O ATRAKCYI.

PRZEZ

WŁ. GOSIEWSKIEGO.

CZĘŚĆ WSTĘPNA.

Jakkolwiek mechanika nieba daje wyniki względnie najlepsze do wyników innych umiejętności, wszelako nie można być i z niej zupełnie zadowolonym. Nie mówiąc już o układzie całego świata, są, jak wiadomo, zjawiska, przedstawiające się w samym nawet układzie słonecznym, których w dzisiejszym stanie wiedzy o niebie wytłómaczyć niepodobna. Zazwyczaj przypisuje się to niewyrobieniu jeszcze dostatecznemu metod analitycznych. Ja wszakże odważyłbym się mniemać, że przyczyna tego leży raczej w niepełności prawa Newtona. Jakie być powinno prawo atrakcyi ogólne, lub innemi słowy: na czem polega owa niepełność prawa Newtona, jest to pytanie, na które w pracy niniejszej zamierzam odpowiedzieć. Zasadę tej odpowiedzi czerpię w określeniu atrakcyi, atoli nie jako pewnego, szczególnego jej objawu, jak to był uczynił Newton na podstawie dostrzeżeń Keplera, ale jako ogółu wszystkich jej objawów. Zobaczymy, że tak pojęta atrakcya obejmuje daleko większy zakres zjawisk fizycznych, niż tak zwane zjawiska ciążenia powszechnego, t. j. że obejmuje, zdaje się nadto, zjawiska cieplne, a może nawet elektro-magnetyczne i powinowactwa chemicznego.

W końcu winienem zaznaczyć, że decydując się na ogłoszenie pracy niniejszej, liczyłem bardzo na pobłażliwość czytelnika, zwłaszcza dlatego, że praca ta, zdaniem mojem, daleką jest od zupełnego wyczerpania przedmiotu.

§ 1.

Przez atrakcyę w ciele rozumieć tu będziemy wogóle przyczynę (siłę), która, jednako zawsze działając, usiłuje zmniejszyć objętość tego ciała i zmienić jego postać. Zastrzeżenie: „jednako zawsze działając“, zapewnia układowi trwałość.

Zobaczmy do jakich wniosków prowadzi takie określenie atrakcyi. Przyjmijmy ciało za ośrodek wypełniający całą przestrzeń bez przerwy, odniesiony do osi prostokątnych stałego w niej położenia, oraz poruszający się w chwili t i punkcie (x, y, z) z prędkością (u, v, w), zależną od t wyraźnie i za pośrednictwem (x, y, z). Wektor $(du/dt,\ dv/dt,\ dw/dt)$, w którym pochodne są wzięte w tem właśnie założeniu, wyobrażać tu będzie odnośne przyśpieszenie.

Wydzielmy w tym ośrodku myślą pewną jego objętość, ograniczoną powierzchnią σ, której element oznaczmy przez $d\sigma\ (l, m, n)$, rozumiejąc przez (l, m, n) kierunek tego elementu, liczony z wewnątrz powierzchni na zewnątrz, i weźmy pod uwagę cztery następujące całki:

$$J = \iint d\sigma \sum l \frac{du}{dt}, \qquad P = \iint d\sigma \left(n \frac{dv}{dt} - m \frac{dw}{dt}\right),$$

$$Q = \iint d\sigma \left(l \frac{dw}{dt} - n \frac{du}{dt}\right), \qquad R = \iint d\sigma \left(m \frac{du}{dt} - l \frac{dv}{dt}\right),$$

w których całkowanie rozciąga się do całej powierzchni σ. Całki te wyobrażają siłę, z którą zmienia się w chwili t objętość i postać uważanej części ośrodka, i wyobrażają w ten sposób, że skalar J jest siłą zmieniającą objętość, ograniczoną powierzchnią σ, a wektor (P, Q, R) jest momentem, zmieniającym postać tej objętości.

Z określenia atrakcyi wypływa, że mieć powinniśmy:

(1)
$$J < 0, \quad \frac{dJ}{dt} = 0, \quad \frac{d\,(P, Q, R)}{dt} = 0.$$

Stosując to określenie do objętości ośrodka nieskończenie małej i posiłkując się przytem wiadomem twierdzeniem o przekształceniu całki powierzchniowej na objętościową, możemy warunkom (1) dać postać następującą:

(2)
$$J \equiv dx\,dy\,dz \sum \frac{\partial}{\partial x} \frac{du}{dt} = \Delta^2 F \,.\, dx\,dy\,dz,$$

gdzie

(3) $\Delta^2 F < 0\,,$ (4) $\dfrac{d\,(\Delta^2 F\,.\,dx\,dy\,dz)}{dt} = 0,$

oraz

$$(5)\quad \begin{cases} P \equiv dx\,dy\,dz\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{dw}{dt}\right) = \Delta^2 a\,.\,dx\,dy\,dz, \\ Q \equiv dx\,dy\,dz\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dw}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{du}{dt}\right) = \Delta^2 b\,.\,dx\,dy\,dz, \\ R \equiv dx\,dy\,dz\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{du}{dt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{dv}{dt}\right) = \Delta^2 c\,.\,dx\,dy\,dz, \end{cases}$$

gdzie

$$(6)\quad \frac{d\,(\Delta^3 a\,.\,dx\,dy\,dz)}{dt} = 0, \quad \frac{d\,(\Delta^2 b\,.\,dx\,dy\,dz)}{dt} = 0, \quad \frac{d\,(\Delta^2 c\,.\,dx\,dy\,dz)}{dt} = 0$$

i gdzie przez F, a, b, c rozumie się funkcye (x, y, z, t), a przez Δ^2 wiadomy symbol działania:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2.}{\partial x} + \frac{\partial^2.}{\partial y} + \frac{\partial^2.}{\partial z}\,.$$

Z równań (5), przy pomocy równania (2) (w których przedewszystkiem należy opuścić czynnik $dx\,dy\,dz$), znajdziemy łatwo związki postaci:

$$\Delta^2\frac{du}{dt} - \Delta^2\frac{\partial F}{\partial x} = \Delta^2\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right), \quad \text{etc.;}$$

a z tych, ponieważ się one spełniają w całej bez wyjątku przestrzeni, po zastosowaniu działania odwrotnego: Δ^{-2}, następujące:

$$(7)\quad \begin{gathered} \frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}; \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}. \end{gathered}$$

---

§ 2.

Rozwijając równania (4) i (6), możemy im odpowiednio nadać postaci:

$$(8)\quad \frac{dlg\,\Delta^2 F}{dt} + \sum\frac{du}{dx} = 0;$$

$$(9)\quad \begin{gathered} \frac{dlg\,\Delta^2 a}{dt} + \sum\frac{du}{dx} = 0; \quad \frac{dlg\,\Delta^2 b}{dt} + \sum\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \frac{dlg\,\Delta^2 c}{dt} + \sum\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \end{gathered}$$

z tych zaś znajdujemy łatwo:

$$(10)\quad \Delta^2 F = (\Delta^2 F)_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt\,\sum\frac{\partial u}{\partial x}}, \quad \text{gdzie } (\Delta^2 F)_0 < 0,$$

oraz

$$(11)\quad \begin{gathered} \Delta^2 a = (\Delta^2 a)_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt\,\sum\frac{\partial u}{\partial x}}, \quad \Delta^2 b = (\Delta^2 b)_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt\,\sum\frac{\partial u}{\partial x}}, \\ \Delta^2 c = (\Delta^2 c)_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt\,\sum\frac{\partial u}{\partial x}}, \end{gathered}$$

rozumiejąc przez $(\Delta^2 F)_0$, $(\Delta^2 a)_0$, $(\Delta^2 b)_0$, $(\Delta^2 c)_0$ wartości funkcyj $\Delta^2 F$, $\Delta^2 a$, $\Delta^2 b$, $\Delta^2 c$ w chwili $t = t_0$. Wartości te są więc wogóle zależnemi od miejsca, ale z upływem czasu niezmiennemi; każda z nich przeto, jako funkcya (x, y, z, t) zadość czyni związkowi postaci:

$$\frac{\partial.}{\partial t} + u\,\frac{\partial.}{\partial x} + v\,\frac{\partial.}{\partial y} + w\,\frac{\partial.}{\partial z} = 0.$$

Z równań (7) otrzymujemy łatwo związki takiej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{dw}{dt} = \Delta^2 a - \frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{\partial a}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

które być powinny tożsame z równaniami (5). Stąd mamy warunki:

(12) $$\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{\partial a}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}\sum\frac{\partial a}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\sum\frac{\partial a}{\partial x}=0,$$

które, jak zobaczymy niżej, wynikają z jednego:

(13) $$\sum\frac{\partial a}{\partial x}=0$$

i w ten sposób, prócz związków (6) lub (9) albo (11), otrzymujemy, na wyznaczenie wektora (a, b, c), warunek (13).

§ 3.

W równaniach (10) i (11) czytamy, że $\Delta^2 F$, $\Delta^2 a$, $\Delta^2 b$, $\Delta^2 c$ są wielkościami trwałemi, pod tym mianowicie względem, że zachowują stale: znak i różność od zera lub równość zeru. Przyjąwszy zatem, że w chwili $t = t_0$ mamy w całej przestrzeni:

(14) $$(\Delta^2 F)_0=0,\quad (\Delta^2 a)_0=0,\quad (\Delta^2 b)_0=0,\quad (\Delta^2 c)_0=0,$$

z wyjątkiem wszakże pewnej liczby objętości skończonych: $1, 2, \ldots, n$, ogólnie: i, w których jest znowu przeciwnie:

(15) $$(\Delta^2 F_i)_0<0,\quad (\Delta^2 a_i)_0\neq 0,\quad (\Delta^2 b_i)_0\neq 0,\quad (\Delta^2 c_i)_0\neq 0,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

znajdziemy, na mocy równań (10) i (11), dla chwili wogóle t:

(16) $$\Delta^2 F=0,\quad \Delta^2 a=0,\quad \Delta^2 b=0,\quad \Delta^2 c=0,$$

oraz

(17) $$\Delta^2 F_i<0,\quad \Delta^2 a_i\neq 0,\quad \Delta^2 b_i\neq 0,\quad \Delta^2 c_i\neq 0,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

a stosując do równań (16) i nierówności (17) wiadome twierdzenie Laplace'a-Poissona, otrzymamy wreszcie:

(18) $$F=-\frac{1}{4\pi}\sum_i\iiint\frac{\Delta^2 F'_i\,dx'_i\,dy'_i\,dz'_i}{r_i},$$

(19) $$a=-\frac{1}{4\pi}\sum_i\iiint\frac{\Delta^2 a'_i\,dx'_i\,dy'_i\,dz'_i}{r_i},$$
$$b=-\frac{1}{4\pi}\sum_i\iiint\frac{\Delta^2 b'_i\,dx'_i\,dy'_i\,dz'_i}{r_i},$$
$$c=-\frac{1}{4\pi}\sum_i\iiint\frac{\Delta^2 c'_i\,dx'_i\,dy'_i\,dz'_i}{r_i},$$

gdzie

$$r_i=\sqrt{(x-x'_i)^2+(y-y'_i)^2+(z-z'_i)^2},$$

a $\Delta^2 F'_i$, $\Delta^2 a'_i$, $\Delta^2 b'_i$, $\Delta^2 c'_i$ są wynikami podstawienia (x'_i, y'_i, z'_i) za (x, y, z) w funkcyach $\Delta^2 F$, $\Delta^2 a$, $\Delta^2 b$, $\Delta^2 c$; całkowanie zaś rozciąga się do całej objętości i, a sumowanie względem i do wszystkich tych objętości.

Należy jeszcze zadość uczynić warunkom (12). Więc zauważmy, że z równań (19) otrzymujemy łatwo równanie:

$$\sum\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\sum_i\iiint dx'_i\,dy'_i\,dz'\sum\Delta^2 a'_i\frac{\partial\left(\frac{1}{r_i}\right)}{\partial x'_i},$$

w którem, po zcałkowaniu przez części i uwzględnieniu w całce potrójnej równań (5) (zawsze po opuszczeniu czynnika $dx\,dy\,dz$), pozostanie tylko całka podwójna:

(20) $$\sum\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\sum_i\iint\frac{d\sigma_i}{r_i}\sum l_i\,\Delta^2 a_i,$$

rozciągnięta do wszystkich powierzchni σ_i, ograniczających objętości i.

Z równania (20) mamy oczywiście:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{1}{4\pi}\sum_i\iint d\sigma_i\frac{\partial\left(\frac{1}{r_i}\right)}{\partial x}\sum l_i\,\Delta^2 a_i,\quad \text{etc.},$$

skąd widoczna, że warunki (12) wymagają następujących:

(21) $$\sum l_i\,\Delta^2 a_i=0,\qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

które dotyczą wszystkich powierzchni σ_i. Owóż, pod warunkami (21), równanie (20) daje warunek (13), jako istotnie tu wymagalny.

§ 4.

Równania (7) w punkcie (x_i, y_i, z_i), należącym do objętości i, należy oczywiście wyrazić w ten sposób:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial c_i}{\partial y_i} - \frac{\partial b_i}{\partial z_i}, \qquad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \frac{\partial a_i}{\partial z_i} - \frac{\partial c_i}{\partial x_i},$$
$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial F_i}{\partial z_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial y_i} \tag{22}$$

i rozumieć przez F_i, a_i, b_i, c_i wyniki podstawienia (x_i, y_i, z_i) za (x, y, z) we wzorach (18) i (19).

Załóżmy:

$$\varrho_i = -\frac{\Delta^2 F_i}{4\pi}, \tag{23}$$

oraz

$$\alpha_i = -\frac{\Delta^2 a_i}{4\pi}, \quad \beta_i = -\frac{\Delta^2 b_i}{4\pi}, \quad \gamma_i = -\frac{\Delta^2 c_i}{4\pi}. \tag{24}$$

Z określeń początkowych wiemy, że ϱ_i jest skalarem dodatnym, a $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ wektorem. Prócz tego, na zasadzie równań (4) i (6), mamy:

$$\frac{d\,(\varrho_i\, dx_i\, dy_i\, dz_i)}{dt} = 0, \tag{25}$$

oraz

$$\frac{d\,(\alpha_i\, dx_i\, dy_i\, dz_i)}{dt} = 0, \quad \frac{d\,(\beta_i\, dx_i\, dy_i\, dz_i)}{dt} = 0, \quad \frac{d\,(\gamma_i\, dx_i\, dy_i\, dz_i)}{dt} = 0, \tag{26}$$

a na zasadzie równań (13) i (21):

$$\sum \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = 0, \tag{27}$$ $$\Sigma\, l_i\, \alpha_i = 0, \tag{28}$$

przyczem należy pamiętać, że związek (27) odnosi się do wnętrza objętości i, a związek (28) do powierzchni ją ograniczającej σ_i.

Ze względu na trwałość wektora $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, równania (27) i (28) prowadzą wiadomym sposobem [1]) do wniosku, że każda z krzywych, należących do familii:

[1]) Helmholtz. Crelle's J. Bd. 55. „Ueb. Integrale d. hydr. Gleich., welche d. Wirbelbewegungen entsprechen."

$$\frac{dx_i}{\alpha_i} = \frac{dy_i}{\beta_i} = \frac{dz_i}{\gamma_i}, \tag{29}$$

jest w sobie zamkniętą i nie wychodzi z obrębu objętości i. Jeśli tę krzywą przyjmiemy za oś nieskończenie cienkiej „nici", o przecięciu poprzecznem (normalnem do osi) $d\omega_i$, to iloczyn $d\omega_i \sqrt{\Sigma\alpha^2_i}$ jest stałym wzdłuż całej nici. Oznaczaczając nadto przez q_i długość całej osi nici, widoczna, że jest także:

$$\frac{d\,(\sqrt{\Sigma\alpha^2_i}\,.\,d\omega_i\,.\,q_i)}{dt} = 0, \tag{30}$$

t. j., że substancya każdej z tak określonych nici jest w czasie niezmienną.

Tym sposobem zawartość objętości i składa się z dwóch rodzajów substancyj: jednej, podobnej do masy, o gęstości skalarnej ϱ_i, i drugiej, niepodobnej do masy, o gęstości wektoralnej $d\omega_i\,(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, odniesionej do jednostki długości. Ta druga substancya przedstawia się jako układ ciągły nieskończenie cienkich nici substancyonalnych, w sobie zamkniętych.

Łącząc te wyniki z równaniami (18), (19) i (22), przychodzimy do wniosku, że należy rozróżnić i dwa rodzaje atrakcyi: skalarną, której odpowiada potencyał-skalar F (18) i wektoralną, której odpowiada potencyał-wektor (a, b, c) (19). Ze względu na atrakcyę skalarną, zawartość objętości i jest substancyą o gęstości skalarnej ϱ_i, a ze względu na atrakcyę wektoralną, zawartość objętości i jest substancyą o gęstości wektoralnej $d\omega_i\,(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. Ostatecznie zatem, zawartość objętości i przedstawia się, ze względu na atrakcyę wogóle, jako jedna substancya o dwóch gęstościach: skalarnej i wektoralnej, a substancyę tę nazywać będziemy „materyą".

Zauważmy, że przy tak określonej materyi, atrakcya nie wymaga wcale pośredniczącego między ciałami materyalnemi ośrodka, również materyalnego, dla umożliwienia im komunikowania sobie wzajemnych na się działań; bo z przyczyny równań (16) i określeń gęstości (23) i (24), takiego ośrodka wcale tam nie ma. A jednak, jak to równania (18), (19) i (22) wskazują, ciała działają na się z odległości, jakkolwiek w określeniu atrakcyi (§ 1) mowy o tem zgoła nie było.

Atoli między ciałami materyalnemi pośredniczy ośrodek niemateryalny, określony równaniami (7) pod warunkami (16). Postępując znanym dobrze sposobem w hydrodynamice [1]), łatwo można okażać, że na mocy wzorów (19) oraz wypowiedzianych wyżej własności nici, w każdym punkcie (x, y, z), byleby po za obrębem wszystkich objętości i, mamy:

$$\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{31}$$

[1]) H. Lamb: Treatise on the Motion of Fluids, § 133, str. 156.

icm©

rozumiejąc przez ψ funkcyę punktu i czasu, która, ze względu na punkt, i w razie, gdy choć jedna z tych objętości i jest wielospójną, jest wielowartościową. Tym sposobem równania (7), dla ośrodka niemateryalnego, mają właściwie postać:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \frac{dv}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{dw}{dt}=\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z},\tag{32}$$

pod warunkiem, że:

$$\Delta^2 F=0, \tag{33}$$

$$\Delta^2\psi=0, \tag{34}$$

i że funkcya ψ jest wogóle wielowartościową. Ośrodek ten, jako niemateryalny, należałoby nazywać „eterem".

Na zakończenie § niniejszego zauważmy wreszcie, że uwzględniając równania (23) i (24) w równaniach (2) i (5), otrzymamy związki:

$$J=-4\pi\,.\,\text{masa skal.},\quad (P,\,Q,\,R)=-4\pi\,.\,\text{masa wekt.}$$

które, wyjąwszy spółczynnik -4π, wykazują tożsamość atrakcyi i materyi, pod względem ilościowym. Stąd widoczna, że w określeniu atrakcyi, jako siły w czasie niezmiennej, mieści się prawo zachowania masy.

---

§ 5.

Poznajmy teraz prawa ruchu układu ciał materyalnych i, a właściwie mówiąc, prawa ruchu ich środków ciężkości. Według równań (22), równaniami ruchu środka ciężkości ciała i są trzy równania postaci:

$$\iiint \varrho_i\frac{du_i}{dt}\,dx_i\,dy_i\,dz_i=\iiint\varrho_i\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\,dx_i\,dy_i\,dz_i \tag{35}$$
$$-\iiint\left(c_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial y_i}-b_i\frac{\partial\varrho_i}{\partial z_i}\right)dx_i\,dy_i\,dz_i+\iint\varrho_i\,(m_i\,c_i-n_i\,b_i)\,d\sigma_i,\quad\text{etc.,}$$

rozumiejąc przez V_i wynik podstawienia $(x_i,\,y_i,\,z_i)$ za $(x,\,y,\,z)$ we wzorze:

$$V=F+\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\Delta^2F'_i\,dx'_i\,dy'_i\,dz'_i}{r_i}, \tag{36}$$

w którym F ma wyrażenie (18).

Z równań (35) wypływa, że, aby środki ciężkości ciał i poruszały się według prawa Newtona, niezależnie od postaci i wymiarów tych ciał, spełniać się powinny trwale warunki:

$$\frac{1}{a_i}\frac{\partial\varrho_i}{\partial x_i}=\frac{1}{b_i}\frac{\partial\varrho_i}{\partial y_i}=\frac{1}{c_i}\frac{\partial\varrho_i}{\partial z_i}, \tag{37}$$

wewnątrz każdego ciała i, oraz warunki:

$$\frac{l_i}{a_i}=\frac{m_i}{b_i}=\frac{n_i}{c_i} \tag{38}$$

na jego powierzchni. Pod temi bowiem warunkami, jakiejbykolwiek postaci i wymiarów było ciało i, równania ruchu jego środka ciężkości przywodzi się do następujących:

$$\iiint\varrho_i\frac{du_i}{dt}\,dx_i\,dy_i\,dz_i=\iiint\varrho_i\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\,dx_i\,dy_i\,dz_i,\quad\text{etc.,} \tag{39}$$

t. j. do wiadomych równań mechaniki nieba, gdy uwzględnia się niejednorodność ciała lub niesymetrya jego postaci.

Warunki (38) i (37) wyrażają, że krzywe familii:

$$\frac{dx_i}{a_i}=\frac{dy_i}{b_i}=\frac{dz_i}{c_i}, \tag{40}$$

wnikając do ciała i, spotykają powierzchnię tego ciała i wszystkie powierzchnie familii:

$$\varrho_i=\chi_i\,(t), \tag{41}$$

która jest układem powierzchni równych gęstości skalarnych w chwili t, pod kątem prostym. Zauważmy jednak, że żadna z powierzchni familii (41) nie przecina się ani z powierzchnią ciała i, ani z żadną inną powierzchnią tejże familii (41). Gdyby się bowiem te powierzchnie przecinały, wtedy, we wszystkich punktach ich rzekomego przecięcia, kierunek wektora (a_i,b_i,c_i) sprawdzałby na raz jeden aż dwa różne układy równań: w przypadku przecinania się powierzchni (41) z powierzchnią ciała, układy (38) i (37), a w przypadku przecinania się powierzchni (41) z sobą—dwa różne układy postaci (37); co oczywiście jest niemożliwe.

Powierzchnie zatem familii (41) nie przecinają się ani z sobą, ani z powierzchnią ciała i, skąd łatwy wniosek, że wszystkie one są jedna w drugiej zamknięte, a największa z nich, obejmująca wszystkie inne, stanowi powierzchnię ciała i.

Jeśli nadto ciała i mają postać sferoid zbliżonych do kul, wtedy rozumiejąc przez $[(x_i), (y_i), (z_i)]$ środek sferoidy, a przez $[(u_i), (v_i), (w_i)]$ i (V_i) prędkość i potencyał V_i w tym środku, z równań (39) otrzymamy równania przybliżone, postaci:

$$\frac{d\,(u_i)}{dt} = \frac{\partial\,(V_i)}{\partial\,(x_i)}, \quad \text{etc.,} \tag{42}$$

jako określające prawo ruchu środków ciężkości ciał sferoidalnych i.

Owóż, wyrażając się ściśle, ciała układu słonecznego ani się składają z warstw równych gęstości, zamkniętych jedna w drugiej, ani też są kulami. Równania (42), t. j. równania mechaniki nieba, należy przeto uważać jako pierwsze przybliżenie, a przyczyny niezgodności jej wyników z dostrzeżeniami należy może szukać w równaniach (35).

§ 6.

Ale powróćmy znowu do rozważania materyi wogóle i, podobnie jak w § poprzednim uwidoczniliśmy skutki atrakcyi skalarnej, uwidocznijmy teraz skutki atrakcyi wektoralnej.

Wiadomo, że całka $\int \Sigma u_i\, dx_i$, wzięta po obwodzie zamkniętym, wyobraża prąd. Przyjmijmy za obwód zamknięty oś nici i, której masę wektoralną oznaczmy przez dM_i, t. j., według oznaczeń § 4, załóżmy:

$$dM_i = \sqrt{\Sigma a_i^2}\, d\omega_i\, q_i. \tag{43}$$

Ponieważ iloraz dM_i/q_i jest stałym wzdłuż całej osi nici, przeto widocznie:

$$\frac{dM_i}{q_i} \int \sum u_i\, dx_i = \int \sqrt{\Sigma a_i^2}\, d\omega_i \sum u_i\, dx_i. \tag{44}$$

Ale z drugiej strony, wektor $\sqrt{\Sigma a_i^2}\, d\omega_i\, (dx_i, dy_i, dz_i)$ wyobraża masę wektoralną elementu nici; zatem, szukając odpowiedniej analogii w dynamice, należy wyrażenie (44) uważać za moment prądu w nici.

Idąc w tej analogii dalej, powiemy, że pochodna względem czasu momentu prądu w nici będzie siłą prądu w nici. Owóż, z uwagi, że masa wektoralna jest w czasie niezmienną, na siłę prądu w nici i otrzymamy z równania (44) wyrażenie następujące:

$$dM_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_i}\int \sum u_i\, dx_i\right) = \int \sqrt{\Sigma a_i^2}\, d\omega_i \sum \frac{du_i}{dt}\, dx_i. \tag{45}$$

$$= \frac{dM_i}{q_i} \int \sum \frac{du_i}{dt}\, dx_i.$$

Szukajmy teraz innego wyrażenia dla siły prądu. W tym celu uwzględnijmy przedewszystkiem równania (22); będzie:

$$\int \sum \frac{du_i}{dt}\, dx_i = \int \sum \left(\frac{\partial c_i}{\partial y_i} - \frac{\partial b_i}{\partial z_i}\right) dx_i. \tag{46}$$

Ale stosując wiadome twierdzenie S t o k e s a o przekształceniu całki po obwodzie zamkniętym na całkę powierzchniową, i powołując się na równanie (13), znajdziemy:

$$\int \sum \left(\frac{\partial c_i}{\partial y_i} - \frac{\partial b_i}{\partial z_i}\right) dx_i = -\iint (d\sigma_i) \sum (l_i)\, \Delta^2 a_i,$$

gdzie całkowanie po prawej rozciąga się do całej powierzchni, ograniczonej osią nici, której to powierzchni element wyobraża wektor $(d\sigma_i)\ [(l_i), (m_i), (n_i)]$. Uwzględniając następnie określenie (24), będziemy mieli:

$$\int \sum \left(\frac{\partial c_i}{\partial y_i} - \frac{\partial b_i}{\partial z_i}\right) dx_i = 4\pi \iint (d\sigma_i) \sum (l_i)\, a_i. \tag{47}$$

Zakładając przeto:

$$\mu_i = \iint (d\sigma_i) \sum (l_i)\, a_i \tag{48}$$

i wykonywając po prawej równania (45) podstawienia (46), (47) i (48), znajdziemy:

$$dM_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_i}\int\sum u_i\, dx_i\right) = \frac{4\pi\, dM_i \,.\, \mu_i}{q_i}\,. \tag{49}$$

Podobnie postępując z nicią j i zakładając:

$$dM_j = \sqrt{\Sigma a_j^2}\, d\omega_j\, q_j\,, \tag{50}$$

$$\mu_j = \iint (d\sigma_j) \sum (l_j)\, a_j\,, \tag{51}$$

otrzymamy:

$$dM_j \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_j}\int\sum u_j\, dx_j\right) = \frac{4\pi\, dM_j \,.\, \mu_j}{q_j}\,. \tag{52}$$

Owóż, w razie, jeśli są tylko dwie nici, zdarzyć się mogą dwa i tylko dwa różne przypadki: albo nici i i j nie tworzą łańcucha i wtedy całki μ_i (48) i μ_j (51) znikają, a tem samem równania (49) i (52) przywodzą się do następujących:

$$dM_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_i}\int\sum u_i\, dx_i\right) = 0\,, \tag{53}$$

$$dM_j \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_j}\int\sum u_j\, dx_j\right) = 0, \tag{54}$$

albo też nici i i j tworzą łańcuch i wtedy:

$$\mu_i = \sqrt{\Sigma a_j^2}\, d\omega_j = \frac{dM_j}{q_j}, \quad \mu_j = \sqrt{\Sigma a_i^2}\, d\omega_i = \frac{dM_i}{q_i}\,, \tag{55}$$

a tem samem równania (49) i (52) przyjmują postaci:

$$dM_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_i}\int\sum u_i\, dx_i\right) = \frac{4\pi\, dM_i \,.\, dM_j}{q_i\, q_j}\,, \tag{56}$$

$$dM_j \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q_j}\int\sum u_j\, dx_j\right) = \frac{4\pi\, dM_i \,.\, dM_j}{q_i\, q_j}\,. \tag{57}$$

Równania (56) i (57) oraz (53) i (54) zawierają w sobie twierdzenie następujące: Jeśli wyobrazimy sobie ciało, złożone z dwóch tylko nici, wtedy siły prądów w tych niciach są sobie równe, równe mianowicie: albo 4π razy wziętemu ilorazowi z iloczynu mas wektoralnych tych nici przez iloczyn ich długości, albo zeru, odpowiednio do tego, czy nici te tworzą lub nie tworzą łańcucha[1]).

Z twierdzenia tego wyciągniemy korzyści dopiero w drugim ciągu pracy niniejszej, w tomie następnym „Prac mat.-fiz."; obecnie poprzestaniemy na uwadze następującej:

W §§ poprzednich mogliśmy łatwo zauważyć, że masie skalarnej odpowiada zjawisko wektoralne, t. j. ruch; z § niniejszego, a w szczególności z powyższego twierdzenia wynika, że masie wektoralnej odpowiada zjawisko skalarne, którem jest prąd w nici.

(D. c. n.)

Warszawa, w Marcu, 1897 r.

[1]) Łatwo okazać analogiczne twierdzenie dla nici (włókien) wirowych w płynie doskonałym, podległym jedynie siłom zachowawczym. Twierdzenie to daje się sformułować tak: odpowiednio do tego, czy nici wirowe tworzą łańcuch lub nie, prąd w niciach tych jest różny od zera lub równy zeru. O ile mi wiadomo, własności tej nici wirowych dotąd nie zauważono.