \dots, u_l) de \mathbf{Z}^l , un certain entier positif $m \leq l$, et certains entiers positifs d_1, \dots, d_m , avec $d_1 | d_2, \dots, d_{m-1} | d_m$. Alors R/R_0 est isomorphe à $(\mathbf{Z}/d_1 \mathbf{Z}) \times \dots \times (\mathbf{Z}/d_m \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{l-m}$. On en déduit $r_0 = l - m$ et $r \leq l$, avec égalité si et seulement si $d_1 \neq 1$.

Soit ψ l'automorphisme de \mathbf{Z}^l qui applique la base canonique de \mathbf{Z}^l sur (u_1, \dots, u_l) . On pose $f = f_1 \circ \psi$, et $p = p_1 \circ \psi$. Alors f applique \mathbf{Z}^l sur Γ , et le noyau de p est l'image réciproque de $\Gamma \cap R_0$ par f . Ce noyau est aussi l'image de l'homomorphisme $\iota: \mathbf{Z}^m \rightarrow \mathbf{Z}^l$ donné par $\iota(y_1, \dots, y_m) = (d_1 y_1, \dots, d_m y_m, 0, \dots, 0)$. Donc la composée $g = f \circ \iota$ applique \mathbf{Z}^m sur $\Gamma \cap R_0$.

Pour tout $x \in \mathbf{Z}^l$, on note x^\perp le sous-groupe de \mathbf{Z}^l orthogonal à x . De même, pour tout $y \in \mathbf{Z}^m$, on note y^\perp le sous-groupe de \mathbf{Z}^m orthogonal à y . En vertu des hypothèses, le groupe Γ est un sous-groupe minimal de R si et seulement si, pour tout élément x de \mathbf{Z}^l à coordonnées premières entre elles, le groupe $f(x^\perp)$ n'est pas dense dans R .

Soit $x = (x_1, \dots, x_l)$ un élément de \mathbf{Z}^l à coordonnées premières entre elles. On pose $y = (d_1 x_1, \dots, d_m x_m)$. Le groupe $f(x^\perp)$ n'est pas dense dans R si et

seulement si $p(x^\perp) \neq R/R_0$ ou $f(x^\perp) \cap R_0$ n'est pas dense dans R_0 . D'une part on a

$$f(x^\perp) \cap R_0 = f(x^\perp \cap \ker p) = g(y^\perp).$$

D'autre part, la condition $p(x^\perp) = R/R_0$ équivaut à $x^\perp + \ker p = Z^l$, ou encore à $(x, \ker p)_l = (x, Z^l)_l$. Comme $(x, \ker p)_l = (y, Z^m)_m$ et $(x, Z^l)_l = Z$, elle revient à demander que les coordonnées de y soient premières entre elles.

Ainsi, Γ est un sous-groupe minimal de R si et seulement si, pour tout $y = (y_1, \dots, y_m) \in Z^m$ à coordonnées premières entre elles, vérifiant $d_1 | y_1, \dots, d_m | y_m$, le groupe $g(y^\perp)$ n'est pas dense dans R_0 . Cette condition est vide si $d_1 \neq 1$, c'est-à-dire si $l = r$. Alors le groupe Γ est minimal. Supposons donc $l > r$, c'est-à-dire $d_1 = 1$. Il reste à montrer que Γ est un sous-groupe minimal de R si et seulement si $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de R_0 de rang m , et que, dans ce cas, Γ est sans torsion.

Puisque $g: Z^m \rightarrow \Gamma$ a pour image $\Gamma \cap R_0$, le groupe $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de rang m de R_0 si et seulement si, pour tout $y \in Z^m$ à coordonnées premières entre elles, le groupe $g(y^\perp)$ n'est pas dense dans R_0 . Donc Γ est un sous-groupe minimal de R si $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de rang m de R_0 . Réciproquement, supposons que Γ soit un sous-groupe minimal de R .

On en déduit d'abord que g est injective. En effet, si ce n'était pas le cas, son noyau contiendrait un élément $x \neq 0$, et il existerait $y = (1, y_2, \dots, y_m) \in d_1 Z \times \dots \times d_m Z$ tel que $(x, y)_m \neq 0$. Alors le groupe $g(y^\perp)$ serait d'indice fini dans $\Gamma \cap R_0$. Comme $\Gamma \cap R_0$ est dense dans R_0 , le groupe $g(y^\perp)$ le serait aussi. C'est une contradiction.

Ainsi g établit un isomorphisme de Z^m sur $\Gamma \cap R_0$. Puisque le noyau de f est contenu dans l'image de ι , l'application f est aussi un isomorphisme de Z^l sur Γ . Donc les groupes Γ et $\Gamma \cap R_0$ sont sans torsion, de rangs respectifs l et m .

Enfin, soient (e_1, \dots, e_m) la base standard de Z^m , et (ϕ_1, \dots, ϕ_m) la base de $\text{Hom}_Z(\Gamma \cap R_0, Z)$ donnée par $\phi_i(g(x)) = (x, e_i)_m$ pour tout $x \in Z^m$, pour $i = 1, \dots, m$. Par hypothèse, le noyau de $y_1 \phi_1 + \dots + y_m \phi_m$ n'est pas dense dans R_0 pour tout $(y_1, \dots, y_m) \in Z^m$ à coordonnées premières entre elles, vérifiant $d_2 | y_2, \dots, d_m | y_m$. Soient q un nombre premier qui ne divise pas d_m , A_1 l'ensemble des puissances de q , et A l'ensemble des entiers premiers à q . Alors le noyau de $y_1 \phi_1 + \dots + y_m \phi_m$ n'est pas dense dans R_0 pour tout $(y_1, \dots, y_m) \in A_1 \times d_2 A \times \dots \times d_m A$. Comme A_1 et A sont de cardinalité infinie, cela implique, en vertu de la proposition 2.5, que $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de R_0 .

COROLLAIRE 2.7. *Supposons que R/R_0 soit de type fini, de rang $\leq p$, de rang libre r_0 . Supposons aussi $n > 0$. Soit Γ un sous-groupe de R de type fini, de rang l . Alors Γ est un sous-groupe minimal de R si et seulement si: $v(\Gamma) = R/R_0$ et $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de R_0 de rang $l - r_0$. Dans ce cas, le groupe Γ est sans torsion.*

Démonstration. En vertu de l'isomorphisme entre R_0 et $R^p \times (R/Z)^q$, le rang d'un sous-groupe dense de R est $\geq p + 1$. Comme le rang de R/R_0 est $\leq p$, un sous-groupe minimal de R ne peut remplir la condition (i) du théorème 2.6. Il ne reste que la condition (ii), d'où la conclusion.

3. Applications arithmétiques. Dans ce paragraphe, on note \bar{Q} la clôture algébrique de Q dans C , et L le Q -sous-espace de C constitué des logarithmes des éléments de \bar{Q} . On pose

$$L_1 = L \cap R \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1}{2\pi i} (L \cap Ri),$$

de telle sorte que L s'écrive $L = L_1 \oplus 2\pi i L_2$.

Soient p, q des entiers ≥ 0 . On considère le groupe de Lie $R = (R^\times)^p \times (C^\times)^q$. Le but de ce paragraphe est de majorer le rang des sous-groupes minimaux de R contenus dans $(\bar{Q}^\times \cap R^\times)^p \times (\bar{Q}^\times)^q$. Pour cela, on observe d'abord que la composante neutre de R est $R_0 = (R_+^\times)^p \times (C^\times)^q$, et que le quotient R/R_0 est isomorphe à $(Z/2Z)^p$, de rang p , de rang libre 0. On a aussi un homomorphisme de groupes de Lie $h: R^{p+q} \times R^q \rightarrow R_0$ donné par

$$h(x_1, \dots, x_{p+q}, y_1, \dots, y_q) = (e^{x_1}, \dots, e^{x_p}, e^{x_{p+1} + 2\pi i y_1}, \dots, e^{x_{p+q} + 2\pi i y_q})$$

pour tout $(x_1, \dots, x_{p+q}, y_1, \dots, y_q) \in R^{p+q} \times R^q$. Il est surjectif, de noyau discret $0 \times Z^q$. Donc R_0 est isomorphe à $R^{p+q} \times (R/Z)^q$. En appliquant tour à tour le corollaire 2.7, la proposition 2.1, et la proposition 1.8, on obtient:

PROPOSITION 3.1. *Soit Γ un sous-groupe minimal de R , et soit m son rang. Alors Γ est sans torsion, et $\Gamma \cap R_0$ est un sous-groupe minimal de R_0 de rang m . Le groupe $h^{-1}(\Gamma \cap R_0)$ est un sous-groupe de $R^{p+q} \times R^q$, minimal relativement à $0 \times Z^q$, de rang $m + q$. Il est contenu dans $L_1^{p+q} \times L_2^q$, si Γ est contenu dans $(\bar{Q}^\times \cap R^\times)^p \times (\bar{Q}^\times)^q$. Enfin, on a $m \leq 2p + 3q$.*

Cette proposition montre que le rang des sous-groupes minimaux de R est $\leq 2p + 3q$. Elle montre aussi que pour majorer le rang des sous-groupes minimaux de R contenus dans $(\bar{Q}^\times \cap R^\times)^p \times (\bar{Q}^\times)^q$, il suffit de majorer celui des sous-groupes de $R^{p+q} \times R^q$, minimaux relativement à $0 \times Z^q$, contenus dans $L_1^{p+q} \times L_2^q$. Le théorème suivant donne une telle majoration, lorsque $q = 0$:

THÉORÈME 3.2. *Le rang d'un sous-groupe minimal de R^n contenu dans L_1^n est $n + 1$ si $n \leq 4$, et $< (3/2)n$ si $n > 4$.*

Sa démonstration repose sur un cas particulier d'un théorème de transcendance de Michel Waldschmidt ([12], théorème 4.1), formulé par Michel Laurent dans le cas p -adique ([5], théorème 4):

THÉORÈME 3.3. *Soient m, n des entiers positifs avec $m > n$, V un sous-espace de R^m de dimension n , F une extension algébrique de Q contenue dans R , W un sous-espace de V rationnel sur F , et Y un sous-groupe de V contenu dans L_1^m .*

Alors il existe un sous-espace T_1 de R^m rationnel sur Q , vérifiant $T_1 + W \neq R^m$, et

$$(1) \quad \frac{\dim_R(R^m/T_1) + \text{rang}(Y/(Y \cap T_1))}{\dim_R(R^m/T_1) - \dim_R(W/(W \cap T_1))} \leq \frac{m}{m-n}.$$

Comme le dénominateur du quotient de gauche est égal à $\dim_R(R^m/(T_1 + W))$, la condition $T_1 + W \neq R^m$ assure qu'il n'est pas nul.

Démonstration du théorème 3.2. Soit G un sous-groupe minimal de R^n contenu dans L_1^n , de rang $m > n+1$. Puisque G est dense dans R^n , la proposition 1.3 montre qu'il admet pour dual un sous-groupe dense G' de R^{m-n} , de type fini, de rang m . Soient $f: R^m \rightarrow R^n, f': R^m \rightarrow R^{m-n}$ des applications linéaires surjectives de noyaux supplémentaires orthogonaux telles que $f(Q^m) = \langle G \rangle_Q$ et $f'(Q^m) = \langle G' \rangle_Q$. Suivant la proposition 1.2, G' est un sous-groupe étoilé de R^{m-n} de rang m . Puisque $m-n \geq 2$, le théorème 1.6 montre qu'il existe une extension algébrique F de Q , de degré fini $d \geq 2$, contenue dans R , vérifiant

$$(2) \quad \dim_Q \langle G' \rangle_F \leq m + d - 2.$$

On pose $V = \ker f', W = \langle V \cap F^m \rangle_R$, et $Y = f'(Z^n)$. Comme $V = f'(R^n)$, et que f' est injective, V est de dimension n , et Y est un réseau de V . De plus, Y est contenu dans L_1^n , car l'inclusion $f(Q^m) \subset L_1^n$ signifie que la matrice de f relative aux bases standards de R^m et de R^n est à coefficients dans L_1 , donc aussi celle de f' . Ainsi le théorème 3.3 s'applique, et assure l'existence d'un sous-espace T_1 de R^m , rationnel sur Q , vérifiant $T_1 + W \neq R^m$ et l'inégalité (1). Notons μ le membre de gauche de cette inégalité. On va montrer qu'il est > 3 . Si on admet pour l'instant cette minoration, on trouve $m < (3/2)n$, donc $n > 4$, et le théorème est démontré.

On pose $T = T_1 \cap Q^m$, et $S = f'(T)$. Alors on a $T_1 = \langle T \rangle_R$ et $\dim_R T_1 = \dim_Q T = \dim_Q S$. Le dénominateur de μ se réécrit:

$$\dim_R(R^m/(W + T_1)) \quad \text{ou} \quad \dim_R(R^m/W) - \dim_R(T_1/(W \cap T_1)).$$

Considérons la deuxième expression. Comme W est engendré par $V \cap F^m$, et T_1 par T , on a:

$$\dim_R(T_1/(W \cap T_1)) = \dim_F(\langle T \rangle_F / (V \cap \langle T \rangle_F)).$$

D'autre part $V \cap \langle T \rangle_F$ est le noyau de la restriction de f' à $\langle T \rangle_F$, et son image est $\langle S \rangle_F$. Cela implique:

$$\dim_R(T_1/(W \cap T_1)) = \dim_F \langle S \rangle_F.$$

Le même raisonnement appliqué à R^m au lieu de T_1 donne:

$$\dim_R(R^m/W) = \dim_F(f'(F^m)) = \dim_F \langle G' \rangle_F.$$

Donc le dénominateur de μ s'écrit encore:

$$\dim_F \langle G' \rangle_F - \dim_F \langle S \rangle_F.$$

Comme il n'est pas nul, cela implique $\langle S \rangle_F \neq \langle G' \rangle_F$.

Puisque Y est engendré par une base de V sur R , on a aussi

$$\text{rang}(Y/(Y \cap T_1)) \geq \dim_R(V/(V \cap T_1)),$$

et le numérateur de μ est minoré par

$$\begin{aligned} \dim_R(R^m/T_1) + \dim_R(V/(V \cap T_1)) \\ = 2 \dim_R(R^m/T_1) - (\dim_R(R^m/T_1) - \dim_R(V/(V \cap T_1))) \\ = 2(\dim_Q \langle G' \rangle_Q - \dim_Q S) - \dim_R(R^m/(V + T_1)). \end{aligned}$$

Donc μ est au moins égal à

$$2 \frac{\dim_Q \langle G' \rangle_Q - \dim_Q S}{\dim_F \langle G' \rangle_F - \dim_F \langle S \rangle_F} - \frac{\dim_R(R^m/(V + T_1))}{\dim_R(R^m/(W + T_1))}.$$

D'après (2), on a $\dim_Q \langle G' \rangle_Q \geq \dim_Q \langle G' \rangle_F - d + 2 \geq d \cdot \dim_F \langle G' \rangle_F - d + 2$. Puisque $\dim_Q S \leq d \cdot \dim_F \langle S \rangle_F$, on en tire

$$\frac{\dim_Q \langle G' \rangle_Q - \dim_Q S}{\dim_F \langle G' \rangle_F - \dim_F \langle S \rangle_F} \geq d - \frac{d-2}{\dim_F \langle G' \rangle_F - \dim_F \langle S \rangle_F} \geq d - (d-2) = 2.$$

D'autre part, $W + T_1$ est un sous-espace propre de $V + T_1$, car s'ils coïncidaient, le fait que $W + T_1$ est rationnel sur F impliquerait, en vertu du théorème de Baker ([1], théorème 2.1), que Y , et par suite V tout entier, soit contenu dans le sous-espace maximal de $W + T_1$ rationnel sur Q . Or $W + T_1$ est un sous-espace propre de R^m . Donc sous cette hypothèse, V serait orthogonal à un certain $x \in Q^m$ non nul. Par construction, cet x appartiendrait à $\ker f$. Comme f est injective sur Q^m , cela est impossible. Ce résultat signifie

$$\frac{\dim_R(R^m/(V + T_1))}{\dim_R(R^m/(W + T_1))} < 1.$$

En combinant cette inégalité avec la précédente, on obtient bien $\mu > 3$.

COROLLAIRE 3.4. Soit p un entier positif. Le rang d'un sous-groupe minimal de $(R^x)^p$ contenu dans $(\bar{Q}^x \cap R^x)^p$ est $p+1$ si $p \leq 4$, et $< (3/2)p$ sinon.

On montre aussi:

PROPOSITION 3.5. Soit $p = 0$ ou 1 . Le rang d'un sous-groupe minimal de $(R^x)^p \times C^x$ contenu dans $(\bar{Q}^x \cap R^x)^p \times \bar{Q}^x$ est $p+2$.

Démonstration. D'après la proposition 3.1, il suffit de montrer que le rang d'un sous-groupe de $R^{p+1} \times R$, minimal relativement à $0 \times Z$, et contenu dans $L_1^{p+1} \times L_2$, est $p+3$. Soit G un tel sous-groupe, et soit m son rang. Si m était $> p+3$, alors suivant le théorème 1.11, ou bien G serait un sous-groupe minimal de rang m de $R^{p+1} \times R$, ou bien sa projection G_1 sur le premier facteur serait un sous-groupe minimal de rang $m-1$ de R^{p+1} . Dans le premier cas, la

proposition 1.8 montre que G serait un sous-groupe minimal de rang 4 de R^2 si $p = 0$, un sous-groupe minimal de rang 5 ou 6 de R^3 si $p = 1$. D'après la proposition 1.9, il existerait alors deux éléments de G qui soient linéairement indépendants sur Q , mais linéairement dépendants sur \bar{Q} . En vertu du théorème de Baker ([1], théorème 2.1), cela n'est pas possible. Dans le second cas, la proposition 1.8 montre qu'on aurait $p = 1$, et que G_1 serait un sous-groupe minimal de rang 4 de R^2 . Comme G_1 est contenu dans L_1^2 , le même argument montre que cela non plus n'est pas possible. Ainsi, on doit avoir $m = p + 3$.

Les résultats précédents permettent de donner une réponse partielle à la question de J.-J. Sansuc indiquée dans l'introduction:

PROPOSITION 3.6. Soit k une extension algébrique de Q de degré fini d , et soit Γ un sous-groupe minimal de $(k \otimes_Q R)^*$. On note r_1 le nombre de plongements réels de k , et r_2 le nombre de paires de plongements complexes conjugués de k . Alors le rang de Γ est $\leq d + r_1 + r_2$. Si $\Gamma \subset k^*$ et $d \leq 3$, le rang de Γ est $r_1 + r_2 + 1$. Enfin, si $\Gamma \subset k^*$ et $r_2 = 0$, le rang de Γ est $d + 1$ pour $d \leq 4$, et $< (3/2)d$ pour $d > 4$.

Démonstration. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ les plongements de k dans C ordonnés de telle sorte qu'on ait $\sigma_i(k) \subset R$ pour $i = 1, \dots, r_1$, et $\sigma_i = c \circ \sigma_{r_1+i}$ pour $i = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2$, où c désigne la conjugaison complexe de C . Chacun des σ_i s'étend en un homomorphisme de R -algèbres, de $k \otimes_Q R$ dans R pour $i = 1, \dots, r_1$, de $k \otimes_Q R$ dans C pour $i = r_1 + 1, \dots, d$. On note encore σ_i cette extension. Alors le produit $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1+r_2}) : k \otimes_Q R \rightarrow R^{r_1} \times C^{r_2}$ est un isomorphisme de R -algèbres. Par restriction, il détermine un isomorphisme de groupes de Lie, de l'ouvert $(k \otimes_Q R)^*$ des éléments inversibles de $k \otimes_Q R$ dans l'ouvert $(R^*)^{r_1} \times (C^*)^{r_2}$ des éléments inversibles de $R^{r_1} \times C^{r_2}$. Cet isomorphisme applique les sous-groupes minimaux de $(k \otimes_Q R)^*$ sur ceux de $(R^*)^{r_1} \times (C^*)^{r_2}$, tout en conservant leur rang, et il applique k^* dans $(\bar{Q}^* \cap R^*)^{r_1} \times (\bar{Q}^*)^{r_2}$. La première affirmation découle donc de la proposition 3.1, et les deux autres, du corollaire 3.4 et de la proposition 3.5.

Un cas particulier de la conjecture de Schanuel ([4], ch. III, Historical note) dit que des éléments de L_1 qui sont linéairement indépendants sur Q doivent être algébriquement indépendants sur Q . Donc, suivant cette conjecture, Q serait algébriquement clos dans l'extension de Q engendrée par L_1 . Alors, suivant la proposition 1.10, pour chaque entier $p \geq 1$, le rang d'un sous-groupe minimal de R^p contenu dans L_1^p serait $p + 1$. Partant de là, le rang d'un sous-groupe minimal de $(R^*)^p$ contenu dans $(\bar{Q}^* \cap R^*)^p$ serait aussi $p + 1$. Donc, avec les notations de la proposition 3.6, si $r_2 = 0$, le rang d'un sous-groupe minimal de $(k \otimes_Q R)^*$ contenu dans k^* serait $d + 1$.

Je ne sais pas si la seconde affirmation de la proposition 3.6 demeure vraie pour les corps k de degré $d > 3$, même en supposant la conjecture de Schanuel.

Bibliographie

- [1] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, London and New York 1975.
- [2] J.-L. Brylinski, Lettre à J.-L. Colliot-Thélène.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray et J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. Reine Angew. Math. 320 (1980), 150–191.
- [4] S. Lang, *Introduction to Transcendental Numbers*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
- [5] M. Laurent, *Rang p -adique d'unités et action de groupes*, J. Reine Angew. Math. 399 (1989), 81–108.
- [6] H. W. Lenstra, Jr., *On a question of Colliot-Thélène*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou, Birkhäuser, 1980-81, 143–147.
- [7] D. Roy, *Sur une version algébrique de la notion de sous-groupe minimal relatif de R^n* (à paraître).
- [8] — *Sous-groupes minimaux de R^n* , C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 307 (1988), 423–426.
- [9] J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou, Birkhäuser, 1980-81, 253–271.
- [10] M. Waldschmidt, *Quelques aspects transcendants de la théorie des nombres algébriques*, Cours de troisième cycle donné à Paris VI en 1987, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie, 89.
- [11] — *Sur certains caractères du groupe des classes d'idèles d'un corps de nombres*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou, Birkhäuser, 1980-81, 323–335.
- [12] — *On the transcendence methods of Gel'fond and Schneider in several variables*, in *New Advances in Transcendence Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1988, 375–398.

PROBLÈMES DIOPHANTIENS
INSTITUT HENRI-POINCARÉ
11, rue Pierre-et-Marie-Curie
75231 Paris Cedex 05, France

Reçu le 3.5.1989
et révisé le 6.7.1989

(1934)