Suppose $c < 2$ and
$$\log M < c(\log\log d/\log d)^3.$$

Then for sufficiently large d, inequality (4) implies $V = 0$ and hence $\theta_h^{p_i} = \theta_j^{p_k}$ for some h, i, j, k. If $i \neq k$, say $i < k$, then there is an automorphism σ of $Q(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ such that $\sigma\theta_j = \theta_h = \theta_j^{p_k/p_i}$. If $|\theta_j| \neq 1$ then $\sigma^m\theta_j$ approaches 0 or ∞ as $m \to \infty$. This is impossible and hence $|\theta_j| = 1$. Conjugation of the equation $\theta_h^{p_i} = \theta_j^{p_k}$ shows that all of the θ_i have absolute value 1, hence they are roots of unity, by Kronecker's theorem. If $p_i = p_k = p$, then θ_h/θ_j is a pth root of unity, and $M(\theta) = M(\theta^p)$ where θ^p is an algebraic integer of degree d/p. For each $d > 1$ there exist only finitely many algebraic integers Θ of degree d satisfying $M(\Theta) < 2$. Thus there exists a function $H(\Theta) > 1$, such that if $M(\Theta) < H(\Theta)$ then Θ is a root of unity, and then $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) = 0$. Hence there exists a monotonically decreasing function $G(\Theta)$ such that if $\log M(\Theta) < G(\Theta)$, then $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}) = 0$. By what we have shown, we can choose $G(\Theta) = c(\log\log d/\log d)^3$ for all sufficiently large d. Now if Θ has degree d and $\log M(\Theta) < G(\Theta)$, then either Θ is a root of unity or there exists a prime p such that Θ^p has degree d/p and $\log M(\Theta^p) = \log M(\Theta) < G(d) < G(d/p)$.

This completes the proof by induction. We have tried improved estimates of the Vandermonde and variations in the choices of its column vectors. While we can improve the error term in
$$M(\Theta) > 1 + 2(\log\log d/\log d)^3 + o\big((\log\log d/\log d)^3\big),$$
if Θ is not a root of unity, none of the changes improves the constant 2.

References

[1] E. Dobrowolski, *On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial*, Acta Arith. 34 (1979), pp. 391–401.

[2] Ch. Méray, *Sur un déterminant dont celui de Vandermonde n'est qu' un cas particulier*, Revue de Mathématiques Spéciales, 9 (1899), pp. 217–219.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA
Los Angeles, CA 90024
USA

Received on 10.4.1981
and in revised form on 5.5.1981 (1249)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

Courbes définies sur les corps de séries formelles et loi de réciprocité

par

J. C. Douai et C. Touibi (Tunis)

Introduction. Soit k_0 un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, Rim et Whaples ([5]) ont montré que pour les corps de fonctions définies sur $k = k_0((T))$ il n'y a pas en général de loi de réciprocité. (On dit que la loi de réciprocité est valable sur le corps k si pour tout corps de fonctions d'une variable K sur k, l'application norme résiduelle induit l'isomorphisme:
$$(*, L|K): C_K|NC_L \to \mathrm{Gal}(L|K)$$
pour toutes les extensions abéliennes finies L de K, où C_K désigne le groupe des classes d'idéles et où $N = N_{L|K}$ est la norme.)

En fait, les corps qu'ils considèrent sont des corps de fonctions de courbes dont le genre est strictement positif et qui ont „relativement bonne réduction" mod T, i.e. dont la courbe réduite est encore de genre strictement positif ([5], corollaire du théorème 2).

Le but de ce travail est de montrer que si X est une courbe régulière, complète, irréductible, définie sur k et dont la jacobienne a „très mauvaise réduction" mod T, i.e. la réduite mod T est de type additif, alors la loi de réciprocité est valable pour le corps de fonction $k(X)$.

Plus précisément, en combinant un résultat de Ogg [4] avec un résultat de Rim et Whaples [5], on obtient:

THÉORÈME. *Soit X une courbe algébrique, irréductible, lisse, complète, définie sur un corps de séries formelles $k = k_0((T))$ où k_0 est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Si la jacobienne de X a „très mauvaise réduction"* mod T *alors la loi de réciprocité est valable pour le corps de fonctions* $k(X)$.

Nous montrons même que dans la situation considérée, ceci est le seul cas où la loi de réciprocité est valable.

A la différence de [5], l'outil essentiel utilisé ici est le groupe de Brauer de la courbe X introduit par Grothendieck ([5]) et repris par Lichtenbaum ([2]) et Manin ([3]).

1. Groupe de Brauer d'une courbe définie sur un corps de dimension cohomologique $\leqslant 1$. Soient: k un corps quelconque, $\bar{k}$ sa clôture algébrique, $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, X une courbe algébrique irréductible, lisse, complète définie sur k, $\bar{X} = X \underset{k}{\otimes} \bar{k}$ la courbe étendue à $\bar{k}$, $K = k(X)$ et $\tilde{K} = \bar{k} \cdot K$.

On sait que ([1]):

$$\mathrm{Br}(\bar{X}) = 0$$

donc $\mathrm{Br}(X)$ coïncide avec le groupe:

$$\mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\bar{X})\big)$$

noté $\mathrm{Br}_1(X)$ par Manin ([3]).

D'autre part, d'après ([1]) on a la suite exacte:

$$(1) \qquad 0 \to \mathrm{Br}_1(X) \to H^2\big(G_k, \bar{k}(X)^*\big) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big)$$

où $\bar{k}(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles de $\bar{X}$.

Cette suite exacte s'insère dans le diagramme suivant ([3]):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Br}(k) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Br}(k) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^2\big(G_k, \bar{k}(X)^*\big) \arrow[r] \arrow[d] & H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & H^1\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big) \arrow[r] & H^2\big(G_k, \bar{k}(X)^*/\bar{k}^*\big) \arrow[r] \arrow[d] & H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big) \\
 & & H^3(G_k, \bar{k}^*) &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

D'après le théorème de Tsen, on a:

$$\mathrm{Br}\big(\bar{k}(X)\big) = 0$$

d'où l'on déduit que:

$$H^2\big(G_k, \bar{k}(X)^*\big) = \mathrm{Br}(K)$$

et la suite exacte (1) est alors équivalente à:

$$(1') \qquad 0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big)$$

qui n'est autre que la suite exacte de la proposition (2.1) de [1].

Lemme 1.1. *Si k est un corps de dimension cohomologique $\leqslant 1$, alors*:

(a) $\mathrm{Br}(X) \simeq H^1\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big)$,

(b) $\mathrm{Br}(K) \simeq H^2\big(G_k, P(\bar{X})\big)$ *où* $P(\bar{X}) = \bar{k}(X)^*/\bar{k}^*$ *est le groupe des diviseurs principaux de* $\bar{X}$.

En effet, les deux suites exactes (1) et (2) sont alors isomorphes.

Il résulte de ce lemme que si k est un corps de dimension cohomologique $\leqslant 1$, la suite (1′) est le début de la suite exacte de cohomologie:

$$(3) \qquad 0 \to H^1\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big) \to H^2\big(G_k, P(\bar{X})\big) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big) \to 0$$

déduite de:

$$0 \to P(\bar{X}) \to \mathrm{Div}(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(\bar{X}) \to 0.$$

La suite (3) s'identifie alors à la suite exacte (**) de Rim et Whaples ([5]).

Corollaire 1.2. *Si k est un corps de dimension cohomologique $\leqslant 1$, on a la suite exacte*:

$$(4) \qquad 0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big) \to 0.$$

Par ailleurs, on a la suite exacte:

$$(5) \qquad 0 \to \mathrm{Pic}^0(\bar{X}) \to \mathrm{Pic}(\bar{X}) \xrightarrow{\deg} \boldsymbol{Z} \to 0$$

et d'après le lemme 4 de Manin ([3]), $\mathrm{Pic}^0(\bar{X})$ est isomorphe en tant que G_k-module à $J(\bar{k})$ où J est la jacobienne de la courbe X, l'hypothèse dimension cohomologique de $k \leqslant 1$ $(\mathrm{cd}(k) \leqslant 1)$ implique alors que:

$$H^2\big(G_k, J(\bar{k})\big) = 0$$

(car $J(\bar{k})$ est un groupe divisible), donc:

$$H^2\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big) \simeq H^2(G_k, \boldsymbol{Z}) = \chi(G_k)$$

où $\chi(G_k)$ est la groupe des caractères de G_k. La suite exacte (4) s'écrit dans ces conditions:

$$(4') \qquad 0 \to \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K) \to H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big) \to \chi(G_k) \to 0.$$

Corollaire 1.3. *On a* $H^3(X, G_m) \simeq \chi(G_k)$.

En effet, ceci se déduit immédiatement de la comparaison de la suite exacte (4′) et de celle de la proposition (2.1) de ([1]).

En particulier, si k est un corps quasi-fini alors:

$$H^2\big(G_k, \mathrm{Div}(\bar{X})\big) = \sum_v \mathrm{Br}(K_v)$$

où la somme est prise sur tous les points de la courbe X, i.e. toutes les valuations de K, et

$$\chi(G_k) \simeq \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$$

et on retrouve ainsi la suite exacte du théorème 1 de Rim et Whaples ([5])

$$(6) \qquad 0 \to H^1\big(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})\big) \to \mathrm{Br}(K) \to \sum_v \mathrm{Br}(K_v) \to \boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z} \to 0$$

compte tenu de l'isomorphisme (a) du lemme 1.1

$$\mathrm{Br}(X) \simeq H^1(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X}))$$

dans ce cas, calculer le noyau de la flèche:

$$\mathrm{Br}(K) \to \sum_v \mathrm{Br}(K_v)$$

revient à déterminer le groupe $H^1(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X}))$.

2. Détermination de $H^1(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X}))$. Elle se fait à l'aide de la suite exacte:

$$(7) \qquad H^0(G_k, J(\bar{k})) \to H^0(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \xrightarrow{\deg} \boldsymbol{Z} \to H^1(G_k, J(\bar{k})) \to H^1(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \to 0$$

déduite de la suite (5).

1ier Cas: $X = \boldsymbol{P}_k^1$. Alors:

$$J(\bar{k}) = 0, \qquad H^1(G_k, J(\bar{k})) = 0$$

donc

$$\mathrm{Br}(X) = 0.$$

Ceci est valable indépendamment de la dimension cohomologique de k.

2ème Cas: Le corps de base k de la courbe X est de caractéristique non nulle, algébrique sur un sous-corps premier k_0 et tel que:

$$[k:k_0] = \prod_p p^{\nu_p}$$

où $\nu_p < \infty$ pour tout p.

(C'est le prototype (a) de corps quasi-fini, non fini considéré par Rim et Whaples ([5]); alors on a encore:

$$H^1(G_k, J(\bar{k})) = 0 = \mathrm{Br}(X).$$

En particulier, la nullité de $H^1(G_k, J(\bar{k}))$ entraîne l'existence d'une classe de diviseurs dans $\mathrm{Pic}(\bar{X})$ invariante par le groupe de Galois G_k, de degré 1, donc d'une classe de diviseurs de degré 1 dans $\mathrm{Pic}(X)$ car on a la suite exacte ([2], p. 122):

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to H^0(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})) \to \mathrm{Br}(k) = 0.$$

3ème Cas: La Jacobienne J de X a „très mauvaise réduction" mod T.

Soient X une courbe algébrique, lisse, complète de genre g, définie sur un corps k de type $k_0((T))$ où k_0 est un corps algébriquement clos et J sa jacobienne.

D'après le résultat de Ogg ([4], § 2, Théorème 1) on sait que:

$$H^1(G_k, J(\bar{k}))_q \simeq (D(q))^{2g-\varepsilon}$$

où D est l'ensemble des éléments de $Q/\boldsymbol{Z}$ d'ordre premier à la caractéristique p du corps k_0, où q est un nombre premier différent de p et où ε est l'entier compris entre 0 et $2g$ défini par Ogg et associé à la réduction de J.

Si J a „très mauvaise réduction" mod T alors $\varepsilon = 2g$ et par suite:

$$H^1(G_k, J(\bar{k}))_q = 0.$$

En particulier, dans ce cas $H^1(G_k, J(\bar{k}))$ se réduit à un groupe de p-torsion et si de plus la caractéristique p du corps k_0 est nulle, alors $H^1(G_k, J(\bar{k})) = 0$ et d'après (7) on en déduit que:

$$\mathrm{Br}(X) \simeq H^1(G_k, \mathrm{Pic}(\bar{X})) = 0$$

et compte-tenu des résultats du paragraphe 1, on a la suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \sum_v \mathrm{Br}(K_v) \to Q/\boldsymbol{Z} \to 0.$$

THÉORÈME 1. *Soit X une courbe algébrique, irréductible, lisse, complète, définie sur un corps de séries formelles $k = k_0((T))$ où k_0 est algébriquement clos de caractéristique nulle. On suppose que la jacobienne de X a „très mauvaise réduction"* mod T; *alors la loi de réciprocité est valable pour le corps des fonctions $k(X)$.*

EXEMPLE. *X est une courbe elliptique ayant une réduction de „type additif" auquel cas $\varepsilon = 2$: X admet donc „très mauvaise réduction"* mod T *et le théorème précédent s'applique.*

3. Interpretation du 3ème cas précédent. Soit X une courbe algébrique, irréductible, lisse, complète, définie sur un corps $k = k_0((T))$ où k_0 est algébriquement clos de caractéristique nulle.

On désigne pas X_0 la courbe réduite mod T et par K_0 le corps $k_0(X_0)$. Si X_0 est de genre strictement positif, alors le groupe $\Pi_1(X_0) \neq \{0\}$ ([6]); en particulier X_0 admet au moins un revêtement abélien étale, non trivial et K_0 au moins une extension abélienne L_0, non ramifiée, non triviale. Comme k_0 est algébriquement clos, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}_0$ de K_0 on a:

$$(L_0)_{\mathfrak{p}_0} = (K_0)_{\mathfrak{p}_0},$$

i.e. tout idéal premier de K_0 „splitte" complètement dans L_0.

Si X_0 est de genre strictement positif, il en est de même pour X alors $\Pi_1(X) \neq \{0\}$, ($\Pi_1(X)$ ne peut que diminuer par spécialisation) et $K = k(X)$ admet aussi une extension abélienne L non ramifiée, non triviale telle que pour idéal $\mathfrak{p}$ de K on ait: $L_{\mathfrak{p}} = K_{\mathfrak{p}}$ d'après le corollaire du théorème 2 de [5].

Théorème 2. *Avec les notations précédentes, si $\Pi_1(X_0) \neq \{0\}$, alors la loi de réciprocité n'est pas valable pour $k(X)$.*

On en déduit que la loi de réciprocité pour $k(X)$ ne peut-être valable que si $\Pi_1(X_0) = \{0\}$; or:

$$\big(\Pi_1(X_0) = \{0\}\big) \Leftrightarrow \big(T^q(J_0) = \{0\} \text{ pour tout } q\big)$$

où $T^q(J_0)$ est le q-groupe de Tate de la Jacobienne J_0 de X_0.

En particulier on sait que la réduite J_0 est de type additif si et seulement si $T^q(J_0) = \{0\}$ pour tout q; ceci montre que le seul cas où on peut obtenir la loi de réciprocité est celui envisagé dans le théorème 1.

Bibliographie

[1] A. Grothendieck, *Dix exposés de Cohomologie Galoisienne. Le Groupe de Brauer III: Exemples et Compléments*, North-Holland, 1968.

[2] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over P-adic fields*, Inventiones Math. 7 (1969), p. 120–136.

[3] Y. Manin, *Le Groupe de Brauer–Grothendieck en géomètrie Diophantienne*, Actes, Congrés Intern. Math. 1970, Tome 1, p. 401–411.

[4] A. P. Ogg, *Cohomology of Abelien varieties over function fields*, Annals of Math. 76 (1962), p. 185–212.

[5] D. S. Rim and G. Whaples, *Global norm-residue map over quasi-finite field*, Nagoya Math. Journ. 27 (1966), p. 323–329.

[6] Séminaire de la Géometrie Algébrique, Exposé 10 (1960–61), I. H. E. S., Bures sur Yvette.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEUR
43 Rue de la Liberté
Le Bardo, Tunis

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS
CAMPUS UNIVERSITAIRE, Tunis

Reçu le 19.5.1981 (1254)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

On a problem of Ryškov concerning lattice coverings

by

R. P. Bambah (Chandigarh, India) and N. J. A. Sloane (Murray Hill, N. J.)

1. In small dimensions the most efficient covering of n-dimensional space $\mathbf{R}^n$ by spheres is given by the so-called Voronoi form of the first type,

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2;$$

i.e. by the dual lattice A_n^* to the root lattice A_n. Ryškov and Baranovskiĭ [7] have shown that this is the most efficient lattice covering for $n \leqslant 5$, extending earlier work of Bambah [1], [2], Delone and Ryškov [5] and others. In [6] Ryškov shows that A_n^* is not the most efficient lattice covering for all even $n \geqslant 114$ and all odd $n \geqslant 201$, and raises the question of finding the first dimension n for which there is a better lattice. In the present note we construct lattice coverings which are more efficient than A_n^* in all dimensions $n \geqslant 24$. This is made possible by the recent proof in [4] that the covering radius of the 24-dimensional Leech lattice Λ is $\sqrt{2}$ times the packing radius.

2. The covering density $\theta(L)$ of a lattice L having covering radius R and determinant d is $V_n R^n/d$. For A_n^* we have $R = \sqrt{n(n+2)/12(n+1)}$, $d = (n+1)^{-1/2}$ and

$$\theta(A_n^*) = V_n\sqrt{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n/2}\left(\frac{n}{12}\right)^{n/2} \tag{1}$$

(see for example Bleicher [3]); and in particular

$$\theta(A_{24}^*) = V_{25}\cdot 5\left(\frac{52}{25}\right)^{12} = 63.269\ldots$$

On the other hand, for the Leech lattice Λ, $R = \sqrt{2}$ and $d = 1$ (see [4]),