

- [G2] P. X. Gallagher, *A large sieve density estimate near $\sigma = 1$* , Inventiones Math. 11 (1970), 329–339.
- [G3] B. Gross, *Arithmetic on Elliptic Curves with Complex Multiplication*, Lecture Notes in Math., #779 (1980).
- [H1] R. Heath-Brown, *On the density of the zeros of the Dedekind Zeta-function*, Acta Arith. 33 (1977), 169–181.
- [H2] E. Hecke, *Eine Neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen*, Math. Z. 6 (1920), 11–51.
- [H3] —, *Lectures on the Theory of Algebraic Numbers*, Springer, 1981.
- [H4] J. Hinz, *Über Nullstellen der Heckschen Zetafunktionen in algebraischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 31 (1976), 167–193.
- [H5] M. N. Huxley, *The Large Sieve Inequality for Algebraic Number Fields, II, Means of moments of Hecke zeta-functions*, Proc. London Math. Soc. (3) 21 (1970), 108–128.
- [I-R] K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1982.
- [K1] N. M. Korobov, *An Estimate of the Sum of the Legendre Symbols*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 196 (1971), 764–767.
- [K2] F. B. Kovalcik, *Density Theorems and the Distribution of Primes in Sectors and Progressions*, Sov. Math. Dokl. 15 (1974), 1521–1525.
- [K3] I. Kubilius, *On a Problem of the Multidimensional Analytic Theory of Numbers*, Uch. Zap. Vil'nyussk. Univ. Ser. Mat. Fiz.-Khim. Nauk. 4 (1955), 5–43.
- [M1] M. Maknys, *Refinement of the remainder term in the law of the distribution of prime numbers of an imaginary quadratic field in sectors*, Liet. Mat. Sb. 17 (1977), 133–137.
- [M2] —, *Metric and Analytic Number Theory at Vilnius University*, ibid 20. (1980), 29–38.
- [M3] H. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes in Math. #227, Springer, 1971.
- [R] H. Rademacher, *On the Phragmen–Lindelöf Theorem and Some Applications*, Collected Works, 1958, pp. 496–508.
- [S1] P. Sarnak, *Notes on an Approximate Functional Equation*, ..., Preprint.
- [S2] —, *On the Number of Points on Certain Curves and an Uncertainty Principle*, Number Theory, New York 1983–84, Lecture Notes in Math. #1135 (1985), pp. 239–253.
- [S3] —, *Fourth Moments of Größencharakter Zeta Functions*, Comm. Pure and Applied Math. 39 (1985), 167–178.
- [U] J. Urbialis, *Distribution of Algebraic Primes*, Liet. Mat. Sb. 5 (1965), 504–516.
- [W] A. Weil, *Jacobi Sums as 'Größencharaktere'*, Trans. Amer. Math. Soc. VI, 73 (1952), 487–495.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SAN DIEGO
La Jolla, Cal. 92093, U.S.A.

Current address
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
RUTGERS UNIVERSITY
New Brunswick, N. J. 08903, U.S.A.

Received on 15.9.1986
and in revised form on 6.11.1987

(1671)

Une nouvelle caractérisation des éléments de Pisot dans l'anneau des adèles de \mathbb{Q}

par

MARTHE GRANDET-HUGOT (Caen)

Les éléments de Pisot d'un anneau d'adèles de \mathbb{Q} ont été introduits par F. Bertrandias [1], elle en a donné une première caractérisation analogue à celle des nombres de Pisot réels.

En appliquant à ces ensembles une méthode voisine de celle qui nous a permis d'améliorer certains résultats de Pisot, dans le cas réel (cf. [4]), nous aboutissons à des caractérisations plus fines.

1. Définitions et notations. Soit P l'ensemble des valeurs absolues de \mathbb{Q} , on note $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue archimédienne et $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique normalisée.

On désigne par \mathbb{Q}_p le corps des nombres p -adiques, par \mathbb{Z}_p son anneau de valuation et par \mathbb{C}_p la complétion de sa clôture algébrique (on pose $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C}$).

On note:

$$D_p(a, r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a|_p < r\},$$

$$\hat{D}_p(a, r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a|_p \leq r\},$$

$$C_p(a, r) = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a|_p = r\}.$$

Soit I un ensemble fini de valeurs absolues de \mathbb{Q} , on pose:

$$I^+ = I \cup \{\infty\} \quad \text{et} \quad I^- = I \setminus \{\infty\}.$$

Si I contient la valeur absolue archimédienne, on appelle I -adèle de \mathbb{Q} tout élément de l'anneau:

$$A_I = \mathbb{R} \prod_{p \in I^-} \mathbb{Q}_p;$$

si I ne contient pas la valeur absolue archimédienne, nous désignons par A_I le sous-anneau de A_{I^+} formé des éléments dont la composante réelle est nulle. L'élément unité de A_{I^+} est noté e_I , et pour tout élément $x = (x_p)_{p \in I^+}$ de A_I , on note $|x|_p = |x_p|_p$.

Si l'on pose:

$$Q' = \{x \in Q; |x|_p \leq 1, \forall p \notin I^+\},$$

alors, le groupe additif Q'_{e_I} , que nous identifions avec Q' , est discret dans A_{I^+} et le groupe quotient A_{I^+}/Q' est compact. Ceci permet de montrer que tout élément x de A_I peut s'écrire d'une manière unique sous la forme:

$$x = E(x) + \varepsilon(x)$$

avec:

$$E(x) \in Q', \quad |\varepsilon(x)|_p \leq 1 \text{ pour } p \in I^-, \quad \varepsilon_\infty(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}];$$

(pour $p \notin I$, on pose $\varepsilon_p(x) = -E(x)$). Une telle décomposition est appelée *décomposition d'Artin*.

Si θ est un élément algébrique de A_I , nous désignons son polynôme minimal par P_{m_θ} , nous dirons que θ est entier algébrique si $P_{m_\theta} \in Q'[X]$.

Avant de rappeler les résultats antérieurs, nous définissons les ensembles que nous nous proposons de caractériser.

DÉFINITION 1.1 [3]. On désigne par U_I l'ensemble des éléments θ de A_I , entiers algébriques sur Q' , vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$, et dont le polynôme minimal P_{m_θ} a tous ses zéros dans le disque $\hat{D}_p(0, 1)$ de C_p , à l'exception de θ_p pour $p \in I$.

DÉFINITION 1.2 [1]. Soit p' une valeur absolue de Q , on désigne par $S_{p'}^\infty$ l'ensemble des éléments θ de U_I , tels que les zéros, dans $C_{p'}$ de P_{m_θ} appartiennent au disque $\hat{D}_{p'}(0, 1)$, à l'exception de $\theta_{p'}$ si p' appartient à I .

Nous posons: $S_I^\infty = \bigcap_{p' \in J} S_{p'}^\infty$.

L'ensemble S_I^∞ est appelé *ensemble de Pisot* de A_I .

Notations. Si (λ, θ) est un couple d'éléments de A_I tel que $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), nous posons:

$$I = \prod_{p \in I} |\lambda|_p, \quad I^- = \prod_{p \in I^-} |\lambda|_p \quad \text{et} \quad q = \prod_{p \in I^-} |\theta|_p,$$

$$u_n = E(\lambda \theta^n) \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \varepsilon(\lambda \theta^n).$$

On définit des suites (s_n) , (t_n) et $(x_{m,n})$ par les égalités:

$$\begin{cases} s_n = u_n - \theta u_{n-1} = \theta \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n & \text{pour } n \geq 1, \\ s_0 = u_0 = \lambda - \varepsilon_0; \\ t_0 = e_I, \quad t_1 = -\theta, \quad t_n = 0 & \text{pour } n \geq 2; \end{cases}$$

$$x_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n t_i t_j u_{m+n-(i+j)}.$$

Nous désignons par D_r le déterminant de Kronecker d'ordre $r+1$ de la

suite (u_n) , c'est à dire:

$$D_r = \text{Det}(u_{i+j}), \quad i = 0, 1, \dots, r \text{ et } j = 0, 1, \dots, r;$$

et par X_r la matrice d'éléments $x_{m,n}$ où $0 \leq m \leq r$ et $0 \leq n \leq r$.

Les caractérisations déjà connues des ensembles précédents s'expriment par les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1.1 [3]. Un élément θ de A_I vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$) appartient à U_I si, et seulement si, il existe un élément λ de A_I tel que $|\lambda|_p \geq 1$ pour $p \in I$, et que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\varepsilon(\lambda \theta^n)|_\infty \leq \frac{1}{2eq^2(1+\theta_\infty^2)(1+\log I)}.$$

THÉORÈME 1.2 [1]. Un élément θ de A_I , vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), appartient à S_I^∞ si, et seulement si, il existe un élément inversible λ de A_I tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:

(i) θ est algébrique et $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_p(\lambda \theta^n) = 0$.

(ii) La série $\sum |\varepsilon(\lambda \theta^n)|_p^2$ converge.

Dans les deux cas λ appartient à l'anneau $Q'(\theta)$.

Au § 2, nous indiquons de nouvelles caractérisations de l'ensemble de Pisot S_I^∞ ; puis au § 3 nous donnons un critère de rationalité qui constitue une version adèlique de celui de Cantor (cf. [2] et [4]), et dans les paragraphes 4 et 5 nous appliquons ce critère à de nouvelles caractérisations des ensembles U_I puis S_I^∞ .

Nous ne démontrons que les conditions suffisantes, les conditions nécessaires étant contenues dans celles de résultats antérieurs. De plus, dans tous les cas envisagés λ appartient à $Q'[\theta]$, nous ne le répéterons pas.

2. Caractérisation de S_I^∞ . Nous démontrons d'abord le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1. Un élément θ de A_I vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), appartient à S_I^∞ si, et seulement si, il existe un élément inversible λ de A_I et des nombres réels $(\mu_p)_{p \in P}$ vérifiant $0 < \mu_p \leq 1$, avec $\mu_p = 1$ sauf pour un nombre fini d'indices, tels que l'on ait, pour n assez grand:

$$|\varepsilon(\lambda \theta^n)|_\infty \leq \mu_\infty n^{-1/2},$$

$$|\varepsilon(\lambda \theta^n)|_p \leq \mu_p \quad \text{pour } p \neq \infty,$$

avec la condition suivante:

$$(2.1) \quad \prod_{p \in P} \mu_p < \frac{1}{2eq^2(1+\theta_\infty)^2}.$$

La démonstration utilise le lemme suivant:

LEMME 2.1. Si, pour toute valeur absolue ultramétrique p , il existe deux nombres réels μ_p et α_p vérifiant:

$$0 < \mu_p \leq 1 \quad \text{et} \quad \alpha_p \geq 0$$

avec $\mu_p = 1$ et $\alpha_p = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices, et tels que l'on ait:

$$|\varepsilon(\lambda\theta^n)|_p \leq \mu_p n^{-\alpha_p} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

$$|\varepsilon(\lambda)|_p \leq \mu_p.$$

Alors:

$$(2.2) \quad \prod_{p \neq \infty} |D_r|_p \leq l^{-} (q^2 \prod_{p \neq \infty} \mu_p)^r ((r-1)!)^{-\sum_{p \neq \infty} \alpha_p}.$$

Démonstration. Pour tout $p \neq \infty$, on a l'inégalité:

$$|D_r|_p \leq \max |u_{i_0}, s_{1+i_1}, \dots, s_{r+i_r}|_p$$

où (i_0, i_1, \dots, i_r) décrit l'ensemble des permutations de $0, 1, \dots, r$, d'où:

$$|D_r|_p \leq \begin{cases} \mu_p^r |\lambda|_p |\theta|_p^{2r} ((r-1)!)^{-\alpha_p} & \text{si } p \in I, \\ \mu_p^r ((r-1)!)^{-\alpha_p} & \text{si } p \notin I^+ \end{cases}$$

et l'on en déduit le résultat.

Démonstration du théorème 2.1. En effectuant, au besoin, une translation des indices et en modifiant la valeur de λ , on peut supposer que toutes ces inégalités sont vérifiées pour $n \in N$.

Alors, d'après le lemme 2.1, on a:

$$(2.3) \quad \prod_{p \neq \infty} |D_r|_p \leq l^{-} (q^2 \prod_{p \neq \infty} \mu_p)^r.$$

Si I contient la valeur absolue archimédienne, un calcul analogue à celui qui a été fait pour l'ensemble S (cf. [4], § 3) permet d'écrire:

$$\sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r |x_{m,n}|_\infty^2 \leq 4\mu_\infty^2 (r+1)(1+\theta_\infty)^4 + O(\log r).$$

Alors, en utilisant successivement la majoration d'Hadamard et l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique, on obtient:

$$|D_r|_\infty^2 = |\text{Det } X_r|_\infty^2 \leq \left(\frac{1}{r+1} \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r |x_{m,n}|_\infty^2 \right)^{r+1}$$

d'où:

$$(2.4) \quad |D_r|_\infty^2 \leq (4\mu_\infty^2 (1+\theta_\infty)^4 + o(1))^{r+1}.$$

Si I ne contient pas la valeur absolue archimédienne un calcul analogue permet d'écrire:

$$\sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r |x_{m,n}|_\infty^2 = \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^r |u_{m+n}|_\infty^2 \leq 4\mu_\infty^2 (r+1);$$

d'où:

$$(2.5) \quad |D_r|_\infty^2 \leq (4\mu_\infty^2)^{r+1}.$$

En combinant, suivant le cas, les inégalités (2.3) et (2.4) ou (2.3) et (2.5), on obtient:

$$\prod_{p \in P} |D_r|_p \leq K (2q^2 (1+\theta_\infty)^2 (\mu_\infty + o(1)) \prod_{p \neq \infty} \mu_p)^r$$

où K est une constante. Par conséquent si la condition (2.1) est vérifiée on a:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{p \in P} |D_r|_p = 0,$$

ce qui implique que D_r est nul à partir d'un certain rang, donc la série $\sum_{n \in N} u_n X^n$ est rationnelle et θ appartient à S_I^∞ , d'après le théorème 1.2.

Le corollaire suivant donne une caractérisation simple de S_I^∞ , qui rappelle celle de l'ensemble S [4], il se déduit immédiatement du théorème.

COROLLAIRE. Un élément θ de A_I vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour tout $p \in I$, appartient à S_I^∞ si, et seulement si, il existe un élément inversible λ de A_I tel que l'on ait:

$$\varepsilon_\infty(\lambda\theta^n) = o(n^{-1/2}).$$

En prenant $I = \{\infty\}$, le théorème 2.1 permet d'obtenir des conditions suffisantes pour qu'un nombre réel soit un nombre de Pisot; par exemple:

THÉORÈME 2.2. Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1, s'il existe un nombre réel λ non nul et un nombre premier p tels que l'on ait:

$$\|\lambda\theta^n\| = O(n^{-1/2})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|_p = 0$$

alors θ est un nombre de Pisot et λ appartient à $\mathcal{Q}(\theta)$.

3. Critère algébrique de rationalité. La démonstration de ce critère se fait, dans ses grandes lignes, de la même manière que dans le cas réel, aussi nous contenterons-nous de l'énoncer.

Notations. A une suite (u_n) d'éléments de \mathcal{Q}' on associe la famille des matrices $A(Q_r)$ définies de la manière suivante:

On désigne par \mathcal{Q}_r l'ensemble des suites croissantes de $r+1$ entiers naturels, de la forme:

$$Q_r = (0, q_1, \dots, q_r) \quad \text{où } 0 = q_0 < q_1 < \dots < q_r,$$

et l'on se donne une suite (t_n) d'éléments de A_1 vérifiant $t_0 = e_1$; on pose alors:

$$A(Q_r) = (x_{q_i, j}), \quad i = 0, \dots, r; j = 0, \dots, r.$$

Nous pouvons énoncer:

THÉOREME 3.1. Soit (u_n) une suite d'éléments de \mathcal{Q}' vérifiant $u_0 \neq 0$, et soit (t_n) une suite d'éléments de A_1 telle que $t_0 = e_1$.

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$ est rationnelle si, et seulement si, il existe un entier naturel r tel que l'on ait:

$$\prod_{p \in \mathbf{P}} |\text{Det } A(Q_r)|_p < 1 \quad \text{pour tout } Q_r \in \mathcal{Q}_r.$$

4. Caractérisation de U_1 . Nous allons d'abord indiquer des majorations pour les différentes valeurs absolues de $\text{Det } A(Q_r)$.

Par ailleurs, si I contient la valeur absolue archimédienne, il est souvent commode de supposer $u_0 \geq 1$, c'est pourquoi nous supposons dans ce cas: $\theta_\infty \geq 1$ et $\lambda_\infty \geq 3/2$; en ce qui concerne les autres valeurs absolues, nous supposons $|\theta|_p > 1$ et $|\lambda|_p \geq 1$.

LEMME 4.1. Soit (λ, θ) un couple d'éléments de A_1 vérifiant les conditions ci-dessus. On suppose qu'il existe des réels $(\mu_p)_{p \in \mathbf{P}^-}$ et $(\alpha_p)_{p \in \mathbf{P}^-}$ tels que:

$$0 < \mu_p \leq 1, \quad \alpha_p \geq 0,$$

avec $\mu_p = 1$ et $\alpha_p = 0$ pour presque tout p (c'est-à-dire pour tout p n'appartenant pas un certain sous-ensemble fini), et que soient réalisées les inégalités suivantes:

$$(4.1) \quad |\varepsilon(\lambda\theta^n)|_p \leq \mu_p n^{-\alpha_p} \quad \text{pour } p \in \mathbf{P}^- \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

Alors, pour tout entier r et tout $Q_r \in \mathcal{Q}_r$, on obtient les majorations suivantes:

$$(4.2) \quad |\text{Det } A(Q_r)|_p \leq \begin{cases} |u_0|_p (\mu_p |\theta|_p^2)^r ((r-1)!)^{-\alpha_p} & \text{pour } p \in I^-, \\ \mu_p^{r+1} ((r-1)!)^{-\alpha_p} & \text{pour } p \notin I^+. \end{cases}$$

La démonstration utilise le même type de calculs que celle du lemme 2.1.

LEMME 4.2. On suppose qu'il existe deux nombres réels ϱ et σ vérifiant:

$$0 < \varrho \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \sigma \leq 1/2,$$

tels que l'inégalité suivante soit réalisée pour $n \geq 1$ et $m \geq 0$:

$$(4.3) \quad (1 + \theta_\infty)^2 \sum_{i=m}^{m+n} |\varepsilon(\lambda\theta^{i+1}) - \varepsilon(\lambda\theta^i)|_\infty^2 \leq (\varrho(n+1))^{2\sigma}$$

alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $Q_r \in \mathcal{Q}_r$, on obtient les majorations suivantes:

$$(4.4) \quad |\text{Det } A(Q_r)|_\infty \leq \begin{cases} \left(u_0^2 + \frac{(\varrho(r+1))^{2\sigma}}{(\theta_\infty + 1)^3} \right)^{1/2} (\varrho(r+1))^{\sigma r} & \text{si } \infty \in I, \\ (\varrho(r+1))^{\sigma(r+1)} & \text{si } \infty \notin I. \end{cases}$$

Démonstration. La première inégalité s'obtient comme dans [2], pour la seconde on remarque que l'on a:

$$x_{m,n} = \varepsilon_\infty(\theta^{m+n}),$$

et l'on utilise la majoration d'Hadamard.

THÉOREME 4.1. Un élément θ de A_1 vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), appartient à U_1 si, et seulement si, il existe un élément λ de A_1 et des nombres réels $(\mu_p)_{p \in \mathbf{P}^-}$, ϱ et σ tels que:

$$|\lambda|_p \geq 1 \quad \text{pour } p \in I, \quad \lambda_\infty \geq 3/2 \quad \text{si } \infty \in I,$$

$$0 < \mu_p \leq 1 \quad \text{et} \quad \mu_p = 1 \quad \text{pour presque tout } p,$$

$$0 < \sigma \leq 1/2 \quad \text{et} \quad 0 < \varrho \leq 1,$$

et que soient réalisées les inégalités (4.4) et:

$$(4.5) \quad |\varepsilon(\lambda\theta^n)|_p \leq \mu_p \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } p \in \mathbf{P}^-,$$

en supposant vérifiée l'une des deux conditions suivantes:

$$(4.6) \quad \max(\varrho, \varrho(\prod_{p \in \mathbf{P}^-} \mu_p q^2)^{1/\sigma}) < \frac{\sigma}{e(2\sigma + \log(l^-(u_0^2 + \frac{1}{8})^{1/2}))} \quad \text{si } \infty \in I,$$

$$(4.7) \quad \max(\varrho, \varrho(\prod_{p \in \mathbf{P}^-} \mu_p q^2)^{1/\sigma}) < \frac{\sigma}{e(2\sigma + \log l^-)} \quad \text{si } \infty \notin I.$$

La démonstration de ce théorème rejoint, dans ses grandes lignes, celle du théorème 2.1 de [2].

Le résultat suivant peut être considéré comme un corollaire du théorème 4.1:

THÉOREME 4.2. Un élément θ de A_1 vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), appartient à U_1 si, et seulement si, il existe un élément λ de A_1 et des nombres réels $(\mu_p)_{p \in \mathbf{P}}$ tels que:

$$|\lambda|_p \geq 1 \quad \text{pour } p \in I \quad \text{et} \quad \lambda_\infty \geq 3/2 \quad \text{si } \infty \in I,$$

$$0 < \mu_p \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 < \mu_\infty \leq (1 + \theta_\infty)^{-1},$$

avec $\mu_p = 1$ pour presque tout p , et que l'on ait:

$$|\varepsilon(\lambda\theta^n)|_p \leq \mu_p \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } p \in P,$$

en supposant réalisée la condition suivante:

$$(4.8) \quad \max_{p \in P} (\prod \mu_p, q^2 \mu_\infty) < \frac{1}{e(1+\theta)(2+\sqrt{\log l})}.$$

5. Caractérisation des ensembles S_I^J . Pour tout couple (I, J) de sous-ensembles finis de P , le théorème 3.1 permet de caractériser l'ensemble S_I^J . Les caractérisations obtenues s'expriment soit par des conditions asymptotiques, soit par des conditions devant être vérifiées pour tout n ; elle s'obtiennent à partir des inégalités établies dans les paragraphes précédents, nous n'énoncerons que les plus importantes.

THÉORÈME 5.1. Un élément θ de A_I vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), appartient à S_I^∞ si, et seulement si, il existe un élément de A_I et des nombres réels α et $(\mu_p)_{p \in P}$ vérifiant:

$$|\lambda|_p \geq 1 \quad \text{pour } p \in I \quad \text{et} \quad \lambda_\infty \geq 3/2 \quad \text{si } \infty \in I,$$

$$0 < \alpha < 1/2,$$

$$0 < \mu_p \leq 1, \quad \text{avec } \mu_p = 1 \text{ pour presque tout } p,$$

tels que l'on ait:

$$|\varepsilon(\lambda\theta^n)|_\infty \leq \mu_\infty n^{-\alpha} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

$$|\varepsilon(\lambda)|_\infty \leq \mu_\infty,$$

$$|\varepsilon(\lambda\theta^n)|_p \leq \mu_p \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } p \in P^-,$$

et que soit vérifiée la condition suivante:

$$(5.1) \quad \prod_{p \in P} \mu_p < \frac{(1-2\alpha)^{1-\alpha}}{2eq^2(1+\theta_\infty)^2(2+(\log l)^{1/2-\alpha})}.$$

On démontre ce théorème en utilisant des méthodes analogues à celles qui nous ont permis d'obtenir les théorèmes 4.1 et 5.2 de [4].

THÉORÈME 5.2. Soit J un ensemble fini de valeurs absolues de \mathbb{Q} ne contenant pas la valeur absolue archimédienne.

Un élément θ de A_I vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$ ($\theta_\infty > 1$ si $\infty \in I$), appartient à S_I^J si, et seulement si, il existe un élément λ de A_I et des nombres réels A , σ , $(\alpha_p)_{p \in J}$ et $(\mu_p)_{p \in J}$ vérifiant:

$$|\lambda|_p \geq 1 \quad \text{pour } p \in I \quad \text{et} \quad \lambda_\infty \geq 3/2 \quad \text{si } \infty \in I,$$

$$\alpha_p > 0, \quad 0 < \mu_p \leq 1, \quad 0 < \sigma \leq 1/2, \quad A > 0,$$

et tels que l'on ait:

$$(5.2) \quad \begin{cases} |\varepsilon(\lambda\theta^n)|_p \leq \mu_p n^{-\alpha_p} & \text{pour } n \geq 1 \text{ et } p \in J, \\ |\varepsilon(\lambda)|_p \leq \mu_p, \end{cases}$$

$$(5.3) \quad \sum_{i=m}^{m+n-1} |\varepsilon(\lambda\theta^{i+1})| \leq A^2 n^{2\sigma} \quad \text{pour } m \geq 0 \text{ et } n \geq 1,$$

en supposant de plus, vérifiée l'une des conditions suivantes:

$$(i) \quad \sigma - \sum_{p \in J} \alpha_p < 0,$$

$$(ii) \quad \sigma = \sum_{p \in J} \alpha_p \quad \text{et} \quad A \prod_{p \in J} \mu_p < \frac{1}{eq^2(1+\theta_\infty)}.$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité d'Hadamard, on peut montrer (cf. [2], démonstration du théorème 2.1) que l'on a:

$$|D_r|_\infty^2 \leq (u_0^2 + A^2(1+\theta_\infty)(r+1)^{2\sigma})(A^2(1+\theta_\infty)^4(r+1)^{2\sigma})^r$$

d'où:

$$|D_r|_\infty^2 \leq (A(1+\theta)^4(r+1)^{2\sigma})^{r+1} \left(\frac{u_0^2}{A^2(1+\theta_\infty)^4(r+1)^{2\sigma}} + \frac{1}{(1+\theta_\infty)^3} \right)^{1/2}$$

et:

$$(5.4) \quad |D_r|_\infty \leq k(A(1+\theta)^2(r+1)^\sigma)^{r+1}, \quad \text{pour } n \in N,$$

où k est une constante ne dépendant que du couple (θ, λ) et de la constante A .

Les inégalités (4.2) et (5.4) permettent d'écrire:

$$\prod_{p \in P} |D_r|_p^2 \leq kl^{-1} (A(1+\theta_\infty)^2(r+1)^\sigma)^{r+1} \prod_{p \in I^-} (\mu_p |\theta|_p^2)^r ((r-1)!)^{-\alpha}$$

où nous avons posé $\alpha = \sum_{p \in J} \alpha_p$.

D'après la formule de Stirling on a:

$$(r-1)! \geq \left(\frac{r-1}{e} \right)^{r-1} \sqrt{2\pi(r-1)}$$

d'autre part, on a:

$$\log \left(\frac{r+1}{r-1} \right)^{r-1} = (r-1) \log \left(1 + \frac{2}{r-1} \right) < 2,$$

d'où:

$$(r+1)^{r+1} < e^2 (r+1)^2 (r-1)^{r-1};$$

par conséquent nous pouvons écrire:

$$\prod_{p \in P} |D_r|_p \leq K (r+1)^2 (r-1)^{2-\sigma} (e^2 q^2 \mu)^r (r-1)^{(\sigma-2)r}$$

où K ne dépend que du couple (θ, λ) et de la constante A .

Donc, si l'une des conditions (i) ou (ii) est vérifiée, l'on a :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{p \in P} |D_r|_p = 0,$$

et $D_r = 0$ pour r assez grand ce qui implique la rationalité de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n X^n$, et la démonstration s'achève comme dans les cas précédents.

En modifiant λ et en effectuant une translation des indices, on obtient le corollaire suivant:

THÉORÈME 5.3. *Un élément θ de A_I vérifiant $|\theta|_p > 1$ pour $p \in I$, appartient à S_I^J si, et seulement si, il existe un élément inversible λ de A_I et des nombres réels positifs $(\alpha_p)_{p \in J}$ tels que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée:*

$$(i) \quad |\varepsilon(\lambda \theta^n)|_p = O(n^{-\alpha_p}) \quad \text{pour } p \in J,$$

avec:

$$\alpha = \sum_{p \in J} \alpha_p > 1/2 \quad \text{et } \alpha_p > 0.$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} |\varepsilon(\lambda \theta^n)|_p &= O(n^{-\alpha_p}) & \text{pour } p \in J_1, \\ |\varepsilon(\lambda \theta^n)|_p &= o(n^{-\alpha_p}) & \text{pour } p \in J_2 \end{aligned}$$

où J_2 n'est pas vide, et où J_1 et J_2 forment une partition de J , et où, de plus:

$$\alpha_p > 0 \quad \text{pour } p \in J_1 \quad \text{et} \quad \alpha_p \geq 0 \quad \text{pour } p \in J_2, \quad \alpha = \sum_{p \in J} \alpha_p \geq \frac{1}{2}.$$

L'originalité et l'intérêt de cette caractérisation résident dans le fait que la valeur absolue archimédienne n'y joue pas de rôle particulier. De plus, nous pouvons en déduire des conditions suffisantes pour qu'un nombre réel soit un nombre de Pisot.

THÉORÈME 5.4. *Soit (λ, θ) un couple de nombres réels vérifiant: $\lambda \neq 0$ et $\theta > 1$. Alors, si l'une des conditions suivantes est vérifiée, θ est un nombre de Pisot et λ appartient au corps $\mathbb{Q}(\theta)$.*

$$(i) \quad \|\lambda \theta^n\| = o(n^{-\alpha_\infty}) \quad \text{où } \alpha_\infty \geq 0,$$

et il existe un ensemble fini J de nombres premiers, et des nombres réels positifs

$(\alpha_p)_{p \in J}$ tels que l'on ait:

$$|u_n|_p = O(n^{-\alpha_p}) \quad \text{pour } p \in J,$$

avec:

$$\alpha = \sum_{p \in J} \alpha_p > 1/2.$$

$$(ii) \quad \|\lambda \theta^n\| = O(n^{-\alpha_\infty}) \quad \text{où } \alpha_\infty > 0,$$

et il existe deux ensembles finis disjoints de nombres premiers J_1 et J_2 , et des nombres réels $(\alpha_p)_{p \in J_1 \cup J_2}$ tels que l'on ait:

$$|u_n|_p = O(n^{-\alpha_p}), \quad \alpha_p > 0 \quad \text{pour } p \in J_1,$$

$$|u_n|_p = o(n^{-\alpha_p}), \quad \alpha_p \geq 0 \quad \text{pour } p \in J_2$$

avec:

$$\sum_{p \in J_1 \cup J_2} \alpha_p \geq \frac{1}{2} \quad \text{si } J_2 \neq \emptyset,$$

$$\sum_{p \in J_1 \cup J_2} \alpha_p > \frac{1}{2} \quad \text{si } J_2 = \emptyset.$$

CONCLUSION. Nous avons obtenu plusieurs caractérisations de types différents, celles s'expriment par des conditions asymptotiques ou des conditions devant être vérifiées pour tout n .

C'est dans le cas des ensembles S_I^J que l'amélioration est la plus sensible. Les caractérisations obtenues nous permettent en plus d'obtenir des résultats concernant les nombres de Pisot, bien qu'il ne s'agisse pas de propriétés caractéristiques.

Bibliographie

- [1] F. Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 4 (1966).
- [2] D. G. Cantor, *Power series with only finitely many coefficients modulo 1*, Acta Arith. 34 (1977), 43-55.
- [3] A. Decomps-Guilloux, *Généralisation des nombres de Pisot aux adèles*, ibid. 16 (1970), 265-314.
- [4] A. Decomps-Guilloux et M. Grandet-Hugot, *Nouvelles caractérisations des nombres de Pisot et de Salem*, ibid. 50 (1988), 155-170.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MÉCANIQUE ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE CAEN
F. 14032 Caen Cedex

Reçu le 3.3.1987
et dans la forme modifiée le 1.12.1987

(1712)