Le noyau singulier fermé

O jądrze osobliwym zamkniętym

Par

W. POGORZELSKI (Varsovie)

Soit $N(x,y)$ une fonction analytique uniforme définie dans une bande Ω qui comprend l'axe réel. On suppose: 1) que cette fonction admette la période réelle a par rapport à la variable x et y, 2) qu'elle ait une singularité polaire pour $x=y$ c. à d. *celle de* la fonction $\dfrac{1}{x-y}$ et qu'elle n'ait d'autres singularités dans la bande Ω, en négligeant les multiples de a.

On appele la fonction $N(x,y)$ *noyau singulier fermé* si l'équation intégrale

$$(1) \qquad \int_0^a N(x,y)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

n'a d'autre solution analytique que la solution banale $\varphi=0$.

L'intégrale dans l'équation (1) a la valeur principale de Cauchy c. à d.:

$$(2) \qquad \int_0^a N(x,y)\,\varphi(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{x-\varepsilon} N\varphi\,dy + \int_{x+\varepsilon}^{a} N\varphi\,dy\right].$$

La fonction $\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{a}(x-y)$ n'est pas un noyau singulier fermé, puisque l'équation

$$\int_0^a \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

admet évidemment la solution non nulle

$$\varphi(y) = \text{const.}$$

Il est facile à montrer que la fonction

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) + \mu \tag{3}$$

(où μ est une constante différente de zéro) est un noyau singulier fermé [1]).

Dans l'article cité nous avons donné une condition nécessaire et suffisante pour que le noyau de la forme

$$A_0(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) + A(x) \cdot B(y)$$

soit fermé.

Maintenant nous voulons chercher cette condition pour le noyau singulier de la forme plus générale

$$N(x, y) = A_0(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x) B_\nu(y). \tag{4}$$

On suppose que les fonctions données

$$A_0(y); \quad A_\nu(x); \quad B_\nu(y)$$

soient holomorphes dans la bande Ω et qu'elles admettent la période réelle a.

Pour étudier le noyau (4) considérons l'équation

$$\int_0^a \left[A_0(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x) B_\nu(y) \right] \varphi(y)\,dy = 0. \tag{5}$$

[1]) Voir l'article de l'auteur „Sur une équation intégrale de première espèce", (Journal de Mathématiques, (1939).

Cette équation est équivalente à l'équation

$$\int_0^a \left\{ \left[\operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) + 1 \right] \int_0^a \left[A_0(z) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(y-z) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(y) B_\nu(z) \right] \varphi(z)\,dz \right\} dy = 0 \tag{6}$$

c. à d. toute solution φ de l'équation (5) remplit l'équation (6) et réciproquement toute solution de l'équation (6) remplit l'équation (5), le noyau (3) étant fermé.

Pour transformer l'équation (6) nous appliquons la transformation suivante de l'intégrale iterée, due à H. Poincaré [2])

$$\int_0^a N_1(x, y) \left[\int_0^a N(y, z)\,\varphi(z)\,dz \right] dy = -\pi^2 R(x) R_1(x) + \int_0^a \left[\int_0^a N_1(x, y)\, N(y, z)\,dy \right] \varphi(z)\,dz \tag{7}$$

où l'on a désigné par $R(x)$ et $R_1(x)$ les résidus des fonctions $N(x, y)$ resp. $N_1(x, y)$ au pôle $y = x$.

D'après la transformation (7), nous pouvons écrire l'équation (6) sous la forme équivalente

$$\int_0^a \left\{ \int_0^a \left[\operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y) \cdot \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(y-z) \right] dy \right\} A_0(z)\,\varphi(z)\,dz + \\ - a^2 A_0(x)\,\varphi(x) + \int_0^a \left[\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu(z) \int_0^a A_\nu(y) \operatorname{cotg} \frac{\pi}{a}(x-y)\,dy \right] \varphi(z)\,dz + \\ + \int_0^a \left[\int_0^a \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(y) B_\nu(z)\,dy \right] \varphi(z)\,dz = 0. \tag{8}$$

[2]) Théorie des marées (1910).

Appliquons maintenant l'identité

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(y-z)=$$

$$=1+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-z)\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(y-z)\right]$$

alors l'équation (8) prendra la forme

$$-a^2A_0(x)\varphi(x)+ \tag{9}$$

$$+\int_0^a\left[aA_0(z)+\sum_{\nu=1}^n B_\nu(z)C_\nu(x)\right]\varphi(z)\,dz=0$$

où l'on a désigné

$$C_\nu(x)=\int_0^a A_\nu(y)\left[1+\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)\right]dy\qquad(\nu=1,\dots,n). \tag{10}$$

Pour résoudre l'équation (9) remarquons que sa solution aura nécessairement la forme

$$\varphi(x)=\frac{1}{a^2A_0(x)}\sum_{\nu=0}^n K_\nu C_\nu(x) \tag{11}$$

K_ν étant les constantes à déterminer; on suppose naturellement que $A_0(x)\neq 0$. D'après la relation (9), les constantes K_ν remplissent les relations

$$K_\nu=\int_0^a B_\nu(z)\varphi(z)\,dz\qquad(\nu=0,1,2,\dots n) \tag{12}$$

où nous avons admis que

$$B_0(z)=aA_0(z);\quad C_0(x)=1. \tag{13}$$

En substituant l'expression (11) dans les relations (12), nous aurons le système suivant d'équations linéaires homogènes pour déterminer les constantes K_ν:

$$\sum_{\alpha=0}^n K_\alpha\left[\int_0^a\frac{B_\nu(z)}{a^2A_0(z)}C_\alpha(z)\,dz-\delta_{\alpha\nu}\right]=0\qquad(\nu=0,1,2,\dots n) \tag{14}$$

où $\delta_{\alpha\nu}$ est le symbole de Kronecker.

Inversement, toute solution $K_0, K_1,\dots K_n$ du système (14) substituée dans l'expression (11) fournit une solution de l'équation intégrale (9).

Pour que le système (14) n'admette que la solution nulle

$$K_0=0;\quad K_1=0;\dots;\quad K_n=0$$

il faut et il suffit que le déterminant du système (14) soit différent de zéro:

$$\det\left|\int_0^a\frac{B_\nu(z)}{a^2A_0(z)}C_\alpha(z)\,dz-\delta_{\alpha\nu}\right|\neq 0\qquad(\alpha,\nu=0,1,\dots n). \tag{15}$$

L'inégalité (15) est évidemment une condition *suffisante* de fermeture du noyau (4).

Nous allons montrer que cette condition est à la fois *nécessaire* si entre les fonctions données $A_1,\dots A_n$ *n'existe* pas une relation linéaire de la forme

$$\sum_{\nu=1}^n p_\nu A_\nu(x)=q \tag{16}$$

p_ν et q étant les constantes ne s'annulant pas toutes à la fois.

Soit $K_0, K_1,\dots K_n$ une solution du système (14).

La fonction $\varphi(x)$ définie par la formule (11) étant alors une solution de l'équation intégrale (5) et le noyau de cette équation étant par hypothèse fermé, on a identité:

$$\sum_{\nu=0}^n K_\nu C_\nu(x)=0 \tag{17}$$

où bien la relation

$$K_0+\int_0^a\left[\sum_{\nu=1}^n K_\nu A_\nu(y)\right]\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)\,dy+\sum_{\nu=1}^n K_\nu\int_0^a A_\nu(y)\,dy=0. \tag{18}$$

Cette relation a la forme d'une équation

$$\int_0^a \psi(y)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)\,dy = P(\mathrm{const}) \tag{19}$$

qui est équivalente à l'équation

$$\int_0^a \left\{\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(x-y)+1\right]\int_0^a \psi(z)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{a}(y-z)\,dz\right\}dy = Pa$$

d'où il résulte par l'application d'une transformation déjà utilisée la relation

$$-a\,\psi(x)+\int_0^a \psi(z)\,dz = P.$$

Or, cette équation n'admet que la solution

$$\psi(x) = \mathrm{const}$$

c. à d. qu'il existe une relation linéaire

$$\sum_{\nu=1}^{n} K_\nu A_\nu(y) = \mathrm{const}. \tag{20}$$

En vertu de nos hypothèses on doit avoir

$$K_0 = K_1 = \ldots = K_n = 0$$

et par conséquent le système (14) n'admet que la solution nulle, d'où il résulte que le déterminant (15) est différent de zéro.

Quelques remarques se rapportant aux noyaux itérés dans l'espace à p-dimensions

Uwagi dotyczące jąder iterowanych w przestrzeni p-wymiarowej

Par

R. HAMPEL (Varsovie)

A. Remarques préliminaires

Nous nous occuperons de la limitation plus précise des noyaux itérés du noyau:

$$K(A,B) = \frac{H(A,B)}{r^\alpha} \tag{1}$$

où $H(A,B)$ est une fonction donnée de deux points:

$$A(x_1, x_2 \ldots x_p); \quad B(\xi_1; \xi_2 \ldots \xi_p)$$

dans le domaine Ω à p dimensions, borné et intégrable dans ce domaine. La fonction $H(A,B)$ remplit dans le domaine Ω la condition:

$$0 < H(A,B) < W \tag{2}$$

où W est une constante positive; r désigne la distance entre les points A et B

$$r = |AB|;$$

nous supposons enfin

$$\alpha < p.$$