Soit l'ensemble Ω des m intervalles $I_1, I_2, \ldots I_m$ n'ayant ancuns points communs et obtenus par déplacement d'intervalle $(0, a)$ le long de l'axe réel.

Considérons les fonctions suivantes déterminées dans l'ensemble Ω:

$M(s_\alpha) = F_\alpha(s)$ (si s_α est situé dans l'intervalle I_α et correspond au poin s d'intervalle $0, a$)

$X(s_\alpha, \tau_\gamma) = K_{\alpha\gamma}(s, \tau)$ (si s_α est dans l'intervalle I_α et τ_γ dans I_γ).

Soit $P(s)$ la fonction inconnue sur Ω liée avec μ_α par les relations

$P(s_\alpha) = \mu_\alpha(s)$ (si s est dans l'intervalle I_α).

Nous en obtenons une seule équation de Fredholm

$$P(s) = M(s) + \lambda \int_\Omega X(s, \tau)\, P(\tau)\, d\tau \tag{25}$$

D'après la formuie connue de Fredholm la solution de l'equation (25) aura la forme suivante:

$$P(s) = M(s) + \lambda \int_\Omega \frac{D(s, \tau, \lambda)}{D(\lambda)} M(\tau)\, d\tau \tag{26}$$

sous la condition que la valeur $\lambda = \dfrac{1}{\pi^2}$ n'est pas la valeur caractéristique du noyau $X(s, \tau)$.

Les valeurs de la fonction P aux points s_α situés dans les intervalles particuliers I_α $(\alpha = 1, 2 \ldots m)$ nous donnent les valeurs des fonctions $\mu_\alpha(s)$ $(\alpha = 1, 2 \ldots m)$.

Les fonctions $\Gamma_{\alpha\rho}(s, \tau)$ comme les sommes des séries uniformément convergentes (22) sont holomorphes dans le voisinage du segment $(0, a)$. Il en résulte que les fonctions $K_{\alpha\gamma}(s, \tau)$ et $F_\alpha(s)$ sont aussi holomorphes au voisinage du segment $(0, a)$.

Nous en concluons donc, que les fonctions obtenues

$$\mu_1(s),\ \mu_2(s) \ldots \mu_m(s)$$

sont également holomorphes au voisinage du segment $(0, a)$.

D'après les transformations (9), (10), (11), (12), vraies pour toutes les fonctions holomorphes $\mu_\alpha(s)$, la solution de l'équatton (24) vérifie le système (15), donc aussi le système (13), (7) et le système donné (5).

En substituant les fonctions $\mu_1(s), \mu_2(s) \ldots \mu_m(s)$ dans les intégrales (3), nous obtenons la solution $u_1, u_2, \ldots u_m$ du problème aux limites proposé.

Państwowy Instytut Matematyczny

Quelques applications des équations intégrales dans la théorie d'électricité

O pewnych zastosowaniach równań całkowych w teorii elektryczności

Par

R. HAMPEL (Varsovie)

Considérations préliminaires:

Dans ce travail j'étudie deux problèmes aux limites concernant les équàtions aux dérivées partielles du type elliptique.

J'obtiens les solutions des problèmes en m'appuyant sur la théorie des équations intégrales de Fredholm.

I. Le problème de la perturbation du champ électrique produite par l'introduction d'un diélectrique.

A. Mise en équation.

Considérons un champ électrostatique

$$K_0(x_1, x_2, x_3) = -\operatorname{grad} V_0(x_1, x_2, x_3)$$

défini dans un domaine spatial Λ; le potentiel $V_0(x_1, x_2, x_3)$ est donc une fonction harmonique de coordonnées x_1, x_2, x_3 définie dans le domaine Λ. Nous introduisons à l'intérieur du champ un diélectrique non homogène mais isotrope qui remplit un domaine borné Ω limité par une surface S.

Je suppose donnée la perméabilité électrique

$$\varepsilon(x_1, x_2, x_3) \geqslant 1$$

en fonction du point $M(x_1, x_2, x_3)$ du domaine Ω. Il faut déterminer la perturbation du champ causée par la polarisation du diélectrique introduit.

Nous supposons que la surface S admette le plan tangent continu et les rayons de courbure principaux déterminés (non nuls).

En désignant par $U(x_1, x_2, x_3)$ le potentiel causé par la présence du diélectrique, le potentiel V du champ, après l'introduction du diélectrique, sera:

(1) $$V(x_1, x_2, x_3) = V_0(x_1, x_2, x_3) + U(x_1, x_2, x_3).$$

En désignant par $\vec{P} = \dfrac{\vec{D} - \vec{K}}{4 \cdot \pi}$ le vecteur de la polarisation et par $\vec{D}$ l'induction électrique, on peut écrire d'après le théorème de Poisson

$$div\,\vec{K} = -4\pi\, div\,\vec{P}, \text{ d'où:} \qquad div\,(\vec{K} + 4\pi \cdot \vec{P}) = div\,\vec{D} = 0$$

Puisque le diélectrique non homogène Ω est isotrope, on a donc $\vec{D} \parallel \vec{K}$ (le vecteur $\vec{K}$ désigne l'intensité du champ électrique) et de plus $\epsilon = \dfrac{\vec{D}}{\vec{K}}$; nous pouvons donc écrire successivement:

$$div\,(\varepsilon \cdot \vec{K}) = 0; \qquad \varepsilon \cdot \Delta V + \operatorname{grad} V \operatorname{grad} \varepsilon = 0$$

$$\Delta V + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0;$$

$$\Delta U + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V_0}{\partial x_i} = 0$$

en désignant par $F(x_1, x_2, x_3)$ la fonction donnée $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial V_0}{\partial x_i}$ nous obtiendrons pour la fonction $U(x_1, x_2, x_3)$ une équation suivante:

(2) $$\Delta U + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_i} + F(x_1, x_2\, x_3) = 0$$

à l'intérieur du domaine Ω et

$$\Delta U = 0$$

à l'extérieur du domaine Ω.

En écrivant que la composante normale du vecteur d'induction est continue quand on traverse la surface S, c. à. d.

$$D_n^{(i)} = (\varepsilon \cdot K_n)^{(i)} = D_n^{(e)} = K_n^{(e)}$$

on aura la condition aux limites:

$$\left(\varepsilon \cdot \frac{dV}{dn}\right)_i = \left(\frac{dV}{dn}\right)_e$$

et de même:

$$\left(\varepsilon \cdot \frac{dU}{dn}\right)_i - \left(\frac{dU}{dn}\right)_e = \frac{dV_0}{dn}(1 - \varepsilon) = f(P)$$

où $f(P)$ désigne une fonction donnée, la lettre i concerne la valeur limite inférieure et la lettre e la valeur limite extérieure.

En regardant ε comme un paramètre on obtient deux cas particuliers: le problème de Neumann intérieur pour $\varepsilon = 0$; extérieur pour $\varepsilon = \infty$.

B. Quelques propriétés d'une certaine fonction de Green.

Pour donner la solution du problème précédent, j'introduis une fonction de Green $G(A, B)$ définie d'une manière suivante:

Elle est harmonique par rapport au point A à l'intérieur et à l'extérieur de Ω, excepté au point intérieur B nommé le pôle; on peut l'écrire:

(4) $$G(A, B) = \frac{1}{AB} - g(A, B)$$

la fonction $g(A, B)$ reste harmonique même en $A = B$.

La fonction $G(A, B)$ satisfait en outre à la condition aux limites sur la surface S

(4[1]) $$\left(\varepsilon \cdot \frac{dG}{dn}\right)_i - \left(\frac{dG}{dn}\right)_e = 0$$

La fonction $g(A, B)$ satisfait alors en chaque point P de la surface S à l'équation:

(5) $$\left(\varepsilon \cdot \frac{dg}{dn}\right)_i - \left(\frac{dg}{dn}\right)_e = \Psi(P, B)$$

en désignant par $\Psi(P, B)$ la fonction connue suivante:

$$\Psi(P, B) = \frac{d\dfrac{1}{PB}}{dn}(\varepsilon - 1)$$

Pour démontrer l'existence de la fonction harmonique $g(A, B)$ remplissant la condition (5) nous la réprésenterons par un potentiel de simple couche:

(6) $$g(A,B)=\iint_S \frac{\mu(P,B)}{AP}\,d\sigma_P$$

La densité $\mu(P,B)$ de cette couche doit satisfaire à l'équation intégrale:

(7) $$\mu(P,B)+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-\varepsilon(P)}{1+\varepsilon(P)}\cdot\iint_S\frac{\mu(M,B)\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma_M+\frac{1}{2\pi}\Psi(P,B)=0$$

qu'on obtient immédiatement en s'appuyant sur les relations suivantes entre les valeurs limites intérieures et extérieures des dérivées du potentiel:

(6^1) $$\left(\frac{dg}{dn}\right)_e-\left(\frac{dg}{dn}\right)_i=4\pi\mu(P,B)$$

(6^2) $$\left(\frac{dg}{dn}\right)_e+\left(\frac{dg}{dn}\right)_i=2\cdot\iint_S\frac{\mu(M,B)\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma_M$$

M et P sont deux points de la surface S dont la distance est $r=MP$; le point intérieur B joue le rôle d'un paramètre; φ désigne l'angle du vecteur PM avec la normale intérieure en P. En supposant la fonction $\varepsilon(P)$ constante sur la surface S (le cas du domaine homogène étant encore plus particulier) et en désignant $\frac{1-\varepsilon(P)}{1+\varepsilon(P)}$ par λ, c. à. d. $\varepsilon=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$, il est facile de démontrer que les valeurs caractéristiques de l'équation:

(7^1) $$2\cdot\pi\mu+\lambda\iint_S\frac{\mu\cos\varphi}{r^2}\,d\sigma+\Psi=0$$

sont absolument $\geqslant 1$.

En effet on obtient dans ce cas ($\Psi=0$) en multipliant l'équation (5) par g et en intégrant:

(8) $$\varepsilon\cdot\iint_S g\left(\frac{dg}{dn}\right)_i d\sigma=\iint_S g\left(\frac{dg}{dn}\right)_e d\sigma.$$

Mais d'après le théorème de Green on a les égalités:

(8^1) $$\iiint_D\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^2 d\omega+\iint_S g\left(\frac{dg}{dn}\right)_i d\sigma=0$$

dans le cas de la normale intérieure et:

(8^2) $$\iiint_{D^1}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)^2 d\omega-\iint_S g\left(\frac{dg}{dn}\right)_e d\sigma=0$$

dans le cas de la normale extérieure.

En confrontant l'équation (8) avec (8^1) et (8^2) on obtient immédiatement:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_k}\right)=0;\quad (k=1,2,3)$$

et l'on conclut de l'équation (6^1) que $\mu(P,B)\equiv 0$.

Le théorème est donc demontré dans le cas $\varepsilon(P)=\text{const}>0$ sur la surface S $\left(\text{on a } -1<\lambda=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}<1\right)$ et d'autant plus pour $\varepsilon<1$; $(-1<\lambda<0)$.

Dans le cas particulier lorsque le domaine Ω est limité par une sphère S ayant l'unité pour rayon, l'équation homogène (7) prend la forme:

$$\mu+\frac{\lambda}{4\pi}\cdot\iint_S\frac{\mu}{r}\,d\sigma=0\qquad\left(\cos\varphi=\frac{r}{2};\ \Psi=0\right)$$

les valeurs caractéristiques étant $\lambda=-(2n+1)$; $n=0,1,2\ldots$ les fonctions propres constituent $(2n+1)$ fonctions sphériques linéairement distinctes de Laplace (Y_n) d'ordre n.

Le noyau de l'équation (7)

$$N(P,Q)=\frac{1-\varepsilon(P)}{1+\varepsilon(P)}\cdot\frac{\cos\varphi}{r^2}$$

est comparable avec $\frac{1}{r}$, donc deux itérations nous amèneront à une équation avec le noyau borné $N_2(P,Q)$:

(9) $$N_2(P,Q)=\iint_S\iint_S N(P,Q_1)\cdot N(Q_1,Q_2)\cdot N(Q_2,Q)\,d\sigma_{Q_1}d\sigma_{Q_2}$$

et l'équation (7) prendra la forme:

(10) $$\mu(P,B)=\Psi_1(P,B)+\lambda\iint_S N_2(P,Q)\mu(Q,B)\,d\sigma_Q;\ \lambda=\frac{1}{8\pi^3}$$

avec:

icm©

$$\Psi_1(P,B) = -\frac{\Psi(P,B)}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^2}\cdot\iint_S \Big[N(P,Q) + \tag{11}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_S \Big[N(P,Q_1)\cdot N(Q,Q)\,d\sigma_{Q_1}\Big]\Big]\Psi(Q,B)\,d\sigma_Q$$

la solution de l'équation (10) aura la forme:

$$\mu(P,B) = \Psi_1(P,B) + \lambda\iint_S \boldsymbol{N}(P,Q,\lambda)\Psi_1(Q,B)\,d\sigma_Q \tag{12}$$

où la fonction méromorhe $\boldsymbol{N}(P,Q,\lambda)$ du paramètre λ constitue le noyau résolvant de l'équation (10). Cette formule est applicable dans le cas où $\lambda = \frac{1}{8\pi^3}$ n'est pas un pôle de la fonction $\boldsymbol{N}(P,Q,\lambda)$. Nous allons montrer qu le noyau résolvant $\boldsymbol{N}(P,Q,\lambda)$ du noyau $N_2(P,Q)$ admet la dérivée par rapport à l'arc superficiel en tout point P différent de Q et nous allons exprimer la borne supérieure de cette derivée en fonction de la distance PQ. Puisque la démonstration detaillée de ce théorème (pour le problème mixte aux limites) est donnée dans le travail du M. W. Pogorzelski: »Les propriétés du noyau résolvant de l'équation intégrale d'un problème aux limites« (Universitas liberae Polonae, Varsaviae 1922), nous nous bornerons ici à l'applications dans notre problème des résultats qui sont analogiques.

Nous rappellons d'abord que d'après l'estimation des intégrales singulières de M. Hadamard on a:

$$\iint_S \frac{d\sigma_M}{QM^\alpha\cdot MP^\beta} < \frac{\varkappa_1}{QP^{\alpha+\beta-2}} \qquad \text{lorsque} \qquad \alpha+\beta>2 \tag{13}$$

$$\iint_S \frac{d\sigma_M}{QM^\alpha\cdot MP^\beta} < \varkappa_2|\lg QP| + \varkappa_3, \qquad \text{lorsque} \qquad \alpha+\beta=2 \tag{14}$$

$\varkappa_i\,(i=1,2,3)$ sont les constantes déterminées positives dont les valeurs précises seront données plus loin.

Étudions maintenant l'intégrale:

$$I(P,Q) = \iint_S \frac{\cos\varphi}{PM^2}\cdot W(M,Q)\,d\sigma_M \tag{15}$$

P, Q désignent deux points distincts de la surface S; M un point d'intégration et φ désigne l'angle que fait la normale intérieure en P avec le vecteur $\overrightarrow{PM}$.

Nous admettons que la fonction W et ses dérivées premières $D_1^M W(M,Q)$ par rapport à l'arc superficiel qui passe par M sont définies, continues (pour $M \neq Q$) et satisfont aux conditions:

$$|W(M,Q)| < \frac{m}{MQ^\alpha}; \qquad |D_1^M W(M,Q)| < \frac{m_1}{MQ^{\alpha+1}} \tag{16}$$

ou

$$|W(M,Q)| < n_1|\lg MQ| + n_2; \qquad |D_1^M W(M,Q)| < \frac{n_3}{MQ} \tag{17}$$

$0<\alpha<2$; m, m_1, n_1, n_2, n_3 sont des constantes positives déterminées.

Selon les résultats de M. Pogorzelski (l. c.) on aura les inégalités:

$$|D^M I(P,Q)| < \frac{a_1}{PQ^\alpha} \qquad \text{dans le cas (16)} \tag{18}$$

$$|D^M I(P,Q)| < a'\lg|PQ|^2 + a'' \qquad \text{dans le cas (17);} \tag{19}$$

en appliquant successivement les résultats exprimés par les inégalités (18) et (19) nous arrivons aux conclusions suivantes:

$$|N_1(Q_1,Q)| = \Big|\iint_S N(Q_1,Q_2)\,N(Q_2,Q)\,d\sigma_{Q_2}\Big| < m|\lg Q_1Q| + m_1 \tag{20}$$

$$|D_1^{Q_1} N_1(Q_1,Q| < \frac{a}{Q_1Q} \tag{21}$$

Le noyau borné $N_2(P,Q)$ admet donc la dérivée (pour $P\neq Q$) qui remplit d'après l'inégalité (17) la condition:

$$|D_1^P N_2(P,Q)| < a_1|\lg PQ|^2 + a_2 \tag{22}$$

m, m_1, a, a_1, a_2 sont des constantes determinées positives.

En appliquant la propriété (22) du noyau itéré au noyau résolvant de l'équation (10) qui remplit la relation suivante:

$$\boldsymbol{N}(P,Q) = N_2(P,Q) + \lambda\iint_S N_2(P,Q)\cdot\boldsymbol{N}(Q_1,Q)\,d\sigma_{Q_1} \tag{23}$$

on obtient immédiatement:

$$|D_1^P N(P,Q)| < a_1 |\lg PQ|^2 + a_3 \tag{24}$$

$\left(\lambda = \frac{1}{8\pi^3}\right.$ n'etant pas un pôle de la fonction méromorphe $\left.N(P,Q)\right)$. D'une manière analogue, en considérant les intégrales

$$\iint_S \frac{\cos\varphi}{PQ^2}\Psi(Q,B)\,d\sigma_Q; \quad \iint_S \frac{\Psi(Q,B)}{PQ}\,d\sigma_Q$$

et en s'appuyant sur la formule (12), on peut démontrer les inégalités:

$$|\mu(P,B)| < \frac{S}{PB^2}; \quad |D_1^P \mu(P,B)| < \frac{S_1}{PB^3}.$$

En se servant des dernières inégalités et des formules (4) et (6), on en conclut directement les inégalités suivantes pour la fonction g et sa dérivée:

$$|g(A,B)| < \frac{s'}{AB}; \quad |D^A g(A,B)| < \frac{s''}{AB^2}. \tag{25}$$

Il est clair qu'on obtiendra les inégalités identiques pour la fonction: $G(A,B)$ et sa dérivée, B étant un point intérieur du domaine Ω.

Les inégalités (25) restent valables quelle que soit la position du point A (à l'intérieur ou à l'extérieur de Ω) et B (à l'interieur de Ω); en particulier elles persistent lorsque les points A et B tendent tous les deux vers le même point de la surface S.

C. Solution du problème.

Nous cherchons la solution de l'equation:

$$\Delta U + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial U}{\partial x_i} + F(x_1,x_2,x_3) = 0 \tag{26}$$

remplissant la condition aux limites:

$$\left(\varepsilon\cdot\frac{dU}{dn}\right)_i - \left(\frac{dU}{dn}\right)_e = \frac{dV_0}{dn}(1-\varepsilon) = f(P). \tag{27}$$

Soit W_0 une fonction harmonique remplissant la condition aux limites (27) c. à. d.

$$\Delta W_0 = 0; \quad \left(\varepsilon\cdot\frac{dW_0}{dn}\right)_i - \left(\frac{dW_0}{dn}\right)_e = f(P) \tag{27^1}$$

Les équations (27¹) sont identiques aux équations (4) et (6) qui déterminent la fonction $g(A,B)$. En substituant dans l'equation (26): $U = W + W_0$ j'obtiens pour W une équation suivante:

$$\Delta W + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial W}{\partial x_i} + H(x_1,x_2,x_3) = 0 \tag{28}$$

à l'intérieur du domaine Ω et

$$\Delta W = 0 \tag{28^1}$$

à l'extérieur du domaine Ω.

$\left(\text{La fonction } H(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial W_0}{\partial x_i} + F(x_1,x_2,x_3) \text{ est une fonc-}\right.$

$\left.\text{tion donnée}\right)$,

avec une condition aux limites homogène suivante:

$$\left(\varepsilon\cdot\frac{dW}{dn}\right)_i - \left(\frac{dW}{dn}\right)_e = 0. \tag{29}$$

Considérons d'abord le cas particulier de l'équation:

$$\Delta W = R(x_1,x_2,x_3) \tag{30}$$

à l'intérieur de Ω et

$$\Delta W = 0$$

à l'extérieur de Ω, avec la condition:

$$\left(\varepsilon\cdot\frac{dW}{dn}\right)_i - \left(\frac{dW}{dn}\right)_e = 0 \tag{30^1}$$

sur la surface S.

La fonction R definie dans le domaine fermé Ω a les dérivées partielles (du premier ordre) continues à l'intérieur de Ω (conditions suffisantes pour l'application du théorème de P o i s s o n).

En désignant par $G(A,B) = \frac{1}{AB} - g(A,B)$ la fonction remplissant la condition:

$$\left(\varepsilon\cdot\frac{dG}{dn}\right)_i-\left(\frac{dG}{dn}\right)_e=0$$

on peut affirmer que la fonction $W(A)$ donnée par l'équation:

$$W(A)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Omega}G(A,B)\,R(B)\,d\,\omega_B \tag{31}$$

est une solution de l'équation (30) pour les points intérieurs de Ω. Il faut démontrer encore que les valeurs limites des dérivées de la fonction (31) existent et remplissent la condition (29). J'omets la démonstration élementaire concernant l'existence des valeurs limites des intégrales singulières:

$$W_P=W(P)=\lim_{A\to P}W(A)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Omega}G(P,B)\cdot R(B)\,d\,\omega_B$$

et

$$\left(\frac{dW}{dn}\right)_P=\lim_{A\to P}\left(\frac{dW}{dn}\right)_A=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{d\,G(P,B)}{dn}\right]_P\cdot R(B)\,d\,\omega_B$$

(P désigne un point de la surface S)
(Goursat, Cours d'analyse 1927 t. III p. 174 — 5).

Pour démontrer que la condition (29) est remplie, considérons une sphère Γ de centre P et de rayon déterminé ρ; on peut supposer de plus que les deux points du domaine Ω: intérieur A et extérieur A' sont situées à l'intérieur de cette sphère. Nous désignons par $\left(\frac{dW}{dn}\right)_A$ ou $\left(\frac{dW}{dn}\right)_{A'}$ les dérivées intérieures et extérieures calculées en points correspondants A et A' dans la direction parallèle à la normale au point P de la surface S.

Nous avons donc:

$$W(A)=W_\Gamma(A)+W_{\Omega-\Gamma}(A);$$

et nous écrivons:

$$\begin{aligned}\left|\left(\varepsilon\frac{dW}{dn}\right)_A-\left(\frac{dW}{dn}\right)_{A'}\right|&=\left|\left(\varepsilon\cdot\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_A-\left(\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_{A'}+\right.\\&\quad\left.+\left[\left(\varepsilon\frac{dW_{\Omega-\Gamma}}{dn}\right)_A-\left(\frac{dW_{\Omega-\Gamma}}{dn}\right)_{A'}\right]\right|\\&\leqslant\left|\left(\varepsilon\cdot\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_A\right|+\left|\left(\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_{A'}\right|+\left|\left(\varepsilon\frac{dW_{\Omega-\Gamma}}{dn}\right)_A-\left(\frac{dW_{\Omega-\Gamma}}{dn}\right)_{A'}\right|\end{aligned}\tag{32}$$

Nous verrons d'abord qu'à toute valeur positive ϑ on peut faire correspondre un rayon ρ tel que la valeur absolue de la première intégrale (32) étendue au domaine Γ peut être inférieure à $\frac{\vartheta}{3}$. En effet, soit Γ' le domaine limité par une sphère de centre A et de rayon 2ρ; en désignant par M ou K respectivement la borne supérieure de la valeur absolue de la fonction $R(A)$ et $\varepsilon(A)$ dans le domaine Ω, nous avons d'après l'inegalité (25):

$$\left|\left(\varepsilon\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_A\right|=\left|\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Gamma}\left(\varepsilon\frac{dg}{dn}\right)_A\cdot R(B)\,d\,\omega_B\right|<\frac{M\cdot K}{4\pi}\cdot\int_0^{2\rho}\frac{4\pi r^2\,dr}{r^2}=2\,M\cdot K\rho$$

prenons $\rho=\frac{\vartheta}{6\,MK}$; on aura:

$$\left|\left(\varepsilon\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_A\right|<\frac{\vartheta}{3}. \tag{33}$$

En remplaçant la sphère Γ' par une sphère Γ'' du même rayon 2ρ mais à centre A^1, nous démontrerons de même:

$$\left|\left(\frac{dW_\Gamma}{dn}\right)_{A'}\right|<\frac{\vartheta}{3K}<\frac{\vartheta}{3}\quad(\text{car } K>1) \tag{34}$$

quelle que soit la position des points A et A' dans le domaine Γ. La valeur de ρ étant ainsi fixée et le point B étant situé dans le domaine $\Omega-\Gamma$. nous pouvons faire correspondre à la valeur $\vartheta>0$ une valeur $\eta(\vartheta)>0$ telle que pour:

$$|A\,P|<\eta;\quad |A'\,P|<\eta$$

on aura:

$$\left|\left(\varepsilon\cdot\frac{dG}{dn}\right)_A-\left(\frac{dG}{dn}\right)_{A'}\right|<\frac{4\,\pi\cdot\vartheta}{3\,M\cdot V_\Omega} \tag{35}$$

où V_Ω désigne le volume du domaine Ω.

On aura donc:

$$\begin{aligned}\left|\left(\varepsilon\cdot\frac{dW_{\Omega-\Gamma}}{dn}\right)_A-\left(\frac{dW_{\Omega-\Gamma}}{dn}\right)_{A'}\right|&=\frac{1}{4\pi}\cdot\left|\iiint\limits_{\Omega-\Gamma}\left[\left(\varepsilon\cdot\frac{dG}{dn}\right)_A-\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\left(\frac{dG}{dn}\right)_{A'}\right]R\,(B)\,d\,\omega_B\right|<\frac{\vartheta}{3}\end{aligned}\tag{36}$$

et par conséquent d'après les inegalités (33), (34), (36)

$$\left|\left(\varepsilon\frac{dW}{dn}\right)_A-\left(\frac{dW}{dn}\right)_{A'}\right|<\vartheta$$

lorsque Max $(AP, A^1P) <$ Min $\left[\eta(\vartheta), \frac{\vartheta}{6MK}\right]$ ce qui montre que la condition (29) est remplie.

Nous passons maintenant à la détermination d'une fonction $W(x_1, x_2, x_3)$ qui satisfait à l'équation générale elliptique (28) à l'intérieur du domaine Ω et qui remplit la condition (29) en tous les points P de la surface S. Nous supposons que les fonctions $\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_i}$ $(i=1,2,3)$ et $H(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ sont continues dans le domaine fermé Ω et qu'elles admettent les dérivées partielles du premier ordre continues à l'intérieur de ce domaine. D'après le théorème démontré tout à l'heure, la fonction W qui satisfait à l'équation intégro — différentielle de la forme:

$$W(A)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Omega} G(A,B)\cdot\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_i}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_i}+H(B)\right\}d\omega_B \tag{38}$$

et qui admet les dérivées secondes à l'intérieur de ce domaine, satisfait aussi a l'équation différentielle (28) à l'intérieur de Ω, à l'équation $\Delta W=0$ à l'extérieur de ce domaine et à la condition aux limites (29) sur la surface S.

Remarquons d'abord que la fonction W qui satisfait à l'équation intégro — différentielle (38), donc possédant les dérivées premières, satisfera aussi aux équations:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial G}{\partial x_i}\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_i}\cdot\frac{\partial W}{\partial\xi_i}+H(B)\right\}d\omega_B;\quad (i=1,2,3) \tag{38^1}$$

qu'on obtient en dérivant l'équation (38) par rapport aux coordonnées du point $A(x_1 x_2, x_3)$.

R e m a r q u e: La différentiation sous le signe de l'intégrale singulière (38) est permise d'après la théorie du potentiel est d'aprés les propriétés de la fonction $G(A,B)$.

Au lieu du système de quatre équations intégro — différentielles (38) et (38^1), considérons le système de 4 équations intégrales linéaires:

$$W_\nu(A)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Omega} G_\nu(A,B)\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_i}W_i(B)+H(B)\right\}d\omega_B \tag{38^2}$$

avec 4 fonctions inconnues W_0, W_1, W_2, W_3 dans le domaine Ω; on a pose:

$$G_0(A,B)=G(A,B);\quad G_\nu(A,B)=\frac{\partial G}{\partial x_\nu};\quad (\nu=1,2,3)$$

Remplaçons maintenant le système (38^2) de 4 fonctions avec 4 inconnues par une équation integrale à une fonction inconnue. A cet effet considérons les domaines auxiliaires Ω_i $(i=1,2,3)$ obtenus par déplacement parallèle du domaine $\Omega=\Omega_0$ sans points communs entre eux.

Aux points $A=A_0$; $B=B_0$ du domaine $\Omega=\Omega_0$ correspondront les points A_i, B_i du domaine Ω_i $(i=1,2,3)$.

Nous introduisons maintenant une fonction $K(A,B)$ de deux points A et B et une fonction $\Psi(A)$ d'un seul point A, determinées dans le domaine $D=\sum_{i=0}^{3}\Omega_i$ par les conditions suivantes:

$$K(A_\mu, B_\nu)=G_\mu(A,B)\cdot\frac{1}{\varepsilon(B)}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial\xi_\nu}\qquad \begin{matrix}(\mu=0,1,2,3)\\(\nu=1,2,3)\end{matrix} \tag{39}$$

$$\Psi(A_\mu)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{\Omega} G_\mu(A,B)\cdot H(B)\,d\omega_B \tag{40}$$

Considérons l'équation de F r e d h o l m de la forme:

$$\Phi(A)=-\frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{D} K(A,B)\cdot\Phi(B)\,d\omega_B+\Psi(A) \tag{41}$$

avec une seule fonction inconnue $\Phi(A)$ dans le domaine $D=\sum_{i=0}^{3}\Omega_i$; l'equation (41) est équivalente à l'équation (38^2) dans le cas

$$\Phi(A_\nu)=W_\nu(A).$$

D'après l'inegalité (25) il est facile de démontrer que la fonction connue Ψ est continue et bornée dans le domaine Ω.

Le noyau $K(A,B)$ est non borné du type $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$; donc, pour obtenir le noyau borné, il faudrait 3 fois itérer, mais une seule itération suffit, car le noyau obtenu non borné $K^{(2)}(A,B)$ du type $O\left(\frac{1}{r}\right)$ est intégrable avec son carré et on peut appliquer la théorie générale de Fredholm.

La première itération de l'équation (41) nous donne:

$$\Phi(A) = \frac{1}{16\cdot\pi^2}\cdot\iiint_D K^{(2)}(A,B)\cdot\Phi(B)\,d\,\omega_B + \Psi_1(A) \tag{42}$$

où

$$\Psi_1(A) = \Psi(A) - \frac{1}{4\pi}\cdot\iiint_D K(A,B)\,\Psi(B)\,d\,\omega_B$$

En supposant que $\lambda = \frac{1}{16\pi^2}$ n'est pas une valeur caractéristique du noyau $K^{(2)}(A,B)$ (dans le cas contraire il faudrait prendre les mineurs de Fredholm) nous aurons la solution de l'équation (42) sous la forme:

$$\overline{\Phi(A)} = \Psi_1(A) + \frac{1}{16\pi^2}\cdot\iiint_D \boldsymbol{R}(A,B)\,\Psi_1(B)\,d\,\omega_B \tag{43}$$

où la fonction $\boldsymbol{R}(A,B)$ désigne le noyau résolvant du noyau $K^{(2)}(A,B)$. Nous allons montrer que la fonction (43) dans le domaine Ω est la solution de l'équation fonctionelle primitive (38).

Soit donc $\Phi(M)$ la valeur de la fonction (43) au point M du domaine; désignons de plus par $\Phi_i(M)$; $(i=1, 2, 3)$ les valeurs des trois fonctions définies dans le domaine D et égales respectivement aux valeurs de la fonction (43) aux points M_i des domaines Ω_i correspondant au point M du domaine Ω, c. à. d.

$$\Phi_i(M) = \overline{\Phi}(M_i); \qquad (i=0, 1, 2, 3); \qquad [\Phi_0(M) = \Phi(M) = \overline{\Phi}(M_0) = \overline{\Phi}(M)]$$

d'après les définitions des fonctions $K(A,B)$ et $\Psi(A)$ les fonctions $\Phi_i(M)$ satisfont dans le domaine Ω au système de 4 équations avec 4 inconnues (38^2); on a donc d'aprés les équations (39^1) pour chaque point $A(x_1, x_2, x_3)$ du domaine Ω les relations:

$$\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial x_i} = \Phi_i(A) \qquad (i=1, 2, 3)$$

Il en résulte que la fonction $\overline{\Phi(A)}$, determinée dans le domaine Ω par la formule (43), satisfait dans ce domaine à l'équation (38) et remplit sur la surface S la condition (29). Pour démontrer que la fonction

$\overline{\Phi(A)}$ admet les dérivées secondes et satisfait à l'équation différentielle primitive (28) à l'intérieur du domaine Ω, il suffit de prouver que la fonction $\overline{\Phi(A)}$ exprimée par la formule (43) admet les dérivées continues à l'intérieur du domaine D, il suffit donc de démontrer cette propriété pour la fonction:

$$\overline{\Phi(A)} = \frac{1}{16\pi^2}\cdot\iiint_D K^{(2)}(A,B)\cdot\overline{\Phi(B)}\,d\,\omega_B + \Psi_1(A) \tag{42^1}$$

où la fonction $\overline{\Phi(B)}$ obtenue de l'équation (43) est continue dans le domaine fermé D, d'après la théorie générale des équations intégrales*).

Considerons la fonction donnée par l'équation (42^1) où l'on a:

$$\Psi_1(A) = \Psi(A) - \frac{1}{4\pi}\cdot\iiint_D K(A,B)\,\Psi(B)\,d\,\omega_B; \tag{44}$$

la fonction $\Psi(A_\nu)$ déterminée par la formule (40) est bornée dans le domaine $D = \sum_{i=1}^{3}\Omega_i$ et admet les dérivées continues en tout point intérieur du domaine D. D'après les expressions (39) du noyau $K(A,B)$, l'intégrale de l'équation (44) jouit de mêmes propriétés; on peut donc affirmer que la fonction $\Psi_1(A)$ admet les dérivées premières à l'intérieur du domaine D.

Quant au noyau $K^{(2)}(A,B)$, en appliquant la formule (39) on peut le réduire au domaine Ω; il est égal à la somme des intégrales:

$$\iiint_\Omega G_\mu(A,C)\,G_\nu(C,B)\,\frac{1}{\varepsilon(C)}\cdot\frac{\partial\varepsilon(C)}{\partial\xi_\nu}\cdot\frac{1}{\varepsilon(B)}\cdot\frac{\partial\varepsilon(B)}{\partial\xi_\tau}\,d\,\omega_C \tag{45}$$

$$(\mu = 0, 1, 2, 3; \quad \nu, \tau = 1, 2, 3)$$

Remarque: Nous aurons en somme 9 intégrales du type $O(\lg r)$:

$$\iiint_\Omega G(A,C)\cdot G'_C(C,B)\cdot L_1(C,B)\,d\,\omega_C, \tag{46}$$

on les obtient de la formule (45) pour $\mu=0$; $\nu, \tau = 1, 2, 3$ et 27 intégrales du type $O\left(\frac{1}{r}\right)$:

---

*) Pour la démonstration de ce théorème je me suis servi du travail de M. Pogorzelski: Problème aux limites de Poincaré. (Annales de l'Académie des Sciences Techniques à Varsovie, 1935).

$$(47)\qquad \iiint_{\Omega} G'_A(A,C)\cdot G'_C(C,B)\cdot L_2(C,B)\,d\omega_C$$

qu'on obtient de la formule (45) en y mettant: $\mu, \nu, \varepsilon = 1, 2, 3$ (L_1 et L_2 désignant des fonctions continues et bornées).

En s'appuyant sur l'expression (25) de la fonction $G(A,B)$ et sur la théorie du potentiel de volume, on voit immédiatement que toutes les intégrales (46), (47) et par suite leur somme $K^{(2)}(A,B)$ admettent les dérivées continues par rapport aux coordonnées du point à l'intérieur du domaine (D).

Voyons maintenant comment croît la valeur absolue de ces dérivées quand le point B tend vers le point intérieur A. Il suffit de prendre l'intégrale (47) puisque son ordre de croissance est le plus élevé.

Supposons que les points B et A sont tellement voisins qu'une sphère Γ de centre B et de rayon $2AB$ est toute entière à l'intérieur du domaine Ω. Décomposons l'intégrale (47) en deux parties étendues au domaine intérieur de la sphère Γ et au domaine $\Omega-\Gamma$.

Le point A étant extérieur au domaine $\Omega-\Gamma$, on peut écrire:

$$(48)\qquad \left|\iiint_{\Omega-\Gamma} G'_A\cdot G'_C L_2\,d\omega_C\right| < \iiint_{\Omega}\frac{d\omega_C}{AC^3\cdot CB^2}+T_1$$

où T_1 désigne une constante finie et positive que nous pouvons calculer en nous appuyant sur les définitions de G et g et en introduisant la borne supérieure des fonctions L_1 et L_2. L'integrale (48) croit donc comme $\frac{1}{AB^2}$ lorsque $B\to A$.

En introduisant les coordonnées polaires et utilisant la transformation homothétique dans le rapport $1:2\cdot AB$ ou en appliquant le théorème géneralisé de Hadamard on obtiendra:

$$(49)\qquad \left|\iiint_{\Gamma} G'_A\cdot G'_C\cdot L_2\,d\omega_C\right| < \frac{1}{AB^2}+T_2$$

(T_2 est une constante finie et positive).

Nous avons démontré ainsi l'existence de dérivées premières continues de la fonction $\overline{\Phi(A)}$ à l'intérieur de D.

La solution $\overline{\Phi(A)}$ de l'équation intégro-différentielle (38) satisfait donc à l'équation differentielle (28) et à la condition aux limites (29).

II. Le problème du champ électrique dans le milieu non homogène.

A. Mise en équation.

Le problème que nous nous proposons de résoudre consiste en la recherche du champ de la densité du courant électrique $\vec{i}(x_1,x_2,x_3)$ à l'état stationnaire dans l'intérieur d'un domaine Ω, étant données:

1) la conductibilité $l\,(x_1,x_2,x_3)$ et la force électromotrice $\vec{E}(x_1\,x_2\,x_3)$ dans le domaine Ω,

2) la composante normale de la densité du courant $i_n = f(P)$ en tout point de la frontière S du domaine Ω.

On suppose que la fonction $f(P)$ remplit la condition nécéssaire:

$$\iint_S f(P)\,d\sigma = 0\,.$$

Quant au domaine Ω, j'admets les mêmes suppositions que pour le premier problème. J'admets que la fonction l a des dérivées continues jusqu'au troisième ordre, la fonction $\vec{E}(x_1\,x_2\,x_3)$ jusqu'au deuxième et que la fonction $f(P)$ est continue.

Soit Q la quantité d'électricité contenue dans le domaine Ω, ρ la densité de charge électrique; nous aurons:

$$Q = \iiint_{\Omega} \rho\cdot d\omega$$

et en plus:

$$(50)\qquad \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{i}\,d\omega = \iint_S i_n\,dS$$

le sens de la normale positive étant compté vers l'extérieur du domaine $\overline{\Omega}$.

Nous obtenons ensuite:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{i}=0,$$

c.-à-d. dans l'état stable:

$$\operatorname{div}\vec{i}=0\,.$$

La loi d'Ohm pour une substance isotrope s'exprime par la formule $\vec{i}=l\cdot\vec{K}$; nous avons en plus $\vec{K}=\vec{E}-\operatorname{grad} V$

$$\operatorname{div}(l\vec{K}) = \operatorname{div}(l\vec{E}) - \operatorname{div}(l \operatorname{grad} V) = \operatorname{div}(l\vec{E}) - \operatorname{grad} l \operatorname{grad} V - l\Delta V$$

et enfin en supposant partout dans Ω que $l \neq 0$ nous obtenons l'équation

$$\Delta V = -\frac{1}{l}\operatorname{grad} l \operatorname{grad} V + \frac{1}{l}\operatorname{div}(l\vec{E}) \tag{51}$$

ou:

$$\Delta V + \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{l}\operatorname{div}(l\vec{E}).$$

La condition aux limites $i_n = l\cdot\vec{K}_n = f(P)$ prend la forme:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_P = E_n(P) - \frac{1}{l}f(P) \tag{52}$$

c'est le problème intérieur de Neumann.

L'équation (51) est un cas particulier de l'équation elliptique à trois variables indépendantes, adjointe à soi même. On peut l'écrire sous une autre forme:

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(l\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) = \operatorname{div}(l\cdot\vec{E}). \tag{53}$$

B. Solution du problème.

On peut donner la solution du problème (51) avec la condition aux limites (52), en introduisant la fonction auxiliaire de Fr. Neumann, mais on sait que ce problème exige qu'une condition bien connue soit remplie. Cette condition s'ecrit:

$$\iint_S\left[E_n(P) - \frac{1}{l}f(P)\right]dS_P = \iiint_\Omega\left[\frac{1}{l}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial l}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{1}{l}\operatorname{div}(l\vec{E})\right]d\omega_M.$$

La difficulté consiste en ce que cette condition s'exprime à l'aide des dérivées de la fonction inconnue; on peut éluder cette difficulté par l'introduction des fonctions auxiliaires, mais cette méthode est longue et exige la solution de plusieurs équations intégrales intermédiaires. (Picard, Lichtenstein, Goursat).

Nous donnerons la solution du problème en introduisant une nouvelle fonction inconnue.

J'introduis une nouvelle fonction U donnée par l'équation:

$$V = U e^W$$

la fonction analytique W est assujettie à une seule condition:

$$\frac{dW}{dn} < 0$$

(condition pour que le problème ait une solution unique) la condition aux limites (52) prend la forme:

$$\frac{dU}{dn} + \frac{dW}{dn}\cdot U = e^{-W}\left[E_n - \frac{1}{l}f(P)\right]. \tag{54}$$

En profitant de la forme spéciale de l'équation (51) et en désignant les coefficients des dérivées de la fonction inconnue par

$$a_i = \frac{1}{l}\cdot\frac{\partial l}{\partial x_i}$$

on a:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{l^2}\cdot\frac{\partial l}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial l}{\partial x_i} + \frac{1}{l}\cdot\frac{\partial^2 l}{\partial x_j\cdot\partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

(la fonction l a des dérivées continues jusqu'au troisième ordre); il existe donc une fonction $\psi(M)$ telle que nous obtenons:

$$a_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}; \qquad \sum a_i\,dx_i = d\psi(x_1, x_2, x_3)$$

en choisissant $W = -\frac{\psi}{2}$ on aura, après des calculs faciles que j'omets, au lieu de (51), l'équation:

$$\Delta U = L\cdot U + e^{\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{1}{l}\cdot\operatorname{div}(l\cdot\vec{E}) \quad \text{où:}$$

$$L = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}a_i^2 = \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{2}\Delta\psi + \frac{1}{4}\operatorname{grad}^2\psi \qquad \text{c. à d.:}$$

icm©

(55) $$\Delta U = \left(\frac{1}{2}\Delta\psi + \frac{1}{4}\operatorname{grad}^2\psi\right)U + e^{\frac{\psi}{2}}\cdot\frac{1}{l}\cdot\operatorname{div}(l\vec{E}).$$

La fonction ψ désigne donc le potentiel d'un vecteur dont les composantes sur les axes des coordonnées sont égales respectivement à

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = a_i = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial x_i}.$$

En particulier posons $\psi = \lg l + \text{const.}$ ou, en supposant la constante nulle, la substitution $V = U\cdot e^W$ devient:

$$V = U\cdot e^{-\frac{1}{2}\lg l} = \frac{U}{\sqrt{l}}$$

et on obtient après des calculs faciles au lieu de (55) l'équation

(56) $$\Delta U = \frac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}}\cdot U + \frac{1}{\sqrt{l}}\operatorname{div}(l\vec{E})$$

$$\Delta(\sqrt{l}) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\sqrt{l}}{\partial x_i^2}$$

désignant le laplacien de la racine carrée de conductibilité; au lieu de la condition (52) nous aurons la condition mixte

(57) $$\frac{dU}{dn} - \frac{1}{2l}\frac{dl}{dn}U = E_n(P)\sqrt{l} - \frac{f(P)}{\sqrt{l}}.$$

La solution unique existera sous la condition:

(58) $$-\frac{1}{2l}\cdot\frac{dl}{dn} < 0 \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \frac{dl}{dn} > 0.$$

La détermination de la fonction U se ramène donc à la solution de l'équation intégrale et on peut ramener le cas général au cas d'une condition aux limites homogènes. Posons:

$$U = U_1 + U_2$$

où

(59) $$\Delta U_1 = 0; \quad \frac{dU_1}{dn} - \frac{1}{2l}\frac{dl}{dn}U_1 = E_n(P)\sqrt{l} - \frac{f(P)}{\sqrt{l}}.$$

Alors la fonction U_2 doit satisfaire à l'équation (56) et doit remplir sur la surface S la condition homogène:

(60) $$\frac{dU_2}{dn} - \frac{1}{2l}\cdot\frac{dl}{dn}U_2 = 0.$$

On sait que le système des équations (59) a une solution unique $\left(\frac{dl}{dn} > 0\right)$; on l'obtient sous la forme:

$$U_1(A) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\iint_S G(A,P)\left[E_n(P)\sqrt{l} - \frac{f(P)}{\sqrt{l}}\right]d\sigma_P$$

où la fonction

$$G(A,B) = \frac{1}{AB} - g(A,B)$$

tandis que la fonction harmonique $g(A,B)$ remplit pour chaque point P de la surface S l'équation:

$$\frac{dg}{dn} - \frac{1}{2l}\frac{dl}{dn}g(A,P) + \frac{d\frac{1}{AP}}{dn} - \frac{1}{2l}\frac{dl}{dn}\cdot\frac{1}{AP} = 0$$

on obtient ainsi pour la fonction harmonique g une equation intégrale qui a toujours une solution et une seule.

La fonction U_2 doit satisfaire à l'équation intégrale:

(61) $$U_2(A) = -\frac{\lambda}{4\pi}\cdot\iiint_\Omega G(A,B)\frac{\Delta\sqrt{l(B)}}{\sqrt{l(B)}}U_2(B)\,d\Omega_B - \\ -\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega G(A,B)\cdot\frac{\operatorname{div} l\vec{E}}{\sqrt{l(B)}}\,d\omega_B$$

la fonction de Green $G(A,B)$ est identique avec la fonction introduite dans la recherche de U_1.

Si $\lambda = 1$ n'est pas une valeur caractéristique, l'équation (61) a une solution, car on peut appliquer au noyau $\frac{1}{4\pi}\cdot G(A,B)\frac{\Delta\sqrt{l(B)}}{\sqrt{l(B)}}$, qui est du type $0\left(\frac{1}{r}\right)$, le premier théorème de Fredholm.

Il faut démontrer qu'inversement chaque solution de l'équation (61) satisfait à l'équation (56). Il suffit de démontrer que les dérivées premières de la fonction $U_2(A)$ existent et sont continues. Ecrivons donc l'équation (61) sous la forme:

$$(62)\quad U_2(A) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega} G(A,B)\left[\frac{\Delta\sqrt{l(B)}}{\sqrt{l(B)}}\cdot U_2(B) + \frac{\operatorname{div} l(B)\cdot \overrightarrow{E(B)}}{\sqrt{l(B)}}\right] d\,\omega_B\,.$$

La fonction $U_2(B)$ étant continue, il résulte des propriétés de la fonction de Green que le second membre de la formule (62) est la somme d'un potentiel de volume de densité continue, égale à

$$\frac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}}\,U_2 + \frac{\operatorname{div}(l\vec{E})}{\sqrt{l}}$$

et d'une intégrale de la forme:

$$\iiint\limits_{\Omega} g(A,B)\left[\frac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}}\,U_2 + \frac{\operatorname{div} l\vec{E}}{\sqrt{l}}\right] d\,\omega_B$$

où la fonction $g(A,B)$, d'après la démonstration de M. Pogorzelski dans le travail mentionné plus haut, a des dérivées partielles continues par rapport aux coordonnées du point A remplissant la condition:

$$\left|D^A g(A,B)\right| < \frac{a}{AB^2}$$

(a est une constante positive determinée).

La fonction U_2 satisfait donc à l'équation différentielle (56).

La démonstration que la fonction U_2 remplit la condition aux limites (61[1]) est identique a celle donnée dans le problème premier.

Dans le cas $\dfrac{\Delta\sqrt{l}}{\sqrt{l}} > 0$ le noyau de l'équation intégrale (61) est du type de Schmidt et peut être ramené a la forme symétrique $G(A,B)\cdot\tau(A)\cdot\tau(B)$ par la multiplication par l'expression:

$$\tau(A) = \sqrt{\frac{\Delta\sqrt{l(A)}}{\sqrt{l(A)}}}$$

et l'introduction d'une nouvelle variable $t(A) = u(A)\cdot\tau(A)$.

En s'appuyant sur le théorème de Green, il est facile de démontrer que dans ce cas toutes les valeurs caractéristiques qui sont réelles et en nombre infini sont négatives; on a donc pour $\lambda = 1$ toujours une solution unique.

Un théorème de M. Knebelman

O twierdzeniu Knebelmana

Par

Z. SZMYDT (Cracovie)

Supposons que l'on ait dans un espace à n dimensions deux métriques de Finsler, dont l'une est définie au moyen de la fonction

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \tag{1}$$

et l'autre au moyen de la fonction

$$\overline{F}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)\,. \tag{2}$$

Si les fonctions F et $\overline{F}$ sont deux fois dérivables par rapport aux variables p_i, on peut définir les deux tenseurs métriques correspondants

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2}{\partial p_i\,\partial p_j}\,, \qquad \bar{g}_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \overline{F}^2}{\partial p_i\,\partial p_j} \qquad (i,j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

qui sont en général des fonctions du point (x_i) et de l'élément d'appui (p_i).

M. Knebelman[1]) a démontré que si l'on suppose que

$$\bar{g}_{ij} = \rho\, g_{ij} \qquad (i,j = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

le facteur ρ ne dépend plus des variables p_i.

La démonstration de Knebelman exige la supposition que les fonctions F et $\overline{F}$ possèdent les dérivées continues du 3-ième ordre par rapport aux variables p_i. En outre, comme l'a remarqué M. A Nazim[2]),

[1]) M. S. Knebelman, Conformal geometry of generalized metric spaces, Proc. Nat. Ac. Sc. 15 (1929), 376—379.

[2]) A. Nazim, Über Finslersche Räume, Dissertation München, 1936, p. 30, 31, 45.