

# Wykorzystanie rozkładu Cauchy'ego do opisu zmian cen usług finansowych świadczonych przez banki

Norbert Duczkowski<sup>a</sup>, Lubomir Słowik<sup>b</sup>

**Streszczenie.** Kluczowe modele rynków finansowych zakładają, że analizowane szeregi czasowe można scharakteryzować przy użyciu rozkładu Gaussa, jednak to założenie bardzo często jest niespełnione. Głównym celem badania omawianego w artykule jest weryfikacja możliwości zastosowania rozkładu Cauchy'ego do opisu zmian cen usług finansowych świadczonych przez banki w Polsce. Dodatkowo zweryfikowano hipotezę o zależności zmian cen usług bankowych od poziomu stopy referencyjnej publikowanej przez NBP. W pracy wykorzystano dane wtórne: wartości wskaźnika cen usług finansowych za okres styczeń 2010 – grudzień 2020 publikowane przez GUS oraz stopę referencyjną NBP za ten sam okres. Badanie potwierdziło, że empiryczny rozkład wartości wskaźnika cen można opisać rozkładem Cauchy'ego. Wykazało także jednokierunkową przyczynowość w sensie Grangera wpływu stopy referencyjnej na ceny usług finansowych świadczonych przez banki w Polsce.

**Słowa kluczowe:** usługi finansowe, ceny, banki, rozkład Cauchy'ego

**JEL:** G210, G500, C130

## Application of the Cauchy distribution to describe changes in the prices of financial services provided by banks

**Abstract.** Key models of financial markets assume that time series can be characterised by means of the Gaussian distribution. However, this assumption is often unfulfilled. The aim of this paper is to verify the possibility of using the Cauchy distribution to describe changes in the prices of financial services provided by banks in Poland. Additionally, the research examines a hypothesis assuming that the changes in the prices of banking services depend on the level of the reference rate published by the National Bank of Poland (NBP). The work uses secondary data: price indices of financial services published by Statistics Poland from January 2010 to December 2020 and the NBP reference rate for the same period. The research confirmed that the empirical distribution of price indices can be described by the Cauchy distribution. The study also confirmed a one-direction causality in the Granger's sense between the reference rate and the prices of financial services provided by banks in Poland.

**Keywords:** financial services, prices, banks, Cauchy distribution

---

<sup>a</sup> Szkoła Główna Handlowa w Warszawie, Szkoła Doktorska, Polska / SGH Warsaw School of Economics, Doctoral School, Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4543-2678>. Autor korespondencyjny / Corresponding author, e-mail: [nd110753@doktorant.sgh.waw.pl](mailto:nd110753@doktorant.sgh.waw.pl).

<sup>b</sup> Grand Parade, Polska / Poland. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9817-9576>. E-mail: [lubomirslowik@gmail.com](mailto:lubomirslowik@gmail.com).

## 1. Wprowadzenie

System bankowy stanowi część systemu finansowego i odgrywa bardzo istotną rolę w gospodarce m.in. dzięki budowie narzędzi oraz całego otoczenia do akumulacji środków finansowych (Jaworski i Zawadzka, 2007), a także ich inwestowania (Dropia i Duczkowski, 2021). Bezpośrednio stwarza również warunki do transformacji środków pieniężnych względem czasu i ryzyka (Jaworski i Zawadzka, 2007), a także stanowi infrastrukturę dla transferu pieniądza (przelewy i płatności, karty płatnicze). Poza tym dostarcza podmiotom działającym na rynku finansowym informacji cenowej, zwłaszcza w kontekście kosztu pieniądza (Jaworski i Zawadzka, 2007), który z kolei wpływa na decyzje podejmowane zarówno przez gospodarstwa domowe, jak i podmioty gospodarcze. Jedną z kluczowych determinant popytu na usługi finansowe świadczone przez banki jest ich cena (Stodulny, 2009), będąca immanentną cechą produktu czy usługi. Analiza rozkładów wskaźników cen usług finansowych świadczonych przez banki może zatem dostarczyć wiele informacji na temat tego rynku oraz procesów, jakim podlegają ceny usług finansowych.

Kluczowe modele rynków finansowych, a także modele cenowe zakładają, że analizowane szeregi czasowe można scharakteryzować przy użyciu rozkładu Gaussa, zwanego także rozkładem normalnym. Takie założenie wynika bezpośrednio z centralnego twierdzenia granicznego. Jednak analizując dane empiryczne, można zaobserwować, że założenie o normalności rozkładów finansowych szeregów czasowych bardzo często jest niespełnione (Duczkowski, 2021). Ta obserwacja przyczyniła się do sformułowania wielu modeli niegaussowskich procesów stochastycznych. Badania empiryczne wskazują, że stopy zwrotu z aktywów finansowych charakteryzują się bardzo często asymetrią oraz leptokurtycznością. Stanowi to podstawę do dyskusji nad zasadnością stosowania modeli gaussowskich do procesów cenowych. Rozwiązaniem w tym przypadku okazują się inne rozkłady, które uwzględniają wyszczególnione powyżej obserwacje empiryczne (Duczkowski, 2021). Wymienić tu należy m.in. całą klasę rozkładów  $\alpha$ -stabilnych (stabilnych), do której zalicza się m.in. rozkład Cauchy'ego. W przypadku tego rozkładu, jako jednego z trzech w klasie rozkładów stabilnych, nie ma istotnego ograniczenia (Nolan, 1997, 2018), jakim jest brak ściśle określonych postaci funkcji definiujących rozkłady  $\alpha$ -stabilne. Pozostałe dwa przypadki to rozkłady Lévy'ego oraz wspomniany wcześniej rozkład Gaussa (Nolan, 2018).

Głównym celem badania omawianego w artykule jest weryfikacja możliwości zastosowania rozkładu Cauchy'ego do opisu zmian cen usług finansowych świadczonych przez banki w Polsce. Możliwość zastosowania tego rozkładu jest zarazem główną hipotezą badawczą. Na podstawie przeglądu literatury można stwierdzić, że ceny usług bankowych, w odróżnieniu od cen aktywów finansowych na różnych

rynkach, nie były dotąd przedmiotem badania weryfikującego możliwość stosowania tzw. rozkładów gruboogonowych. Dodatkowo w ramach badania zweryfikowano hipotezę o zależności zmian cen usług bankowych od poziomu stopy referencyjnej publikowanej przez Narodowy Bank Polski.

## 2. Ceny usług bankowych – przegląd literatury

Znaczenie cen w usługach, w tym w szczególności w usługach bankowych, było wielokrotnie analizowane przez wielu badaczy, zarówno polskich (Korzusznik i Michalska, 2013; Przybylska-Kapuścińska, 1997; Stodulny, 2009), jak i zagranicznych (Mandal, 2017; Oliveira i in., 2019), w różnych aspektach oraz przekrojach. Badania dotyczyły cen usług świadczonych przez banki bezpośrednio (opłaty, prowizje) i pośrednio (wpływ stopy procentowej). Weryfikacji poddawano hipotezy dotyczące różnych typów produktów i usług bankowych: produktów kredytowych (wycena ryzyka), produktów transakcyjnych (koszty przelewów i prowadzenia rachunków) czy produktów inwestycyjnych (koszty zarządzania).

Ze względu na cel badania omawianego w artykule przegląd literatury został ograniczony do najważniejszego, zdaniem autorów, aspektu analizy cen usług bankowych, jakim jest ewentualne niezadowolenie klientów z cen usług, a przez to chęć zmiany usługodawcy. Najważniejsze badania w tym zakresie wraz z wnioskami przedstawiono w zestawieniu 1.

**Zestawienie 1.** Wybrane badania w zakresie znaczenia cen usług bankowych i ich wpływu na niezadowolenie klientów

Autorzy i data publikacji	Wnioski z badania
Hirschman (1980), Ennew i Binks (1996), Levesque i McDougall (1996b), Stewart (1998), Colgate i Hedge (2001), Vyas i Raitani (2013), Mandal (2017)	ceny produktów bankowych (opłaty oraz stopy procentowe) odgrywają kluczową rolę w rozważaniu ewentualnej zmiany banku lub w podjęciu ostatecznej decyzji w tym zakresie przez klienta
Colgate i Hedge (2001), Szypszak (2012)	klienci określają ceny jako obszar pozwalający na zwiększenie zadowolenia ze swojego banku
Bolton i Bronkhorst (1995), Barnes (1997), Boote (1998)	niezadowolenie z cen usług finansowych może skutkować zmianą postawy klienta wobec firmy (nie musi się to od razu wiązać ze zmianą dostawcy)
Bejou i Palmer (1998), Hocutt (1998), Stewart (1998), Colgate i Hedge (2001)	decyzja o zmianie banku poprzedzona jest najczęściej stopniowym i czasami długotrwałym rozluźnianiem relacji między klientem a bankiem i zazwyczaj wynika z istnienia wielu problemów (ceny są jednym z nich)
Limbrick (1993), Colgate i Hedge (2001)	podczas korzystania z usług finansowych przez klienta zdarzają się incydenty skutkujące decyzją o natychmiastowej zmianie banku
Andreasen (1977), Solnick i Hemenway (1992), Bolton i Bronkhorst (1995), Levesque i McDougall (1996a), Stewart (1998)	decyzję o zmianie dostawcy usług finansowych poprzedza co najmniej jedna reklamacja

**Zestawienie 1.** Wybrane badania w zakresie znaczenia cen usług bankowych i ich wpływu na niezadowolenie klientów (dok.)

Autorzy i data publikacji	Wnioski z badania
Rust i Zahorik (1993), Holmlund i Kock (1996), Colgate i Hedge (2001)	proces zmiany dostawcy usług finansowych, w tym w zakresie bankowości detalicznej, jest wyjątkowo złożony
Keaveney (1995), Colgate i in. (1996), Ennew i Binks (1996), Levesque i McDougall (1996b), Colgate i Hedge (2001)	zmiana usługodawcy może wynikać z konkretnych problemów, zdarzeń i czynników niezwiązanych z usługami (ceny usług finansowych są jednym z nich)

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Colgate i Hedge (2001).

Wymienione w zestawieniu 1 badania podkreślają znaczenie cen usług finansowych i dowodzą aktualności problemu badawczego. Prace te zyskują na znaczeniu zwłaszcza dziś, w dobie rosnącej presji cenowej, konkurencji fintechów, a także historycznie niskich stóp procentowych.

To właśnie obecny poziom stóp procentowych jest jednym z głównych czynników, które sprawiają, że banki detaliczne w Europie, w tym w Polsce, znajdują się pod dużą presją kosztową i dochodową. Skoncentrowanie działalności wielu instytucji finansowych na bankowości detalicznej oraz pojawienie się nowych konkurentów świadczących usługi płatności mobilnych zaostrza rywalizację w sektorze finansowym. Zależność między stopą procentową a kosztami usług bankowych była przedmiotem wielu artykułów, czego przykładem może być praca Stodulnego (2009). Autor wskazuje na aktualny poziom stóp procentowych NBP jako jeden z głównych czynników egzogenicznych wpływających na politykę cenową banków i zauważa, że na skutek obniżania stóp procentowych oraz rosnącej konkurencji w bankowości możemy obserwować spadek marży odsetkowej, który skutkuje wzrostem znaczenia opłat i prowizji. Obserwacje związane ze znaczeniem poziomu stóp procentowych NBP dla kosztów usług finansowych świadczonych przez banki zawierają także inne prace badawcze (Golec, 2012; Korzusznik i Michalska, 2013; Przybylska-Kapuścińska, 1997; Szyszko, 2010). Wskazują one pośrednio lub bezpośrednio na stopy procentowe jako determinanty cen usług bankowych, ale nie weryfikują statystycznej zależności między stopami a cenami usług.

Rozkład Cauchy'ego należy do grupy rozkładów stabilnych (Nolan, b.r.). Ze względu na szeroki zakres stosowania cała grupa rozkładów stabilnych jest przedmiotem wielu badań i artykułów naukowych, głównie ze względu na (co do zasady) tzw. cięższe ogony, niż przewiduje rozkład Gaussa, powszechnie stosowany w finansach (Krężolek, 2013; Nolan, b.r.). Analiza literatury dotyczącej zastosowania rozkładów stabilnych w ekonomii i finansach pokazuje, że najwięcej prac skupia się na zastosowaniu rozkładów stabilnych do modelowania rozkładów zwrotów z aktywów (Duczkowski, 2021; Nolan, b.r.). W zestawieniu 2, zaczerpniętym z pracy Nolana (b.r.) oraz opublikowanym także w artykule Duczkowskiego (2021), wymieniono wybrane badania w zakresie zastosowania rozkładu stabilnego w ekonomii i finansach opublikowane od 2000 r.

**Zestawienie 2.** Wybrane badania w zakresie zastosowania rozkładu stabilnego w ekonomii i finansach opublikowane od 2000 r.

Tematyka badawcza	Autorzy i data publikacji <sup>a</sup>
Rynek giełdowy	Belkacem (2000), Rachev i Mittnik (2000), Hardy (2003), Kozubowski (2003), Nolan (2003), Rachev (2003), Borak (2005), Haas (2005), Lombardi i Calzolari (2005), Ortobelli i Rachev (2005), Martin (2006), Frain (2007, 2009), Dominicy (2010), Kaplan (2012)
Wycena opcji oraz analiza ryzyka (VAR)	Hauksson i Rachev (2001), Khindanova (2001), Vollert (2001), Carr i Wu (2003), Cartea i Howison (2003), Lamantia (2006), Marinelli (2006), Sy (2006), Cartea i Howison (2007), Frain (2009)
Rynek walutowy oraz kryptowaluty	Fofack i Nolan (2001), Bastereld (2003, 2005), Lan i Tan (2007), Zhao i Wu (2009), Kakinaka i Umeno (2020)
Rynek nieruchomości	Brown (2000, 2004, 2005), Young (2006, 2008)
Rynek towarowy	Jin (2005), Weron (2005, 2006), Chinghamu (2015), Gnunay i Khaki (2018), Rodríguez-Aguilar (2019, 2020)
Ubezpieczenia oraz pozostałe badania	De Vany (2003), De Vany i Walls (2004), Walls (2005), Duczkowski (2021)

a Pełny opis bibliograficzny prac znajduje się w: Nolan (b.r.).

Źródło: Duczkowski (2021) i Nolan (b.r.).

Z przeglądu literatury przedmiotu wynika, że ceny usług finansowych świadczonych przez banki nie były dotąd przedmiotem badania weryfikującego możliwość stosowania rozkładu stabilnego, w tym jego szczególnej postaci – rozkładu Cauchy’ego, co w połączeniu ze znaczeniem cen usług finansowych i czynników je determinujących (m.in. stopy procentowe) przyczyniło się do przeprowadzenia niniejszego badania i wypełnienia luki badawczej.

### 3. Metoda badania

W badaniu wykorzystano dane miesięczne za okres styczeń 2010 – grudzień 2020 dotyczące wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki, publikowane przez Główny Urząd Statystyczny. Analizie statystycznej poddano szereg czasowy wartości wskaźnika opisanych stosunkiem wartości cen usług finansowych świadczonych przez banki  $z(i)$  w miesiącu  $m$  roku  $r$  do wartości ceny usługi finansowej w analogicznym miesiącu roku poprzedniego ( $r - 1$ ), tzw. wskaźnik  $r/r$ , co można wyrazić za pomocą formuły

$$z(i) = INDEX_i = P(m; r) / P(m; r - 1), \quad (1)$$

gdzie:

$r$  – rok,

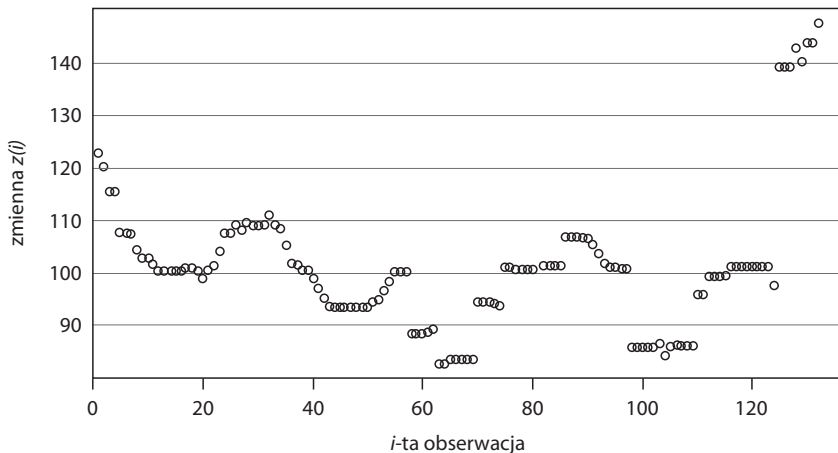
$m$  – miesiąc,

$P$  – cena usługi finansowej,

$i$  –  $i$ -ta obserwacja w szeregu czasowym.

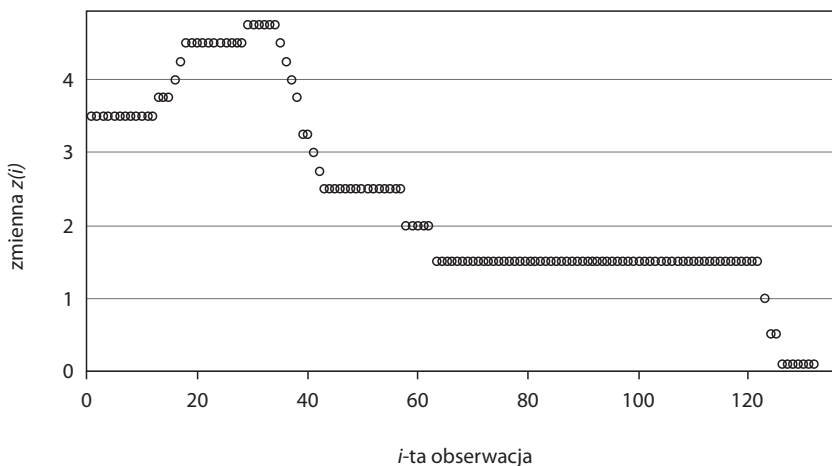
Zmiany wartości zmiennej  $z(i)$  przedstawiono na wyk. 1. W ramach badania wykorzystano także dane publikowane przez NBP (b.r.) w zakresie wartości stopy referencyjnej, oznaczonej jako zmienna  $a(i)$ , które przedstawiono na wyk. 2.

**Wykr. 1.** Wskaźnik cen usług finansowych świadczonych przez banki w okresie styczeń 2010 – grudzień 2020



Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021).

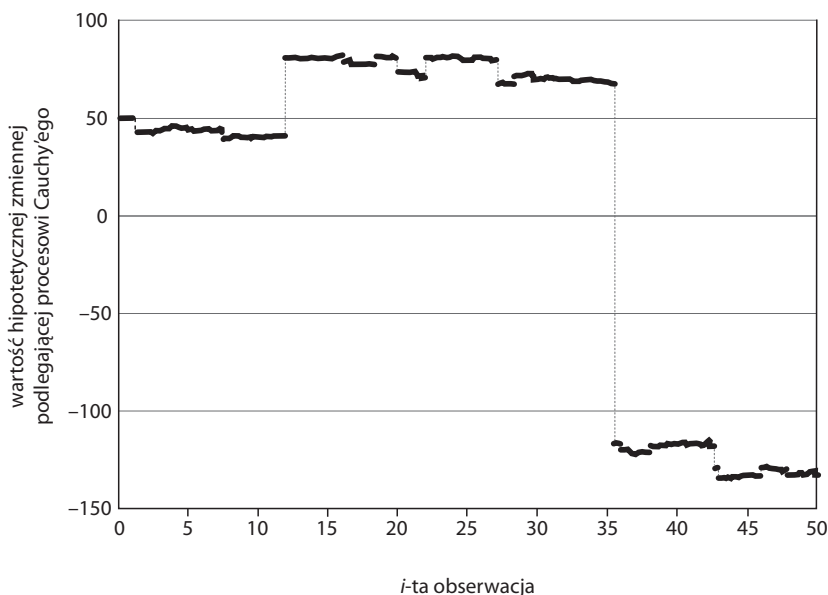
**Wykr. 2.** Stopa referencyjna NBP w okresie styczeń 2010 – grudzień 2020



Źródło: opracowanie własne na podstawie: NBP (b.r.).

Analizując przebieg szeregu czasowego zmiennej  $z(i)$ , można stwierdzić, że wskaźniki cen usług finansowych świadczonych przez banki czasowo utrzymują się na bardzo podobnym poziomie, a następnie ich wartości zmieniają się w wyniku znaczącej zmiany cen usług finansowych, po czym znów następuje okres małych fluktuacji, który poprzedza kolejną dużą korektę wartości. Ten schemat jest bardzo podobny do przebiegu stochastycznego procesu Cauchy'ego (schemat 1), a wynika bezpośrednio z tego, że sektor bankowy dostosowuje ceny swoich usług do otoczenia, by następnie dokonywać jedynie nieznacznych korekt lub wprowadzać promocje.

**Schemat 1.** Przykładowa realizacja stochastycznego procesu Cauchy'ego

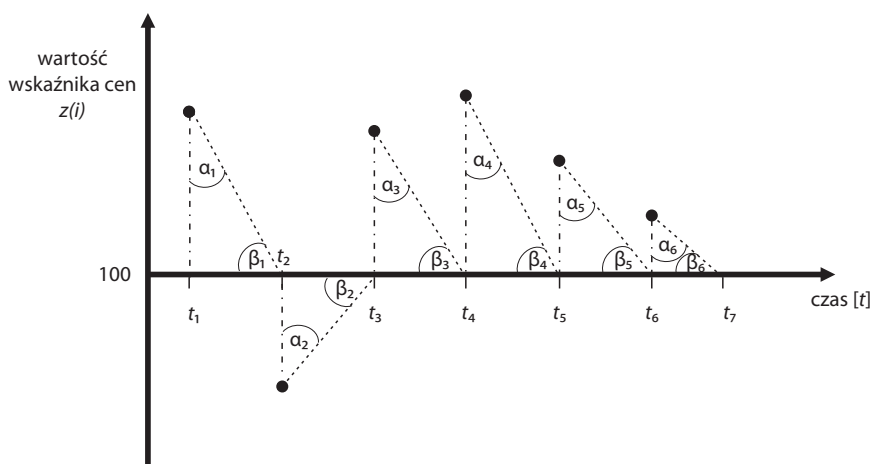


Źródło: Kwaśnicki (2014).

Jeżeli realizacje w czasie zmiennej  $z(i)$  mogą być opisane procesem Cauchy'ego, to jej rozkład będzie podlegał rozkładowi Cauchy'ego. Jest to ciągły rozkład prawdopodobieństwa, który w literaturze przedmiotu (głównie z zakresu fizyki) zwany jest także rozkładem Lorentza (Weisstein, b.r.; Zalewski, 2004) lub rozkładem Breitau-Wignera (Nowak, 2002; Zalewski, 2004). Wśród jego wielu zastosowań można wskazać m.in. opis kształtu linii widmowych w fizyce jądrowej czy rocznych maksymalnych jednodniowych opadów deszczu i pływów rzecznych (Nowak, 2002). Rozkład Cauchy'ego ma niezdefiniowaną wartość oczekiwaną oraz wariancję, jak rów-

nież współczynnik asymetrii i ekscesu (Nowak, 2002). Warto jednak podkreślić, że jest to jeden z trzech rozkładów z rodziny rozkładów stabilnych, który ma analitycznie określoną funkcję gęstości prawdopodobieństwa. W trakcie omawianego badania fakt ten stał u podstaw weryfikacji, czy wskaźniki cen usług finałowych świadczonych przez banki podlegają rozkładowi normalnemu oraz stabilnemu, po wcześniejszym ich dopasowaniu do danych empirycznych.

**Schemat 2.** Model wartości wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki



Źródło: opracowanie własne.

Jeżeli zatem proces stochastyczny zmian cen usług finansowych świadczonych przez banki będzie procesem Cauchy'ego, a co za tym idzie wartość zmiennej  $z(i)$  będzie podlegać rozkładowi Cauchy'ego, to do opisu tej zmiennej można zastosować model opisany poniżej i przedstawiony na schemacie 2. Jest to model dyskretny, który dzieli cały szereg czasowy na osobne trójkąty prostokątne o długości boków przyprostokątnych odpowiednio  $z(i)$  oraz  $(t_{i+1} - t_i)$ . Przy założeniu, że rozkład kąta  $\alpha$  jest rozkładem jednostajnym, możemy stwierdzić, że odległość  $(t_{i+1} - t_i)$  będzie podlegać rozkładowi Cauchy'ego (Weisstein, b.r.). Zmieniając zatem perspektywę i przyjmując, że odległość  $(t_{i+1} - t_i)$  jest stała, tak aby odpowiadało to modelowi zaprezentowanemu na schemacie 2, a także było zgodne z praktyką badawczą (regularne, cykliczne publikowanie wskaźników przez GUS), stwierdzamy, że kąt  $\beta$  będzie podlegał takiemu samemu rozkładowi przy założeniu zmienności boku  $z(i)$ . Rozkład zmiennej  $z(i)$  będzie więc także podlegać rozkładowi Cauchy'ego. Hipotezę badawczą uprawdopodobnia również analiza danych empirycznych i porównanie wykresu przebiegu szeregu czasowego wartości wskaźnika cen usług finansowych



świadczonych przez banki (wykr. 1) ze sztucznie wygenerowaną realizacją procesu stochastycznego Cauchy'ego (schemat 1).

W ramach prac badawczych za pomocą pakietu R-Studio (funkcja *fitdistr()* w bibliotece *MASS* oraz funkcja *stableFit()* w bibliotece *fBasics*) dopasowano rozkład Cauchy'ego oraz – dla porównania – rozkład normalny i rozkład  $\alpha$ -stabilny i wyznaczono ich parametry. Następnie zweryfikowano hipotezę w zakresie dopasowania rozkładu o określonych parametrach do danych empirycznych. Weryfikacja wykonywana była przy użyciu testu statystycznego Andersona-Darlinga, dostępnego w R-Studio (funkcja *ad.test()* w bibliotece *ADGofTest*).

W kolejnym kroku, także przy użyciu pakietu R-Studio, zweryfikowano zależność przyczynową w sensie Grangera pomiędzy zmiennymi  $a$  i  $z$ . W tym celu wykorzystano test przyczynowości Grangera (funkcja *grangertest()* w bibliotece *lmtest*). Oprócz tego wyznaczono wartości współczynnika korelacji tych dwóch zmiennych za pomocą trzech metod: Pearsona, Kendalla oraz Spearmana, aby uniknąć pozornej przyczynowości w rozumieniu Grangera. Z tego też względu test przyczynowości wykonywano dwukierunkowo w celu określenia przyczynowości zmiennych  $a$  na  $z$  oraz wpływu  $z$  na  $a$ .

Należy zaznaczyć, że wskaźnik cen usług finansowych świadczonych przez banki, obliczany przez GUS w ramach wyznaczania indeksu cen konsumpcyjnych CPI (Consumer Price Index), obejmuje bardzo szeroką grupę usług (GUS, 2021). GUS odnotowuje w tej pozycji ceny opłat za przelewy pieniężne, wpłaty na konta oraz sam koszt prowadzenia konta. Szeroki zakres analizowanego wskaźnika podkreśla jego kompleksowość i syntetyczność (uwzględnia najbardziej popularne produkty transakcyjne) oraz powoduje, że jego obserwacja może stanowić swoisty barometr rynku najpowszechniejszych usług finansowych. Z tego też względu analiza rozkładu zmiennej  $z$ , określonej wzorem (1), może dostarczyć istotnych informacji na temat zmian cen na tym rynku.

#### 4. Wyniki badania

Podstawowe statystyki opisowe wyznaczone dla rozkładu empirycznego wartości zmiennych  $z$  i  $a$  przedstawia tabl. 1.

W tabl. 1, a także na wykr. 3, które prezentują m.in. empiryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa, widać wyraźnie, że rozkład zmiennej  $z$  charakteryzuje się smuklejszym kształtem w porównaniu z rozkładem normalnym i większą liczbą obserwacji skoncentrowanych wokół średniej/modalnej, a także występowaniem większej liczby obserwacji z ogonów rozkładu (tzw. grube ogony).

**Tabl. 1.** Podstawowe statystyki opisowe rozkładu empirycznego wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki oraz stopy referencyjnej NBP

Parametry	Zmienne	
	$z$	$a$
Minimum .....	82,67	0,10
I kwartyl .....	94,12	1,50
Mediana .....	100,69	1,50
Średnia .....	101,25	2,34
III kwartyl .....	104,72	3,50
Maksimum .....	147,95	4,75
Odchylenie standardowe .....	13,15	1,29
Skośność .....	1,62	0,48
Kurtoza .....	3,37	-0,85

Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021) i NBP (b.r.).

Następnie dopasowano rozkład Cauchy'ego oraz rozkłady normalny i  $\alpha$ -stabilny i wyznaczono ich parametry. Wyniki zawarte są w tabl. 2 oraz na wyk. 3.

**Tabl. 2.** Oszacowane parametry rozkładów wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki

Parametry	Rozkład		
	Cauchy'ego	normalny	$\alpha$ -stabilny
Pozycja .....	100,33	.	.
Skala .....	4,29	.	.
Średnia .....	.	101,25	.
Odchylenie standardowe .....	.	13,10	.
$\alpha$ .....	.	.	1,07
$\beta$ .....	.	.	0,40
$c$ .....	.	.	5,01
$\mu$ .....	.	.	99,83

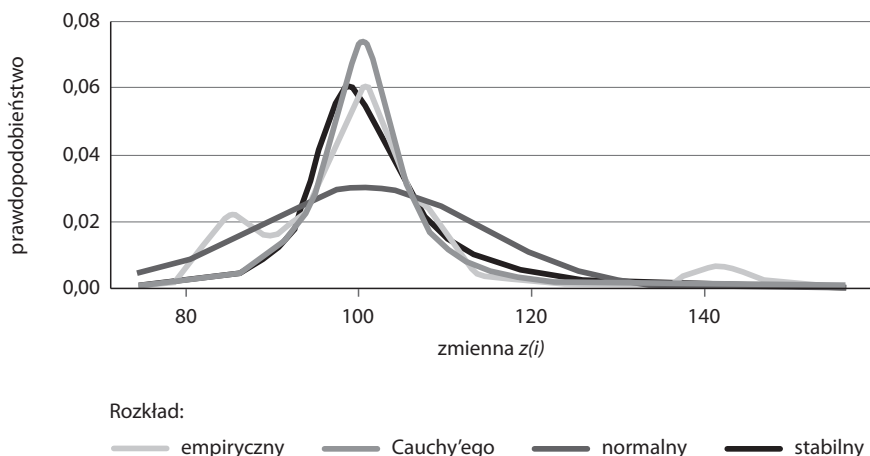
Uwaga. Parametry rozkładu stabilnego: parametr stabilności  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0,2]$ , parametr skośności  $\beta$ ,  $\beta \in [-1,1]$ , parametr skali  $c$ ,  $c \in (0,\infty)$ , parametr lokalizacji  $\mu$ ,  $\mu \in (-\infty, \infty)$ .

Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021) i NBP (b.r.) i własnych obliczeń.

Wyniki przedstawione w tabl. 2 są potwierdzeniem wniosków wpływających z otrzymanych statystyk opisowych rozkładu zmiennej  $z$  (tabl. 1).

Po wyznaczeniu parametrów rozkładów wskazanych w tabl. 2 zweryfikowano hipotezę dotyczącą dopasowania wyznaczonego rozkładu, o zadanych parametrach, do danych empirycznych. Weryfikację wykonywano przy użyciu testu statystycznego Andersona-Darlinga, a jej wynik zamieszczono w tabl. 3. Wartość  $p$ -value dla rozkładu Cauchy'ego jest większa od 0,05, zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy mówiącej, że rozkład zmiennej  $z$  jest rozkładem Cauchy'ego. Dla rozkładu normalnego oraz  $\alpha$ -stabilnego hipotezę zerową należy odrzucić.

**Wykr. 3.** Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) funkcja rozkładu wartości wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki



Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021).

**Tabl. 3.** Wyniki testu Andersona-Darlinga dla wyznaczonych funkcji rozkładów wartości wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki

Hipotezy i parametry	Rozkład		
	Cauchy'ego	normalny	$\alpha$ -stabilny
Hipotezy: $H_0$ .....	rozkład zmiennej $z$ jest rozkładem Cauchy'ego, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tabl. 3	rozkład zmiennej $z$ jest rozkładem normalnym, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tabl. 3	rozkład zmiennej $z$ jest rozkładem $\alpha$ -stabilnym, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tabl. 3
$H_A$ .....	rozkład zmiennej $z$ nie jest rozkładem Cauchy'ego, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tabl. 3	rozkład zmiennej $z$ nie jest rozkładem normalnym, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tabl. 3	rozkład zmiennej $z$ nie jest rozkładem $\alpha$ -stabilnym, gdzie parametry rozkładu są zgodne z tabl. 3
AD .....	1,91	6,66	3,93
$p$ -value .....	0,10	<0,01	<0,01
Komentarz .....	brak podstaw do odrzucenia $H_0$	należy odrzucić $H_0$ na rzecz $H_A$	należy odrzucić $H_0$ na rzecz $H_A$

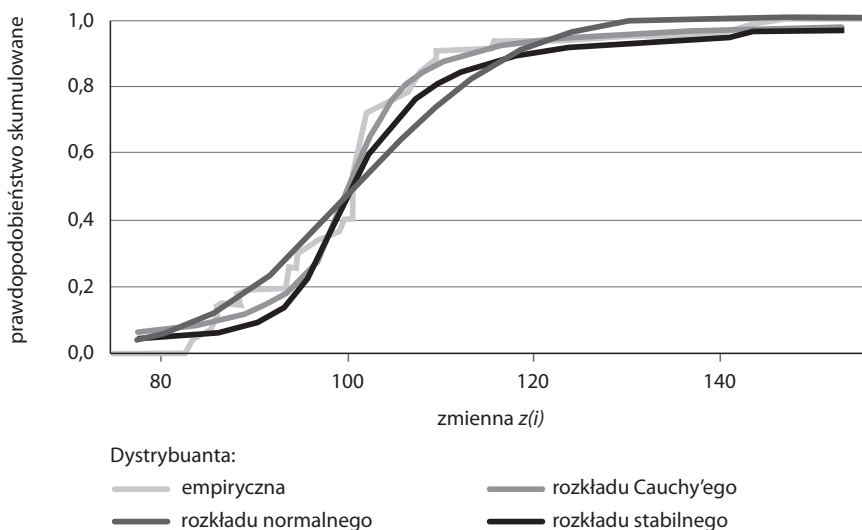
Uwaga. Parametry  $AD$  oraz  $p$ -value oznaczają odpowiednio wartość statystyki testującej i prawdopodobieństwa w ramach stosowanego testu statystycznego.

Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021) i NBP (b.r.).

O jakości dopasowania rozkładu teoretycznego Cauchy'ego do danych empirycznych mogą świadczyć nie tylko wysokie wartości  $p$ -value uzyskane w ramach testu Andersona-Darlinga, lecz także empiryczny kształt funkcji rozkładu oraz dystrybucyjność na tle funkcji teoretycznej (dopasowanej), co przedstawiono na wyk. 3 i 4. Dowodzi to, że rozkład Cauchy'ego o oszacowanych parametrach może bardzo do-

brze opisywać zmiany cen usług finansowych świadczonych przez banki, co potwierdza hipotezę badawczą oraz zasadność przedstawionego modelu. Takich wniosków nie można wysnuć w przypadku rozkładów normalnego i stabilnego. Nie są to zatem dystrybucje, które w odpowiedni sposób opisywałyby wskaźniki cen usług finansowych świadczonych przez banki.

**Wykr. 4.** Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) dystrybuanta rozkładu wartości wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki



Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021).

Wyniki weryfikacji zależności przyczynowej w sensie Grangera pomiędzy zmiennymi  $a$  i  $z$  oraz współczynniki korelacji przedstawia tabl. 4.

**Tabl. 4.** Wyniki testu Grangera oraz wartości współczynnika korelacji stopy referencyjnej NBP i wskaźnika cen usług finansowych świadczonych przez banki

Wyszczególnienie	Wyniki	
	( $a$ ; $z$ )	( $z$ ; $a$ )
Parametry: $F$ .....	4,3597	0,1949
$Pr(F)$ .....	0,03878	0,6596
Komentarz .....	występuje przyczynowość zmiennych $a$ i $z$	nie występuje przyczynowość zmiennych $a$ i $z$
Współczynnik korelacji ( $a$ ; $z$ ): Pearsona .....	-0,06	
Kendala .....	0,17	
Spearmana .....	0,18	

Uwaga. Parametry  $F$  i  $Pr(F)$  oznaczają odpowiednio wartość statystyki testującej i prawdopodobieństwa w ramach stosowanego testu statystycznego.

Źródło: opracowanie własne na podstawie: GUS (2021) i NBP (b.r.).

Brak korelacji lub niskie wartości współczynnika korelacji zmiennych  $a$  i  $z$  w połączeniu z wartością  $Pr(F) < 0,05$  dla testu wpływu zmiennej  $a$  na zmienną  $z$  (przy jednoczesnym braku wpływu  $z$  na  $a$ ) statystycznie potwierdzają hipotezę badawczą, czyli zależność przyczynową wpływu stopy referencyjnej NBP na ceny usług finansowych. Widać zatem – co jest zgodne z praktyką biznesową, a także wynika z literatury przedmiotu – że stopa referencyjna NBP pośrednio i bezpośrednio stanowi istotną determinantę cen usług bankowych. Stopa referencyjna NBP wpływa bowiem na marżę odsetkową, której spadek jest rekompensowany przez instytucje finansowe zmianą opłat i prowizji.

## 5. Podsumowanie

W ramach badania omówionego w artykule zweryfikowano rozkład empiryczny wskaźników cen usług finansowych świadczonych przez banki w Polsce publikowanych przez GUS. Badanie potwierdziło, że empiryczny rozkład wartości wskaźnika cen można opisać rozkładem Cauchy'ego, co pozwala na stosowanie modelu przedstawionego w pracy. Dodatkowo w ramach badania pozytywnie zweryfikowano hipotezę o zależności zmian cen usług bankowych od poziomu stopy referencyjnej publikowanej przez NBP, to znaczy potwierdzono jednokierunkową przyczynowość w sensie Grangera. Przeprowadzone badanie pozwoliło także wskazać cechy charakterystyczne rozkładów zmian cen usług finansowych, takie jak grube ogony i wyższy szczyt funkcji gęstości w porównaniu z rozkładem normalnym. Prawdopodobieństwo wystąpienia nietypowych zmian cen jest zatem większe, niż w przypadku gdyby miały one rozkład normalny.

Wyniki zyskują na aktualności zwłaszcza w kontekście decyzji Rady Polityki Pieniężnej z 6 października 2021 r., która podniosła stopy procentowe w Polsce, obniżone do historycznie niskiego poziomu na początku pandemii COVID-19. Wyniki te mogą mieć także praktyczne zastosowanie. Znając rozkłady, jakim podlegają zmiany cen usług finansowych, można stosunkowo łatwo modelować wpływ zmiany cen na inne parametry rynku, jak np. rentowność sektora bankowego. Przeprowadzone badanie może być uznane za istotny wkład w rozwój nauki o finansach poprzez określenie parametrów rozkładu, jakim podlegają wartości wskaźnika cen usług finansowych w Polsce oraz potwierdzenie zasadności stosowania funkcji Cauchy'ego. Według wiedzy autorów brakuje bowiem opracowań w tym zakresie. Dalsze badania mogą dotyczyć rynków międzynarodowych i porównania otrzymanych wyników między krajami. Interesujące byłoby również porównanie rozkładów zmian cen usług finansowych na tle innych produktów, np. ubezpieczeń.

## Bibliografia

- Andreasen, A. R. (1977). A Taxonomy of Consumer Satisfaction/Dissatisfaction Measures. *The Journal of Consumer Affairs*, 11(2), 11–24. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6606.1977.tb00612.x>.
- Barnes, J. G. (1997). Closeness, strength and satisfaction: examining the nature of relationships between providers of financial services and their retail customers. *Psychology & Marketing*, 14(8), 765–790. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1520-6793\(199712\)14:8<765::AID-MAR3>3.0.CO;2-C](https://doi.org/10.1002/(SICI)1520-6793(199712)14:8<765::AID-MAR3>3.0.CO;2-C).
- Bejou, D., Palmer, A. (1998). Services failure and loyalty: an exploratory empirical study of airline customers. *Journal of Services Marketing*, 12(1), 7–22. <https://doi.org/10.1108/08876049810202339>.
- Bolton, R. N., Bronkhorst, T. M. (1995). The relationship between customer complaints to the firm and subsequent exit behaviour. *Advances in Consumer Research*, 22, 92–100. <https://www.acrwebsite.org/volumes/7676/volumes/v22/NA-22>.
- Boote, J. (1998). Towards a comprehensive taxonomy and model of consumer complaining behaviour. *Journal of Consumer Satisfaction, Dissatisfaction and Complaining Behaviour*, 11, 141–149. <https://core.ac.uk/download/pdf/50631.pdf>.
- Colgate, M., Hedge, R. (2001). An investigation into the switching process in retail banking services. *International Journal of Bank Marketing*, 19(5), 201–212. <https://doi.org/10.1108/02652320110400888>.
- Colgate, M., Stewart, K., Kinsella, R. (1996). Customer defection: a study of student market in Ireland. *International Journal of Bank Marketing*, 14(3), 23–29. <https://doi.org/10.1108/02652329610113144>.
- Dropia, J., Duczowski, N. (2021). Trzy i pół teorii bankowości [maszynopis zgłoszony do publikacji].
- Duczowski, N. (2021). Zastosowanie rozkładu  $\alpha$ -stabilnego do modelowania zmian cen ubezpieczeń. *Wiadomości Ubezpieczeniowe*, (2), 109–128. <https://doi.org/10.33995/wu2021.2.7>.
- Ennew, C. T., Binks, M. R. (1996). The impact of service quality and service characteristics on customer retention: small businesses and their banks in the UK. *British Journal of Management*, 7(3), 219–230. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8551.1996.tb00116.x>.
- Główny Urząd Statystyczny. (2021). *Wskaźniki cen towarów i usług konsumpcyjnych w czerwcu 2021 r.* <https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ceny-handel/wskazniki-cen/wskazniki-cen-towarow-i-uslug-konsumpcyjnych-w-czerwcu-2021-roku,2,117.html>.
- Golec, M. M. (2012). Determinanty zmian stóp procentowych w bankach spółdzielczych. *Studia Ekonomiczne*, (105), 237–246.
- Hirschman, A. O. (1980). Exit, Voice, and Loyalty: Further Reflections and a Survey of Recent Contributions. *The Milbank Memorial Fund Quarterly. Health and Society*, 58(3), 430–453. <https://doi.org/10.2307/3349733>.
- Hocutt, M. A. (1998). Relationship dissolution model: antecedents of relationship commitment and the likelihood of dissolving a relationship. *International Journal of Service Industry Management*, 9(2), 189–200. <https://doi.org/10.1108/09564239810210541>.
- Holmlund, M., Kock, S. (1996). Relationship marketing: the importance of customer perceived service quality in retail banking. *The Service Industries Journal*, 16(3), 287–304. <https://doi.org/10.1080/02642069600000029>.

- Jaworski, W. L., Zawadzka, Z. (red.). (2007). *Bankowość: podręcznik akademicki*. Warszawa: Poltext.
- Keaveney, S. M. (1995). Customer switching behaviour in service industries: an exploratory study. *Journal of Marketing*, 59(2), 71–82. <https://doi.org/10.1177/002224299505900206>.
- Korzusznik, H., Michalska, H. (2013). Zagadnienia opłat i prowizji bankowych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej w Poznaniu*, 49(4), 467–480. [https://www.wydawnictwo.wsb.pl/sites/wydawnictwo.wsb.pl/files/czasopisma-tresc/ZN\\_49\\_Poz\\_calosc.pdf](https://www.wydawnictwo.wsb.pl/sites/wydawnictwo.wsb.pl/files/czasopisma-tresc/ZN_49_Poz_calosc.pdf).
- Krężolek, D. (2013). Metody aproksymacji indeksu ogona rozkładów alfa-stabilnych na przykładzie GPW w Warszawie. *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Wydziałowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*, (162), 21–30. <https://www.sbc.org.pl/dlibra/publication/96253/edition/90786/content>.
- Kwaśnicki, M. (2014, 16 maja). *Fluktuacje procesów Lévy'ego*. 5. Forum Matematyków Polskich, Poznań. <http://prac.im.pwr.edu.pl/~kwasnicki/stuff/Poznan.pdf>.
- Levesque, T. J., McDougall, G. (1996a). Customer dissatisfaction: the relationship between types of problems and customer response. *Canadian Journal of Administrative Sciences*, 13(3), 264–276. <https://doi.org/10.1111/j.1936-4490.1996.tb00736.x>.
- Levesque, T. J., McDougall, G. (1996b). Determinants of customer satisfaction in retail banking. *International Journal of Bank Marketing*, 14(7), 12–20. <https://doi.org/10.1108/02652329610151340>.
- Limbrick, D. (1993). A trivial pursuit?. *Managing Service Quality: An International Journal*, 3(3), 39–42. <https://doi.org/10.1108/EUM0000000003169>.
- Mandal, P. C. (2017). Dimensions affecting customer switching in retail banking: A review. *International Journal of Applied Research*, 3(1), 832–836. <https://www.allresearchjournal.com/archives/2017/vol3issue1/PartL/3-1-158-434.pdf>.
- Narodowy Bank Polski. (b.r.). *Podstawowe stopy procentowe NBP w latach 1998–2021*. [https://www.nbp.pl/home.aspx?f=/dzienne/stopy\\_archiwum.htm](https://www.nbp.pl/home.aspx?f=/dzienne/stopy_archiwum.htm).
- Nolan, J. P. (b.r.). *Bibliography on stable distributions, processes and related topics*. Pobrane 14 lipca 2021 r. z <https://edspace.american.edu/jpnolan/wp-content/uploads/sites/1720/2021/07/StableBibliography.pdf>.
- Nolan, J. P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 13(4), 759–774. <https://doi.org/10.1080/15326349708807450>.
- Nolan, J. P. (2018). *Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data*. <https://edspace.american.edu/jpnolan/wp-content/uploads/sites/1720/2020/09/Chap1.pdf>.
- Nowak, R. (2002). *Statystyka dla fizyków*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- Oliveira, S., Carvalho, J. M., Oliveira, R. R. (2019). Factors that influence customer defection: Analysis of the banking sector. *REBRAE*, 12(2), 119–135. <https://periodicos.pucpr.br/index.php/REBRAE/article/view/25267>.
- Przybylska-Kapuścińska, W. (1997). Determinanty oprocentowania kredytów w bankach komercyjnych (część II – czynniki makroekonomiczne). *Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny*, (4), 69–84.
- Rust, R., Zahorik, A. J. (1993). Customer satisfaction, customer retention and market share. *Journal of Retailing*, 69(2), 193–215. [https://doi.org/10.1016/0022-4359\(93\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0022-4359(93)90003-2).

- Solnick, S. J., Hemenway, D. (1992). Complaints and disenrollment at a health maintenance organisation. *The Journal of Consumer Affairs*, 26(1), 90–99. <https://doi.org/10.1111/j.1745-6606.1992.tb00017.x>.
- Stewart, K. (1998). An exploration of customer exit in retail banking. *International Journal of Bank Marketing*, 16(1), 6–14. <https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/02652329810197735/full/pdf>.
- Stodulny, P. (2009). Determinanty kształtowania cen na rynku usług bankowych. *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu*, (113), 75–94.
- Szypszak, M. (2012). Banki w oczach klientów. *Miesięcznik Finansowy Bank*, (1), 54–56. <https://alebank.pl/wp-content/uploads/2012/02/bank.01.2012.054-056.pdf>.
- Szyszko, M. (2010). Analiza związku zmian stóp procentowych NBP i oprocentowania depozytów bankowych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej w Poznaniu*, (30), 83–157. [https://www.wydawnictwo.wsb.pl/sites/wydawnictwo.wsb.pl/files/czasopisma-tresc/zn\\_poz\\_30.pdf#page=83](https://www.wydawnictwo.wsb.pl/sites/wydawnictwo.wsb.pl/files/czasopisma-tresc/zn_poz_30.pdf#page=83).
- Weisstein, E. W. (b.r.). *Cauchy Distribution*. <https://mathworld.wolfram.com/CauchyDistribution.html>.
- Vyas, V., Raitani, S. (2013). Drivers of customers' switching behaviour in Indian banking industry. *International Journal of Bank Marketing*, 32(4), 321–342. <https://doi.org/10.1108/IJBM-04-2013-0033>.
- Zalewski, K. (2004). *Mały wykład z mechaniki kwantowej*. <https://th.if.uj.edu.pl/%7Ezalewski/notatki.pdf>.