W związku z badaniami z dziedziny geometryi wielowymiarowéj pozostają najnowsze prace G. Cantora z ogólnéj nauki o rozmaitościach ogłoszone przeważnie w dziennikach: Crelle'a, Clebsch'a i w „Acta Mathematica“. W jednéj ze swych prac dowodzi Cantor, że, gdy usuniemy założenie odpowiedniości *ciągłéj* rozmaitości n wymiarowéj i n współrzędnych niezależnych, to elementy rozmaitości dają się oznaczyć za pomocą mniejszéj liczby zmiennych, a nawet sprowadzić do rozmaitości liniowéj; w innéj dochodzi do wniosku następującego: „Jeżeli między dwiema dziedzinami ciągłemi M_μ i M_ν istnieje taka zależność, że każdemu punktowi z rozmaitości M_μ odpowiada *najwyżéj* jeden punkt Z rozmaitości M_ν, a każdemu punktowi Z *przynajmniéj* jeden punkt z i jeżeli zależność ta jest ciągłą, to $\mu \geqq \nu$. Wzmiankę o innych twierdzeniach Cantor'a, jako przekraczającą zakres niniejszéj notatki, pomijamy.

Do najnowszych prac w omawianéj przez nas dziedzinie należą prace Killing'a. W jednéj z nich („Ueber zwei Raumformen mit constanter Krümmung.“ Crelle, 75) wykazuje Killing, że są dwie (i tylko dwie) formy przestrzeni o stałéj krzywiznie: jedna z nich ma charakter kuli, druga zgadza się z formą Klein'a (w Math. Annalen, tom VI). Tenże autor poświęcił rozprawy pojęciom zasadniczym geometryi („Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie), rachunkowi w przestrzeniach nieeuklidesowych (Crelle, 89); zastosował do przestrzeni nieeuklidesowych twierdzenia, odnoszące się do przestrzeni płaskich n-wymiarowych; wyłożył mechanikę w przestrzeni nieeuklidesowéj (Crelle, 91) wreszcie wydał książkę p. t.: „Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung“ (1885), zawierającą wykład teoryi form nieeuklidesowych, przeprowadzonéj za pomocą układu współrzędnych tak zwanych weierstrassowskich.

W niniejszéj notatce pominęliśmy cały szereg prac, należących do dziedziny teoryi poznawania, które omawiały nowe teorye geometryczne z punktu widzenia filozoficznego; jedne z nich stają na stanowisku matematyków, uprawiających tę teoryą, inne zajmują stanowisko negujące wprost zasadność podobnych dociekań. Wymienimy tylko niektórych filozofów, którzy ogłosili prace w tym przedmiocie, a mianowicie Wundt'a, Erdmann'a, Dühring'a, Schmitz-Dumont'a, Kromana.

---

2. O PODSTAWACH CYNETYCZNEJ TEORYI GAZÓW.

(DYSKUSYA POMIĘDZY TAIT'EM A BOLTZMANN'EM.)

PRZEZ

WŁ. NATANSONA.

Historya rozwoju cynetycznéj teoryi gazów zaznacza niejedną pamiętną rozprawę naukową. Ważną pracę „Ueber die mittlere Länge der Wege, welche bei der Molecularbewegung gasförmiger Körper von den einzelnen Molecülen zurückgelegt werden“ napisał Clausius w obronie nowéj podówczas nauki przeciwko zarzutom Bujs-Ballot'a i Jochmann'a. [1]) Mniéj głośną, lecz także ważną była wymiana zdań pomiędzy O. E. Meyer'em a Boltzmann'em w przedmiocie dowodu, przytoczonego przez pierwszego dla udowodnienia prawa Clerk-Maxwell'a. [2]) Od roku 1886 wreszcie trwa dyskusya pomiędzy Tait'em a Boltzmann'em [3]), z którą czytelnika zapoznać zamierzam. Ludwik Boltzmann, profesor uniwersytetu w Gradcu, uczony sumienny i ostrożny, znany jest od lat dwudziestu jako jeden z najgorliwszych promotorów teoryi cynetycznéj. Cały szereg rozpraw jego ma za zadanie ściśłe uzasadnienie i dalsze rozwinięcie prawa Clerk-Maxwell'a, oraz zastoso-

[1]) Zobacz Clausius'a Abhandlungen über die mech. Wärmetheorie, 1867, tom II; Poggendorff's Annalen, tom 103 i 108.

[2]) Zobacz O. E. Meyer'a Die kinetische Theorie der Gase, 1877. Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, tom 76; Wiedemann's Annalen, tomy 7, 8, 10 i 11.

[3]) Oto zupełna literatura téj dyskusyi: 1) Tait, Philosophical Magazine, t. 21, str. 343. Kwiecień 1886. 2) Tait, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, tom 33, str. 65. Maj 1886. 3) Burbury, Phil. Mag. t. 21, str. 481. Czerwiec 1886. 4) Tait, Phil. Mag. t. 23, str. 141. Luty 1887. 5) Boltzmann, Phil. Mag. t. 23, str. 305. Kwiecień 1887. 6) Tait, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, tom 33, str. 251. Kwiecień, 1887. 7) Tait, Phil. Mag. t. 23, str. 433. Maj 1887. 8) Boltzmann, Phil. Mag. t. 25, str. 81. Luty 1888. 9) Tait, Phil. Mag., t. 25, str. 172. Marzec 1888.

wanie téj naczelnéj w teoryi cynetycznéj zasady do wszystkich zagadnień, do których teorya ta sięga. Antagonista jego, P. G. Tait, ruchliwy i oryginalny matematyk i fizyk edymburski, zasłużony dla wielu innych gałęzi nauk ścisłych, po raz pierwszy w dyskusyi téj zabrał głos nad zagadnieniami teoryi cynetycznéj gazów.

Nie krępując się chronologicznym porządkiem, w jakim poszczególne przedmioty przez uczonych tych były roztrząsane, przedstawię co do kilku tylko ważniejszych punktów argumentacyą obu; pominę zaś takie punkty sporne, które wydają mi się jeszcze niezupełnie wyświetlonemi, lub są wprost podrzędnemi sprawami (np. wszelkie dyskusye mniéj lub więcéj osobistego charakteru.)

1. Kreśląc (w pierwszéj pracy swojéj) podstawy teoryi cynetycznéj gazów w ogólnych zarysach, Tait powtórzył rozumowanie, przytoczone już przez Maxwell'a[1]) na dowód prawa rozdziału prędkości i znane pod nazwą „pierwszego dowodu“ Maxwell'a. Wystawmy sobie, że od pewnego początku o prowadzimy linie, równe co do wielkości i równoległe co do kierunku do prędkości wszystkich cząsteczek gazu. Budowę taką Tait nazywa „diagramatem prędkości w przestrzeni“ (*velocity space diagram*). Ponieważ kierunki ruchu są rozdzielone jednostajnie w przestrzeni, przeto wspomniane linie rozchodzą się „z jednakową gęstością“ we wszystkich kierunkach. Gęstość zaś rozdziału ich końców (t. j. liczba końców w jednostce objętości diagramatu) musi być funkcyą odległości końców od początku, t. j. funkcyą wyrazu $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Że jednak, powiada Tait, ostateczny sposób rozdziału prędkości (na cząsteczki gazu) nie może zależeć od systematu osi, którym się w danym razie posługujemy, *przeto* gęstość rozdziału musi mieć kształt $f(x).f(y).f(z)$. Z tych zaś dwóch warunków łatwo już otrzymać prawo Maxwell'a. Funkcya f nie może wówczas mieć innego kształtu, jak Be^{Cx^2}, jeżeli nie jest stałą. Że nie jest stałą, że C jest stałą ujemną, równą $-1/\alpha^2$, że współczynnik B wynosi $dx/\alpha\sqrt{\pi}$, gdzie α jest prędkością najprawdopodobniejszą, wynika już wówczas przy pomocy bardzo prostych rozumowań. Wszelako prof. Newcomb, zarówno jak pp. Watson i Burbury, uważają wyraz „*przeto*“ w powyższém rozumowaniu za nieuzasadniony; sądzą oni, że możność rozłożenia funkcyi, wyrażającéj gęstość końców, na trzy czynniki, zależne poszczególnie od jednéj tylko współrzędnéj, nie została udowodnioną przez Tait'a. Boltzmann przypomina iż Maxwell sam odstąpił w pracy późniejszéj [2]) od dowodu, przytoczonego przez Tait'a. Przypuśćmy, powiada Boltzmann, że $F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ oznacza prawdopodobieństwo, iż składowe prędkości danéj cząsteczki leżą pomiędzy x a $x+dx$, y a $y+dy$, z a $z+dz$. Z prawa Maxwell'a wynika, że funkcya $F(x, y, z)$ jest rozkładalną na trzy czynniki: $f(x).\Phi(y).\psi(z)$; popełnimy zatém *circulus vitiosus*, biorąc to ostatnie założenie za punkt wyjścia przy dowodzeniu prawa Maxwell'a. Zresztą, powiada Boltzmann, mielibyśmy pewną podstawę do oczekiwania, że małe wartości składowéj wzdłuż X są tém bardziéj prawdopodobne, im większemi są wartości składowych wzdłuż Y i Z. Tak np., gdyby $F(x,y,z)$ była funkcyą kształtu $ce^{-h(x^2+y^2+z^2)^2}$, wówczas w stosunku prawdopodobieństw, odpowiadających jakimkolwiek granicom: $x, x+dx$; $\xi, \xi+d\xi$, który wynosi

$$\frac{dx}{d\xi}\; e^{h(\xi^4-x^4)}\;\; e^{2h(\xi^2-x^2)(y^2+z^2)}\,,$$

czynnik $\sqrt{y^2+x^2}$ nie znika zupełnie; prawdopodobieństwo przeto $x, x+dx$ zależałoby od y^2+z^2. Na uwagi te Boltzmann'a można odpowiedzieć, że przez *niezależne* udowodnienie wniosku, płynącego z pewnego twierdzenia, można niekiedy dowieść samego twierdzenia bez popełnienia błędu *circulus vitiosus*. Drugi zarzut również jest niesłuszny, albowiem Tait usiłował odnaleźć dowód, iż istotne, w gazach działające, prawo $F(x,y,z)$ posiada własność rozkładu na czynniki $f(x)$, $\Phi(y)$, $\psi(z)$, nie zaś jakakolwiek, możliwa *a priori*, funkcya analityczna. Tait w odpowiedzi swéj uznaje, że możność rozkładu funkcyi F na trzy czynniki nie została przezeń w zupełności udowodnioną i przytacza dodatkowe rozumowania treści następującéj. Wystawmy sobie dwie płaszczyzny równoległe do $x=0$, i poruszające się z prędkością x przez ciało gazowe. Cząsteczki, zawarte pomiędzy niemi, będą się dzieliły na dwie kategorye: większość cząsteczek będzie się składała z jednostek, chwilowo tylko przebywających pomiędzy płaszczyznami; mniejszość będą stanowiły cząsteczki „stale zamieszkałe“. Żeby należeć do mniejszości, cząsteczka winna mieć składnik prędkości, prostopadły do płaszczyzny $x=0$, w przybliżeniu równy x. *Indywidua*, z których składają się dwie wspomniane kategorye, zmieniają się nieustannie, wszelako *liczba cząsteczek* jednéj i drugiéj pozostaje stałą. Cząsteczki mniejszości zachowywać się będą tak, jak gdyby tylko one były zawarte pomiędzy owemi dwiema płaszczyznami materyalnemi. W istocie: spotkania, w których linia środków (Tait uważa cząsteczki tymczasowo za kule sprężyste) nie będzie blizką do prostopadłości względem x, wytrącają cząsteczkę z pocztu mniejszości, a miejsce jéj zostaje natychmiast zajęte przez inną. Zatém prędkość względna w tych spotkaniach, które powinniśmy teraz brać pod uwagę, zależy wyłącznie od składników prędkości wzdłuż Y i Z. Tym sposobem prędkości y i z muszą być niezależne od x, funkcya f musi mieć kształt $f(x)\, F(y, z)$, a rozumując podobnież daléj dla y i z, jak rozumowaliśmy dla x, otrzymamy wynik żądany. Boltzmann odmawia ścisłości temu dowcipnemu, choć niewątpliwie dość pobieżnemu rozumowaniu. Dowodzi ono, jego zdaniem, że liczba cząsteczek mniejszości, dla których składniki prędkości, brane względem Y i Z, leżą pomiędzy $y, y+dy$; $z, z+dz$, jest niezależną od *czasu*, lecz nie dowodzi, że jest niezależną od x.

[1]) Maxwell, Philosophical Magazine, tom 19, 1860.
[2]) Philosophical Magazine, tom 35, 1868. [Praca, pełna głębokich myśli.]

Sądzę, że plonem dyskusyi w tym punkcie szczególnym może być przypomnienie *pierwszego* dowodu Maxwell'a [1]), który wydaje mi się nieporównanym co do jasności, choć może niezupełnym, niewykształconym w szczegółach. Obok *drugiego* dowodu, opartego na rozważaniu spotkań, (a rozwiniętego w nader staranny sposób przez Boltzmann'a), pierwszy dowód pozostanie przykładem sposobu, w jaki wielkie umysły *odgadują* prawdę.

2. Głównym przedmiotem sporu jest twierdzenie Maxwell'a, według którego przeciętna energia cynetyczna cząsteczek jest jednakową dla wszystkich składników w mięszaninie dowolnéj liczby gazów. Wykazawszy, iż pierwotnemu dowodzeniu tego twierdzenia, podanemu przez Maxwell'a, można wiele zarzucić, Tait wypowiada zdanie, iż do dowodu wprowadzić trzeba więcéj założeń, niż ich wprowadził Maxwell, a za nim (przy wyprowadzaniu jeszcze ogólniejszych twierdzeń) Boltzmann. Nowe założenia Tait'a brzmią jak następuje: (A). Cząsteczki dwóch gazów są w zupełności zmięszane. (B) Cząsteczki każdego gazu odbywają pomiędzy sobą (wewnętrzne) spotkania, tak iż osiągają one stan Maxwell'a (stan, w którym prawem rozdziału prędkości jest prawo Maxwell'a) i szybko naprawiają wszelkie przypadkowe zakłócenia. (C). Pomiędzy każdemi dwiema cząsteczkami, czy tegoż samego, czy rozmaitego rodzaju, jest wolny przystęp dla spotkań, liczba zaś cząsteczek jednego rodzaju nie przeważa znacznie liczby cząsteczek drugiego. Z tych założeń Tait wyprowadza następujący dowód. Niechaj P i Q wyrażają masy cząsteczek pierwszego i drugiego rodzaju. Niechaj u i v będą składowemi prędkości, mierzonemi wzdłuż linii środków podczas uderzenia. Cząsteczki uważamy za kule sprężyste. Jeśli po spotkaniu składowe te wynoszą u' i v', to mamy na mocy warunków spotkania:

$$P\,(u'^2-u^2) = -\frac{4PQ}{(P+Q)^2}\Big(Pu^2-Qv^2-(P-Q)\,uv\Big) = -Q\,(v'^2-v^2)\,.$$

Oznaczając za pomocą kreski pozioméj przeciętną, powiemy, iż przepływ energii pomiędzy gazami ustanie, gdy

$$P\overline{u^2}-Q\overline{v^2}-(P-Q)\,\overline{uv}=0\,;$$

zagadnienie redukuje się więc do znalezienia tych przeciętnych. Równanie ostatnie Tait pisze pod postacią:

$$P\,(\overline{u^2-uv})-Q\,(\overline{v^2-uv})=0$$

i udowadnia, zakładając stosowanie się prawa rozdziału Maxwell'a, że wyrazy, stojące po lewéj stronie, są równe $P\alpha^2$ i $Q\beta^2$ względnie, gdzie α i β oznaczają prędkości najprawdopodobniejsze; wiadomo zaś, że przeciętne energie cynetyczne dla cząsteczek obu gazów wynoszą $\frac{3}{4}P\alpha^2$ i $\frac{3}{4}Q\beta^2$. Twierdzenie Maxwell'a jest więc udowodnione. Wyliczenie przeciętnych, którego rezultat tylko przytoczyłem, przeprowadza Tait drogą, która przy zupełnie odmiennéj formie zewnętrznéj wewnętrznie nie różni się od sposobów, dawniéj w podobnych razach stosowanych. Zauważę tu nawiasowo, że wyraz $-Pu^2+Qv^2+(P-Q)uv$, który występuje w równaniach Tait'a, można doprowadzić do kształtu $Q\,(u-v)^2-(P+Q)\,u\,(u-v)$; chcąc zaś porównać rozwiązanie Tait'a z obliczeniami, które podałem [1]) dla tegoż wypadku, musimy w oznaczeniach moich:

zamiast Tait'a u pisać $v^0\,(\cos\gamma\sin\omega+\sin\gamma\cos\omega\cos\delta)$;
zamiast Tait'a $u-v$ pisać $w\sin\omega$;
zamiast Tait'a P, Q pisać m_1, m_2;

wówczas wyraz powyższy przyjmie postać następującą:

$$m_2\,w^2\sin^2\omega-(m_1+m_2)\,v^0\,w\sin\omega\,(\cos\gamma\sin\omega+\sin\gamma\cos\omega\cos\delta),$$

pod którą wprowadzałem go do rachunku. Okazuje się więc, że rozumowania te, pomimo odmiennego napozór kształtu zewnętrznego, są w gruncie rzeczy identycznemi. Boltzmann rozbiera też samę kwestyą z punktu widzenia niewątpliwie ogólniejszego. Zakłada on, że mamy dwa systematy cząsteczek *w stanie nietrwałym* i okazuje, że dążą one *jednocześnie*: 1.) do osiągnięcia stanu Maxwell'a oraz 2.) do wyrównania swych przeciętnych energij cynetycznych. Niechaj będzie δ odległością środków przy spotkaniu się dwóch niejednakowych, zaś λ i Λ — przy spotkaniu się jednakowych cząsteczek. Niechaj $4\pi v^2 . f(v,t)\,dv$ i $4\pi V^2 . F(V,t)\,dV$ wyraża liczbę cząsteczek pierwszego i drugiego systematu, których prędkość w chwili t leży pomiędzy granicami v a $v+dv$, V a $V+dV$. Niechaj prędkości v, V przed spotkaniem przybierają wartości v', V' po spotkaniu. Niechaj będzie $f=f(v,t)$, $f_1=f(V,t)$, $f'=f(v',t)$, $f'_1=f(V',t)$, $F=F(v,t)$, $F'=F(v',t)$, $F_1=F(V,t)$, $F'_1=F(V',t)$. Niechaj r oznacza prędkość względną, T — kąt $(v\,V)$, $2S$ — kąt wykręcenia się prędkości względnéj w spotkaniu, o — kąt, zawarty pomiędzy płaszczyznami (r,v) i (r, linia środków). Wreszcie niechaj E oznacza sumę:

$$E=\int_0^\infty f(\log f-1)\,v^2\,dv+\int_0^\infty F_1\,(\log F_1-1)\,V^2\,dV\,,$$

która tylko o stałą oraz o stały współczynnik różni się od *entropii* gazu. Przy tych oznaczeniach równanie Boltzmann'a brzmi, jak następuje:

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{dE}{dt}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\mu\,v^2\,V^2\,r\sin T\sin S\cos S\,dv\,dV\,dT\,dS\,do\,,$$

gdzie dla krótkości oznaczyłem:

[1]) Co do historyi kwestyi Tait odpowiada Boltzmann'owi, iż Maxwell o pierwotnym dowodzie wyraził się: *it may appear precarious* (może się wydać wątpliwém), co nie dowodzi, że sam takiego zdania się trzymał.

[1]) Kosmos, rok 1888, str. 164.

$$\lambda^2(f'f'_1-ff_1)\log\frac{ff_1}{f'f'_1}+\Lambda^2(F'F'_1-FF_1)\log\frac{FF_1}{F'F'_1}+2\delta^2(f'F'_1-fF_1)\log\frac{fF_1}{f'F'_1}=\mu.$$

Z równania tego widać, iż E zależy od t (a mianowicie zmniejsza się z czasem), t. j. stan gazu jest nietrwały, póki nie zejdą do zera wyrazy $f'f'_1-ff_1$, $F'F'_1-FF_1$, $f'F'_1-fF_1$. Równania zaś, powstające z przyrównania wyrazów tych do zera, dają łatwo, łącznie z równaniem zachowania energii, prawo Maxwell'a:

$$f=Ae^{-hmv^2} \qquad F=Be^{-hMV^2}$$

i równość przeciętnych $m\overline{v^2}$ i $M\overline{V^2}$. Czytelnik może osądzić z tego streszczenia, jak różnemi drogami szli obaj uczeni. Polemika wszakże dotyczy raczéj *założeń*, wprowadzonych do tych dwóch rozumowań. Tait sądzi, że trzy jego (wyżéj pod A, B, C przytoczone) założenia są niezbędne, chociaż uznaje, że założenia A i B można uważać za wnioski, płynące z C; szczególny kładzie nacisk na warunek, wymagający, by liczba cząsteczek jednego systematu nie była nieporównanie większą od liczby cząsteczek drugiego. Boltzmann odpowiada, że założenia Tait'a są potrzebne do dowodu Tait'a, ale nie do każdego dowodu twierdzenia Maxwell'a. Założenia, które uważa za wystarczające do przeprowadzenia swego dowodu, Boltzmann formułuje w sposób następujący: cząsteczki obu systematów rozdzielone są jednostajnie w przestrzeni, zachowują się jednakowo we wszystkich kierunkach i odbywają spotkania, czas trwania których jest niezmiernie krótkim w porównaniu z czasem, upływającym pomiędzy dwoma spotkaniami. Co zaś do liczby cząsteczek jednego i drugiego systematu, to Boltzmann sądzi, że dowód jego stosuje się zarówno do wszelkich możliwych założeń w tym względzie. Burbury przytoczył nawet rozumowanie, mające udowodnić, iż *jedna obca cząsteczka* A może doprowadzić cząsteczki każdego gazu B do stanu Maxwell'a wówczas nawet, gdyby cząsteczki te (B) wcale pomiędzy sobą nie odbywały spotkań. Należy jednak zauważyć, że rozumowanie Burbury'ego nie dowodzi (a nawet nie dotyczy) takiego twierdzenia, lecz raczéj następującego: jeżeli cząsteczki gazu B, nie odbywające spotkań, osiągnęły już stan Maxwell'a, to obca cząsteczka A, spotykająca się z niemi, nie będzie zakłócała ich stanu.

Boltzmann podnosi, że w przytoczoném powyżéj równaniu jego nie założono nic o stosunkowéj wielkości promieni λ, Λ, δ; przypuszczając tedy, jako wypadek krańcowy, $\lambda=0$, $\Lambda=0$, lecz $\delta>0$, otrzymamy wynik następujący: dwa gazy A i B, nie mające spotkań wewnętrznych AA, BB, lecz działające na siebie spotkaniami AB, dochodzą do równości przeciętnéj energii cynetycznéj. Wynik ten sprzeciwia się wywodom Tait'a; lecz Tait zarzuca, iż założenia Boltzmann'a już zawierają w sobie rezultat, mający zostać udowodnionym. Założenie, orzekające, że dwa systematy nie spotykających się ze sobą wewnętrznie cząsteczek dojdą przy pomocy spotkań „pomiędzygazowych" do jednorodnego rozdziału w przestrzeni i jednakowego zachowywania się we wszystkich kierunkach, wymaga, zdaniem Tait'a, dowodu i nie może być wprowadzaném do rozumowań jako aksyomat. Uważa on za rzecz nieprawdopodobną, aby twierdzenie Maxwell'a stosowało się do takich krańcowych wypadków; dla małéj mniejszości cząsteczek przeciętna energia cynetyczna musi się wahać pomiędzy szerokiemi i wciąż zmieniającemi się granicami.

Trudno oprzeć się wrażeniu, że powyżéj streszczona dyskusya, jakkolwiek ciekawa i pożyteczna dla ustalenia poglądów, jeszcze do dna ważnéj téj kwestyi nie dotarła; wyświetlenie założeń, niezbędnych do udowodnienia twierdzenia Maxwell'a, wymaga, jak sądzę, dalszego, jeszcze szczegółowszego rozbioru.

3. W pierwszéj pracy swojéj Tait podaje określenie przeciętnéj wolnéj drogi cząsteczkowéj, odmienne od dotychczasowego. Niechaj będzie n_v liczbą cząsteczek, których prędkość leży pomiędzy v a $v+dv$, podzieloną przez ogólną liczbę cząsteczek, t. j. niechaj będzie prawdopodobieństwem, że prędkość cząsteczki leży pomiędzy v a $v+dv$. Niechaj będzie p_v wolną drogą cząsteczki, biegnącéj z prędkością v. Tait określa przeciętną wolną drogę jako

$$l_1=\Sigma\,(n_v p_v)\,, \qquad \text{(A)}$$

t. j. wprowadza do obliczenia przeciętnéj drogi wolnéj tylko *jednę* drogę dla każdéj cząsteczki. Maxwell, a za nim O. E. Meyer, Boltzmann, Watson przyjęli inną definicyą: liczymy wszystkie spotkania, jakie odbywa dana cząsteczka w ciągu np. sekundy, zapisujemy wszystkie wolne drogi, jakie przebiegła pomiędzy kolejnemi spotkaniami w ciągu tego czasu i bierzemy przeciętną arytmetyczną wszystkich tych dróg. W téj metodzie wprowadzamy zatém do rachunku przeciętnéj tyle składników dla każdéj cząsteczki, ile spotkań cząsteczka ta odbyła. Niechaj N_v będzie liczbą spotkań cząsteczki o prędkości v; wówczas określenie Maxwell'a prowadzi do wzoru:

$$l_2=\frac{\Sigma\,(n_v N_v p_v)}{\Sigma\,(n_v N_v)}=\frac{\Sigma\,(n_v v)}{\Sigma\,(n_v v/p_v)}\,, \qquad \text{(B)}$$

gdyż $N_v p_v=v$. Tait zapytuje, dla czegoby nie rozważać trzeciéj jeszcze wielkości, mianowicie iloczynu z przeciętnéj prędkości przez przeciętny czas, potrzebny do przebiegnięcia wolnéj drogi? Wielkość ta wynosiłaby:

$$l_3=\Sigma\,(n_v v)\,.\,\Sigma\,(n_v p_v/v)\,. \qquad \text{(C)}$$

Dla porównania ze sobą wielkości l_1, l_2, l_3 oznaczmy przez L wolną drogę „Clausiusowską", t. j. tę, którą miałaby cząsteczka, gdyby wszystkie pozostałe były w spoczynku. Wiadomo, że $L=1/N\pi s^2$, gdzie N jest liczbą cząsteczek w jednostce objętości, s odległością środków cząsteczek przy spotkaniu. Otóż Tait oblicza, iż wielkości, określone przez powyższe wzory A i C, zależą od L w sposób następujący:

$$l_1 = L.\int\limits_0^\infty \frac{4\,x^4\,e^{-x^2}\,dx}{xe^{-x^2}+(2x^2+1)\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx}\quad\text{oraz}$$

$$l_3 = L.\int\limits_0^\infty \frac{4\sqrt{h}\,x^3\,e^{-x^2}\,dx}{xe^{-x^2}+(2x^2+1)\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx},$$

tak iż zestawienie ich z wielkością l_2 Maxwell'a:

$$l_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,.\,L$$

daje, co następuje:

$$l_1 = 0{,}677\ L\ ;\ l_2 = 0{,}707\ L\ ;\ l_3 = 0{,}734\ L\,.$$

Tait obstaje za uznaniem l_1, Boltzmann za uznaniem l_2 za najnaturalniejszą przeciętną. Kto wie, czy nie najwięcéj słuszności ma za sobą „zdanie wielkiéj powagi“, cytowane przez Tait'a, iż najlepszém określeniem jest to, które pozwala najłatwiéj wykonać całkowania. W każdym razie za zasługę należy poczytać Tait'owi jasny i ścisły rozbiór całéj téj sprawy.

---

3. O ZASADZIE ZACHOWANIA ENERGII.

Max Planck. „Das Princip der Erhaltung der Energie“. (Zasada zachowania energii). Lipsk, 1887, str. XII i 247.

PRZEZ

E. NATANSONA.

Wydział filozoficzny Uniwersytetu w Getyndze ogłosił na rok 1887 konkurs, którego przedmiot określono w sposób następujący:

„Od czasu Tomasza Young'a („Lectures on natural philosophy“, 1807, lecture VIII) przypisują fizycy ciałom *energią*, od czasu zaś Williama Thomsona (Philosophical Magazine, IV, 1855, p. 523) wprowadzoną została do nauki zasada zachowania energii, i często jako prawo, do wszystkich ciał się stosujące, wypowiadaną bywa. Pod nazwą tą, zdaje się, bywa rozumianém to samo prawo, które Helmholtz ogłosił wcześniéj jako „zasadę zachowania siły““.

„Wymaganym jest przedewszystkiém dokładny obraz historyczny rozwoju pojęcia o energii i rozbiór wypadków, w których termin ten był stosowany; daléj gruntowne zbadanie, z punktu widzenia fizyki, pytania, czy należy odróżniać różne rodzaje energii, i jakie określenie ich w takim razie przyjąć wypada; wreszcie wymaganém jest rozstrzygnięcie pytania, jak powinna zostać wygłoszoną i jak może być udowodnioną zasada zachowania energii, jako ogólne prawo przyrody.“

Trzech autorów pokusiło się o rozwiązanie tak postawionego zadania; pomiędzy nimi Planck, w pracy, któréj tytuł przytoczyłem w nagłówku. Jakkolwiek praca Planck'a nie rozwiązuje wszystkich zadań, stanowiących