$$\delta = \begin{vmatrix} (1,1), & (2,1), & \ldots, & (2n,1) \\ (1,2), & (2,2), & \ldots, & (2n,2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,2n), & (2,2n), & \ldots, & (2n,2n) \end{vmatrix};$$

w takim razie minor wyznacznika Δ_1 względem elementu x_{2n+1} pierwszej kolumny jest nierówny zeru (twierdz. VII).

Stąd wynika że ostatnie równanie (8) jest wynikiem niezależnych $2n$ pierwszych równań:

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + X_{2n+1} \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 1,$$

$$(1,1) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,1) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n+1,1) \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(1,2n) \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + (2,2n) \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \ldots + (2n+1,2n) \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial y_1} = 0.$$

Z ostatnich $2n+1$ równań liniowych i niejednorodnych możemy oznaczyć wszystkie pochodne $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n+1)$. Całkując otrzymane $2n+1$ równań różniczkowych zwyczajnych, otrzymamy, jak powiedziano w paragrafie 1, żądany wzór przekształcenia:

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}),$$
$$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}), \ldots, x_{2n+1} = \varphi_{2n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}),$$

który dane wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych niezależnych w tym przypadku, gdy wyznacznik jego Δ_1 nie jest równy zeru, sprowadza do postaci prostszej:

$$dy_1 + Y_2\, dy_2 + \ldots + Y_{2n+1}\, dy_{2n+1},$$

gdzie $Y_2, Y_3, \ldots, Y_{2n+1}$ nie zawierają zmiennej niezależnej y_1.

(Dokończenie nastąpi).

Odesa, w listopadzie, 1896 r.

O CAŁKOWANIU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH WEDŁUG AMPÈRE'A I DARBOUX.

PODAŁ

T. RUDZKI.

Niniejsza praca ma za zadanie zestawić badania Ampère'a[1]) w dziedzinie równań różniczkowych 2-go stopnia z pracami nowszych matematyków, głównie zaś z teoryą całkowania p. Darboux[2]), która od roku 1870 stanowi najważniejsze dopełnienie klasycznych rozpraw Ampère'a i Monge'a. Niewątpliwie geometryczne zagadnienia były główną i najpierwszą pobudką w kierunku badania równań cząstkowych, dlatego też pierwsze odkrycia Eulera i Monge'a na tem polu dotyczą teoryi powierzchni.

Metoda Eulera polegała głównie na sumowaniu szeregów nieskończonych; Monge korzystał ze szczególnem upodobaniem z własności charakterystyk geometrycznych[3]), należących do powierzchni całkowych danego równania; Ampère zaś doprowadził w dwóch rozprawach, drukowanych w czasopiśmie „Journal de l'École polytechnique" [4]), teoryę całkowania równania:

---

1) Journal de l'École polytechnique, Cah. 17, 18.

2) Journal de l'École normale, r. 1870, tłómaczenie niemieckie w podręczniku: Mansion, Partielle Differentialgleichungen, Berlin, 1892.

3) Patrz „Prace mat.-fiz., t. VII: S. Lie, Rów. różn. cząstk., § 2.

4) Zeszyt 17, 18.

(1) $$Hr + 2ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

do takiego stopnia doskonałości, że nowsi badacze dopiero w ostatnich czasach zdołali głębiej wniknąć w istotę tego zagadnienia.

Metoda p. Darboux polega na znajdowaniu całek kształtu:

(2) $$\Phi_l(x, y, z, \ldots, z_{i,k}) = \text{stała}; \; z_{i,k} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x_i \, \partial y_k},$$

czyniących zadość równaniom różniczkowym charakterystyk, t. j. na określaniu funkcyj niezmiennych Φ_l wzdłuż charakterystyk danego równania.

Metoda powyższa stosuje się zarówno do równań cząstkowych 2-go rzędu kształtu ogólnego:

(I) $$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

jak i do równań wyższych rzędów.

Porównywając ją z metodą poprzednią, autor starał się dać odpowiedź na następujące pytania:

1) Czy można znaleść u Ampère'a ślady równań (2), któreby zawierały, prócz pochodnych 1-go stopnia p, q zmiennej zależnej, pochodne wyższych stopni r, s, t, ...

2) Jakie pomysły Ampère'a zostały spożytkowane w pracy p. Darboux i w jakim stopniu[1]).

Ampère zbadał w swej rozprawie tylko równania cząstkowe, zawierające dwie zmienne niezależne x, y i jednę zmienną zależną z. Stosownie do tego oznaczamy pochodne cząstkowe niewiadomej funkcyi z:

[1]) Wyjaśnieniu tych pytań, postawionych autorowi przez prof. Lie w Lipsku, poświęcona jest rozprawa inauguracyjna p. t. „Ueber Ampères u. Darboux's Integrationstheorien der partiellen Differentialgleichungen 2, 0", której streszczeniem jest niniejsza praca. Prócz tego autor podaje w wyżej wymienionej rozprawie: pewne własności całek (2), dowodzenia twierdzeń p. Darboux, oraz streszcza prace kilku innych badaczy, tyczące się całkowania równań cząstkowych. Wreszcie podaje tak zmodyfikowaną metodę Ampère'a, aby się taż dała zastosować do całkowania równań cząstkowych wyższych stopni. Co zaś do słownictwa, uważał za stosowne trzymać się użytego przez prof. Żorawskiego w tłómaczonym przez niego artykule prof. Lie'go „Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen, 2, 0", Leip. Ber., 1895 (p. „Prace mat.-fiz., t. VII, str. 69). Imszeniecki bardzo udatnie i przystępnie streścił trudne do zrozumienia teorye Ampère'a (Grunerts Archiv etc. Jahr. 70 uebersetzt v. Hoüel, również Mansion, Partielle Dfzgl. etc., Berlin, 1892) i uzupełnił je w niektórych szczegółach, mianowicie we względzie metody przemieniania stałych dowolnych i całkowania pomocniczych układów równań cząstkowych 1-go rzędu, co zresztą przed nim uskutecznił był Bour.
W niniejszem streszczeniu autor podaje w krótkości tylko te teorye Ampère'a, które tenże bezpośrednio stosuje przy całkowaniu, po zatem zaś powołuje się na wyżej przytoczone prace Imszenieckiego i S. Lie'go.

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \; \frac{\partial z}{\partial y}, \; \ldots, \; \frac{\partial^{k+l} z}{\partial x_k \, \partial y_l},$$

w skróceniu za pomocą dwóch wskaźników, tak, że:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_k \, \partial y_l z} = z_{k,l}.$$

pochodne zaś pierwszego i drugiego rzędu sposobem, przyjętym w geometryi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

§ 1.

Ampère'a teorya całek równań cząstkowych.

Według Ampère'a, całka ogólna[1]) równania cząstkowego składa się z równań, które, jako wynik różniczkowania, powtarzanego nieograniczoną ilość razy, dają tylko takie związki pomiędzy zmiennemi x, y, z i ich pochodnemi, które tą samą drogą można otrzymać z danego równania, czyli inaczej: całka ogólna jest równoważnikiem danego równania i wszystkich tych, które można z niego wyprowadzić.

Tymczasem, według prof. Lie'go[2]) powyższe określenie jest błędne, o ile ma wyrażać warunek dostateczny, aby dana całka była ogólną.

Tak np. w równaniu:

$$s^2 - rt = \frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{a^2},$$

z danej powierzchni całkowej o wiadomych liniach geodezyjnych można otrzymać za pomocą stopniowych kwadratur układ powierzchni, które czynią zadość li tylko powyższemu równaniu, pomimo, iż całka ogólna obejmuje jeszcze inne układy powierzchni.

[1]) Ampère, Cah. 17, str. 549, 550. Imschenetsky, § 1, 4.
[2]) S. Lie: Norvegisches Archiv. Tom V, str. 518.

Całką szczególną (intégrale particulière) nazywa Ampère całkę, z której można wyprowadzić związki między zmiennemi i pochodnemi, nie wynikające z danego równania. Oprócz tego Ampère odróżnia [1]) całki, zawierające tak zw. kwadratury cząstkowe, oraz całki pierwszej klasy, w zależności od tego, czy zawierają one funkcye dowolne pod znakiem całki, czy są od tych funkcyj wolne. Z małym wyjątkiem stosują się twierdzenia, których dowodzi Ampère, do równań, należących do 1-ej klasy, t. j. posiadających całkę ogólną w formie skończonej i bez kwadratur cząstkowych.

Pod tym względem równania cząstkowe 2-go rzędu różnią się znacznie od równań 1-go rzędu, gdyż nie dozwalają na ogólną teoryę całkowania, jaka istnieje dla tych ostatnich. Wskutek tego należy robić pewne ograniczenia, charakteryzujące wśród wszystkich równań 2-go rzędu pewną szczególną ich kategoryę.

Pierwsze z twierdzeń Ampère'a [2]) określa liczbę niezależnych funkcyj dowolnych, zawartych w całce ogólnej; liczba ta, jak wiadomo, równa się rzędowi m danego równania. Pozostałe funkcye dowolne otrzymują się z m powyższych za pomocą całkowania lub różniczkowania. Jeżeli zatem ograniczymy się [3]) na równaniach 2-go rzędu, których całka ogólna 1-ej klasy składa się z trzech równań, to te równania będą zawierały dwie nowe zmienne niezależne α i β, będące argumentami funkcyj dowolnych w całce. Wyżej wspomniane równania będą miały zatem, według Ampère'a — kształt:

$$(1') \quad V_k\left(x, y, z, \Phi(\alpha), \Phi'(\alpha)\ldots, \int \chi(\alpha)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha, \ldots, \Psi\beta, \ldots, \int \mu(\alpha)\,\Psi(\beta)\,d\beta \ldots\right) = 0,$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

Atoli, według, p. M. Levy [4]), przypuszczenie to nie sprawdza się we wszystkich przypadkach; w ogólności bowiem zależność funkcyi dowolnej $\chi(\alpha)$ od nowej funkcyi $\Phi(\alpha)$ wyraża się równaniem:

$$(2) \qquad U\left(\alpha, \Phi, \frac{d\Phi}{d\alpha}, \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}, \ldots, \chi, \frac{d\chi}{d\alpha}, \ldots\right) = 0,$$

i tylko pozostałe funkcye dowolne tego samego argumentu α otrzymują się z $\Phi(\alpha)$ i $\chi(\alpha)$ za pomocą różniczkowania lub całkowania. Zauważyć jednak należy, że p. Levy dotychczas nie ogłosił drukiem dowodu swego twierdzenia.

---

[1]) Cah. 17, str. 548.
[2]) Cah. 17, str. 583/6.
[3]) Cah. 18, str. 59.
[4]) Comptes Rendus. Rocznik 1872, str. 1094.

§ 2.

Pochodne funkcyi niewiadomej z [1]) można otrzymać z całki ogólnej 1-ej klasy danego równania, różniczkując je i rugując argumenty α i β.

Obliczone w ten sposób pochodne dzieli Ampère na dwie kategorye [2]):

1) Pochodne, w które wchodzą li tylko funkcye dowolne, zawarte w całce ogólnej; te Ampère nazywa jednorodnemi (homogène) z całką ogólną.

2) Pochodne, zawierające nowe funkcye dowolne; te ostatnie Ampère zwie różnorodnemi z całką (heterogène); przytem zauważyć należy, że jednorodność lub różnorodność może się odnosić do jednego argumentu α lub β lub obydwóch (α i β).

Opierając się na powyższych określeniach, można rezultaty otrzymane przez Ampère'a [3]) wypowiedzieć w następujący sposób:

1) Jeżeli p i q są niejednorodne z całką ogólną danego równania, to wszystkie pozostałe pochodne są tego samego rodzaju.

2) Jednorodność lub różnorodność zachodzą jednocześnie dla wszystkich pochodnych tegoż samego rzędu.

3) Liczba nowych funkcyj dowolnych wzrasta zawsze o jedność, poczynając od rzędu, w którym pochodne przestały być jednorodnemi z całką ogólną.

4) Jeżeli pochodne najwyższego rzędu w danem równaniu są jednorodne z całką, to wszystkie pochodne, zawarte w równaniu, mają też samą własność.

Uwaga. Powyższe twierdzenia ulegają zmianom w przypadku, kiedy argumenty α (lub β) redukują się do funkcyj jednej zmiennej (x lub y).

---

[1]) — Cah. 17, str. 507.
[2]) — Cah. 17, str. 578.
[3]) — Cah. 17, str. 579.

§ 3.

Monge'a teorya charakterystyk.

Monge wprowadził do teoryi równań cząstkowych nowe zasadnicze pojęcie t. zw. charakterystyk, t. j. krzywych, które, zmieniając kształt i położenie w przestrzeni, tworzą swym ruchem powierzchnie całkowe danego równania, wskutek czego każdą z tych powierzchni można uważać jako układ ∞^1 charakterystyk.

W przypadku równań 2-go rzędu[1]) przyjmuje Monge, że jeżeli dwie powierzchnie całkowe mają wspólną charakterystykę, to muszą się one stykać we wszystkich jej punktach, co znaczy, że pochodne p i q dla wspólnych punktów mają jednakie wartości, pochodne zaś r, s, t pozostają nieoznaczone.

Ponieważ jednak nie wszystkie równania rzędu 2-go posiadają tą ostatnią własność, wynika więc, że określenie Monge'a obejmuje tylko pewną kategoryę tych równań; mianowicie w ogólnym przypadku dwie powierzchnie całkowe, które się stykają wzdłuż jednej i tej samej charakterystyki są ze sobą ściśle styczne, t. j. wartości r, s, t, wzdłuż tej krzywej są sobie równe dla obu powierzchni. Według p. Goursat[2]) dane równanie ma w tym razie charakterystyki 2-go rzędu (2-d ordre); w szczególnym zaś przypadku, kiedy dwie powierzchnie mają wzdłuż danej charakterystyki styczność 1-go rzędu p. Goursat nazywa tę ostatnią — charakterystyką 1-go rzędu (du premier ordre)[3]). Do równań cząstkowych 2-go rzędu, które mogą mieć charakterystyki 1-go rzędu, należą przedewszystkiem te, które mają całkę pośrednią 1-go rzędu (intégrale intermédiaire) z dwiema stałemi dowolnemi:

$$\vartheta(x, y, z, p, q, a, b) = 0; \tag{3}$$

i naodwrót, jeżeli dane równanie posiada całkę pośrednią, to powierzchnie całkowe muszą koniecznie, według p. Goursat, mieć charakterystyki 1-go rzędu.

Ażeby zatem znaleść równanie różniczkowe charakterystyk 1-go (w razie, jeżeli one istnieją), trzeba postawić za warunek, by układ równań:

[1]) Applications de l'analyse à la géométrie, 1880, V. ed. par Liouville, str. 74, str. 234.

[2]) Acta Mathematica, XIX, rok 1895. Sur une classe d'équations aux derivées partielles du 2-d ordre et sur la theorie des intégrales intermédiaires.

[3]) To samo stosuje się do równań n-tego rzędu, których charakterystyki są wogólności n-tego rzędu, w szczególnym wypadku atoli, jeżeli powierzchnie całkowe, przechodzące przez nie, mają styczność m-tego rzędu są one m-tego rzędu

$$\begin{gathered} f(x, y, z, p, q, r, s, t) \\ dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy, \end{gathered} \tag{4}$$

nie dawał dla pochodnych r, s, t oznaczonych wartości, t. j. aby wyznacznik funkcyjny tych równań względem r, s, t:

$$D = \frac{\partial(f, dp, dq)}{\partial(r, s, t)}, \tag{4'}$$

był identycznie równy zeru.

W istocie równanie, otrzymane tym sposobem, jak okazał Monge[1]), jest identyczne z wzorem dla charakterystyk:

$$\frac{\partial f}{\partial r} dy^2 - \frac{\partial f}{\partial s} dy\,dx + \frac{\partial f}{\partial t} dx^2 = 0, \tag{5}$$

chociaż ten ostatni określa je dla wszystkich równań 2 go rzędu.

Jeżeli wartości dwóch jakichkolwiek pochodnych (np. r i s) 2-go rzędu wyznaczymy z 2-ch ostatnich równań (4) i podstawimy w pierwsze, to po uporządkowaniu według potęg trzeciej pochodnej t, otrzymamy równanie:

$$P + Qt + Rt^2 + \ldots = 0, \tag{5'}$$

w którem wszystkie spółczynniki przy t nie zawierają pochodnych 2-go stopnia r, s, t i powinny być równe zeru.

Stąd wynika szereg warunków, sprawdzających się tylko wtedy, jeżeli charakterystyki danego równania są 1-go rzędu. Z powyższego wynika, że Monge wprowadził pojęcie charakterystyk tylko dla równań cząstkowych, które mają całki pośrednie 1-go rzędu:

$$\vartheta(x, y, z, p, q, a, b) = 0.$$

Prócz tego okazał Monge, że wzór, określający charakterystyki (5), może być zawsze otrzymany i użyty do całkowania danego równania.

[1]) Applications etc., str. 75.

§ 4.

Rozszerzenia pojęcia charakterystyk na równania stopni wyższych dokonał A m p è r e [1]). Pokazał on mianowicie, że wielomian:

$$C \equiv \frac{\partial f}{\partial z_{n,0}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + \frac{\partial f}{\partial z_{n-1.1}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_{0,n}}, \tag{6}$$

w którym pochodna $\frac{\partial y}{\partial x}$ wzięta jest przy założeniu:

$$\alpha = \text{stałej},$$

a z określone zostało przez nowe zmienne niezależne x, α, za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi(x, y) \\ x &= x, \end{aligned} \tag{7}$$

zawsze musi być otrzymany przy każdem, powtarzanem dowolną liczbę razy, różniczkowaniu danego równania n-tego rzędu:

$$F(x, y, z, p, q, \ldots, z_{i,k}) = 0. \tag{II}$$

W każdem z otrzymanych równań:

$$F_k = 0,$$

układu:

$$\frac{dF}{dy} \equiv F_1 = 0, \frac{dF_1}{dy} \equiv F_2 = 0, \ldots, \frac{dF_{k-1}}{dy} \equiv F_k = 0, \tag{II$'$}$$

wielomian (6) mieści się w wyrazie, zawierającym pochodne:

$$z_{0,n+1}, \; z_{0,n+2}, \ldots, z_{0,n+k}, \ldots \tag{8}$$

Ponieważ pochodne pewnego rzędu muszą zawierać nowe funkcye dowolne (§ 2), nie znajdujące się ani w całce ogólnej, ani w pochodnych niższych rzędów, zatem począwszy od tego rzędu, funkcya z może tylko wtedy czynić zadość równaniom (II′), jeżeli wielomian (6) równa się zeru:

[1]) Cah. 17, str. 90.

$$C = 0. \tag{6$'$}$$

Z powyższego widać, jak wielką zaletę stanowi wprowadzenie nowej zmiennej α, gdyż nawet jeżeli równanie (II) nie należy do 1-ej kl. A m p è r e'a, można zawsze utworzyć wielomian (6) i wybrać na α takie wartości, któreby czyniły zadość równaniu (6′) i określały tem samem charakterystyki, jako układ spółrzędnych krzywoliniowych na powierzchniach całkowych.

Posiłkując się twierdzeniami, przytoczonemi w § 2, otrzymuje A m p è r e [1]) warunek, aby dane równanie miało pochodne n-tego rzędu jednorodne z całką ogólną. Mianowicie, za pomocą wzorów (7) i wynikającego z nich układu:

$$z_{k,n-k} = \frac{\partial z_{k-1,n-k}}{\partial x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial z_{k-2,n-k+1}}{\partial x} + \ldots + (-1)^k\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^k z_{0,n}, \tag{7$'$}$$

$$(k = 1, \ldots, n),$$

można wyrugować z równania (II) wszystkie pochodne n-tego rzędu, z wyjątkiem jednej z nich (np. $z_{0,n}$).

Wtedy otrzymamy równanie analogiczne do równania (5′ § 3):

$$P + Q z_{0,n} + R z_{0,n}^2 + \ldots = 0, \tag{9}$$

w którem spółczynniki P, Q, R zawierają tylko pochodne niższych rzędów. Zatem, jeżeli $z_{0,n}$ jest niejednorodne z całką ogólną i pochodnemi:

$$z_{k,l} \qquad (k + l < n),$$

natenczas z równań (9) wynika układ:

$$P = Q = R = \ldots = 0. \tag{9$'$}$$

W szczególnym przypadku równań 2-go rzędu, rezultat powyższy jest identyczny z założeniem M o n g e'a (§ 3) i może być sformułowany w następujący sposób:

Jeżeli pochodne r, s, t (lub $\underset{i+k=n}{z_{i,k}}$) są jednorodne z całką ogólną, to dane równanie cząstkowe 2-go (n-go) rzędu posiada charakterystyki 2-go (n-go) rzędu [2]); jeżeli zaś są niejednorodne, to posiada ono charakterystyki niższego rzędu.

[1]) Cah. 17, str. 607, 597.

[2]) Przytem bierzemy pod uwagę szereg charakterystyk, odpowiadający danemu argumentowi α.

Przypuśćmy, że dane równanie 2-go rzędu zawiera pochodne r, s, t i wyznacznik:

$$rt - s^2,$$

tylko w pierwszej potędze; w takim razie łatwo okazać, że sprowadza się ono przy stosowaniu powyższej metody do dwóch równań:

$$P = Q = 0,$$

z których jedno jest identyczne z równaniem charakterystycznem (5):

$$C = 0.$$

---

§ 5.

Ampèrea teorya całkowania równań cząstkowych.

Równania cząstkowe 2-go rzędu dzielą się według A m p è r e'a na dwie kategorye, stosownie do tego, czy mają całkę p o ś r e d n i ą, lub też jej nie posiadają. Niestety, A m p è r e nie określa ściśle, co należy rozumieć przez c a ł k ę p o ś r e d n i ą (intégrale intermédiaire). I tak np. (Cah. 17, str. 649) wyraża się w ten sposób:

„Je ne m'occuperai pas des intégrales et solutions p a r t i c u l i è r e s, qu'on peut appeler i n t e r m é d i a i r e s et qui expriment les relations entre les variables... et des derivées d'ordres inférieurs..."

Z powyższych słów wynika, że rozwiązania pośrednie (intermédiaires) są to rozwiązania szczególne, które oprócz zmiennych zawierają pochodne niższych rzędów ($z_{i,k}$, $i+k<n$).

Poniżej jednak A m p è r e mówi o rozwiązaniach szczególnych (particulières) w sposób następujący: „les intégrales et les solutions particulières en meme temps qu'elles etablissent ces relations entre les variables et leurs dérivées en établissent d'autres etrangères à la question."

A zatem rozwiązania szczególne nie dają wszystkich powierzchni całkowych danego równania.

Tak np. według A m p è r e'a, równanie [1]):

(10) $$(r + pt)^2 = q^2\, rt,$$

[1]) Cah. 18, str. 51.

posiada całkę pośrednią:

$$2y + qx + x\sqrt{q^2 + 4p} = \varphi\,(q \pm \sqrt{q^2 + 4p}),$$

przeciwnie zaś równanie:

$$p + \frac{q^2}{4} = 0,$$

stanowi jego rozwiązanie s z c z e g ó l n e i obejmuje tylko pewną część jego powierzchni całkowych.

Pierwsze określenie, jak widać, udziela obu całkom ogólność tego samego stopnia, drugie zaś, do pewnego stopnia, nie zgadza się z pierwszem.

W rozdziale, poświęconym równaniom cząstkowym n-tego rzędu, A m p è r e nie wzmiankuje wcale o całkach pośrednich; natomiast jeden ustęp w (Cah. 18, str. 71), nasuwa przypuszczenie, że za c a ł k ę p o ś r e d n i ą, według A m p è r e a, można uważać również układ dwóch całek:

$$V_k\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{stała}, \qquad k=1,2.$$

czyniących zadość równaniom różniczkowym charakterystyk.

Poniżej postaramy się wykazać, że przypuszczenie to, zrobione przez prof. L i e, ma za sobą znaczny stopień prawdopodobieństwa.

---

§ 6

A m p è r e stosuje przedewszystkiem metodę[1]) swą do równań kształtu:

(11) $$Hr + 2\,Ks + Lt + M + N\,(rt - s^2) = 0,$$

w którem spółczynniki są funkcyami wielkości:

$$x, y, z, p, q.$$

Dla charakterystyk równania (11), A m p è r e otrzymuje układ trzech rów-

[1]) Cah. 18, str. 64.

nań różniczkowych 1-go rzędu, zawierających cztery zmienne niezależne, zatem o jednę więcej, niż wynosi liczba równań.

Ponieważ metoda całkowania równania (11) wyłożona jest w wielu podręcznikach, przechodzimy zatem do jej uogólnienia w przypadku, kiedy dane równanie 2-go rzędu jest kształtu ogólnego:

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

W Cah. 17 (str. 70) Ampère szkicuje w kilku słowach ów uogólniony sposób całkowania, który postaramy się poniżej uzasadnić.

Według Ampère'a sprowadzenie równań cząstkowych 2-go stopnia do układów, w których znajdują się tylko pochodne względem jednej zmiennej niezależnej i których liczba jest o jedność mniejszą od liczby funkcyj niewiadomych, możliwe jest nietylko dla równania (11) lecz również i dla ogólniejszego równania (I), w razie, jeżeli posiada ono całkę pośrednią; wtedy mianowicie powyższy układ daje 2 całki:

$$(12) \qquad \begin{aligned} V_1(x, y, z, p, q, r, s, t) &= \beta, \\ V_2(x, y, z, p, q, r, s, t) &= \psi\beta. \end{aligned}$$

które według Ampère'a otrzymać można w następujący sposób [1]):

„Za pomocą metody, wyłożonej w jednym z poprzednich rozdziałów, otrzymuje się dwa równania, w których x i z są zmiennemi niezależnemi, a które wskutek zmiany znaku pierwiastku kwadratowego przy $\frac{\partial y}{\partial x}$ przechodzą na dwa inne, zawierające x i β jako zmienne niezależne".

Nasuwają się tu dwa pytania:

1) o jakiej metodzie wspomina Ampère i

2) co w danym razie rozumie on przez całkę pośrednią.

Należy zauważyć, że w rozprawie Ampère'a mieszczą się dwie metody całkowania. Według pierwszej (§ 4) trzeba utworzyć szereg równań:

$$(9') \qquad P = Q = R = \ldots,$$

które nie sa w sprzeczności ze sobą tylko wtedy, jeżeli dane równanie, jak wykazał Ampère [2]), jest kształtu (11), albo też, jak dowiódł Bäcklund [3]), przedstawia w spółrzędnych prostokątnych r, s, t, układ powierzchni prostoliniowych, których stożek asymtotyczny wyraża się równaniem:

$$rt - s^2 = 0,$$

[1]) Cah. 18, str. 70.

[2]) Cah. 18, str. 46.

[3]) Mathematische Annalen, tom XI, XIII.

W obu wypadkach, jak wiadomo, pochodne r, s, t są niejednorodne z całką ogólną równania (I); ponieważ zaś Ampère jako ogólny przypadek dopuszcza ich jednorodność, możemy więc stosować tylko drugą jego metodę [1]).

---

§ 7.

Według tej ostatniej należy utworzyć szereg pochodnych równania (I) względem y:

$$(13) \qquad \frac{\partial f}{\partial r} z_{2,k-1} + \frac{\partial f}{\partial s} z_{1,k-1} + \frac{\partial f}{\partial t} z_{0,k} + R_{k-2} = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3.$$

w których R_{k-2} jest sumą wyrazów, niezależnych od pochodnych rzędu n-tego. Rugując za pomocą wzorów (7') z tych równań wszystkie pochodne z_n oprócz jednej z nich ($z_{0,n}$) otrzymamy równanie:

$$(14) \qquad C \,.\, z_{0,n} + S_{k-2} = 0,$$

z którego wynika, że jeśli całka równania (I) należy do 1-ej klasy Ampère'a, t. j. jeżeli.

$$(6') \qquad C = 0,$$

to i drugi wyraz w równaniu (14) równa się zeru:

$$(14') \qquad S_{n-2} = 0.$$

Tym sposobem otrzymujemy układ:

$$(14'') \qquad C = 0, \; S_1 = 0, \ldots, S_{n-2} = 0,$$

któremu czynią zadość wszystkie charakterystyki danego równania (I). Ampère otrzymuje tylko pierwsze z równań (14') [2]), dodaje przytem jednak, że to ostatnie, również jak i równanie (6'), pomocnem jest przy całkowaniu, gdyż każde z nich daje inną wartość na $\frac{\partial y}{\partial x}$.

[1]) Cah. 17, str. 601.

[2]) Cah. 17, str. 603.

Wprawdzie łatwo byłoby w sposób analogiczny zużytkować cały szereg równań (14″), u Ampère'a, jednak nie znajdujemy tego uogólnienia.

Równania (14) wraz z wiadomemi wzorami:

$$(14''') \qquad \frac{\partial z_{k,l}}{\partial x} = z_{k+1,l} + z_{k,l+1}\,\frac{\partial y}{\partial x}\,,$$

tworzą układ $\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$ równań niezależnych z $\frac{n+1\;\; n+2}{2} + 2$ zmiennemi:

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ z_{n,0},\ \ldots,\ z_{0,n}\,.$$

Układ ten dla każdej dowolnie wybranej powierzchni walcowej,

$$(a) \qquad y = \mu\,(x).$$

zamienia się na szereg równań różniczkowych zwyczajnych, którego całki określają wszystkie charakterystyki[1]), znajdujące się na powierzchni (a). Postępując w powyżej wskazany sposób, otrzymujemy w szczególnym przypadku wstęg charakterystycznych 2-go rzędu następujący układ 6-ciu równań różniczkowych z ośmiu zmiennemi: x, y, z, p, q, r, s, t:

$$\begin{cases} 1)\quad C \equiv \dfrac{\partial f}{\partial t}\,dx^2 + \dfrac{\partial f}{\partial s}\,dx\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial r}\,dy^2 = 0, \\[2ex] 2)\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}\,q + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\,s + \dfrac{\partial f}{\partial q}\,t + \dfrac{\partial f}{\partial s}\,\dfrac{\partial t}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial r}\left(\dfrac{\partial s}{\partial x} - \dfrac{\partial y}{\partial x}\,\dfrac{\partial t}{\partial x}\right) = 0, \\[2ex] 3)\quad \dfrac{df}{dx} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p}\,r + \dfrac{\partial f}{\partial q}\,s + \dfrac{\partial f}{\partial r}\,\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\,\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\,\dfrac{\partial t}{\partial x} = 0, \\[2ex] 4)\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = p + q\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\,, \\[2ex] 5)\quad \dfrac{\partial p}{\partial x} = r + s\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\,, \\[2ex] 6)\quad \dfrac{\partial q}{\partial x} = s + t\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Ponieważ równanie (15′) ma w ogólności dwa różne między sobą pierwiastki:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m_1,\ \ \frac{\partial y}{\partial x} = m_2,$$

[1]) wstęgi charakterystyczne rzędu n-tego.

więc faktycznie mamy do czynienia z 2-ma układami równań (15) (15A—15B), z których każdy odpowiada jednemu szeregowi (A lub B) ∞^1 charakterystyk na danej powierzchni całkowej.

Przy całkowaniu układu (15B) można uważać argument β za ilość stałą, ponieważ nie znajduje się on w żadnem z równań (15).

Oznaczmy zmienne y, z, p, q, r, s, t dla ogólności i dla zaznaczenia ich równoważności w następującym rachunku, przez $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \ldots, \mathfrak{z}_7$ i przypuśćmy prócz tego, że układ (15B) posiada dwie całki:

$$(16) \qquad \begin{cases} V_1\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = \beta = \text{stała}, \\ V_2\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = \psi\,(\beta) = \text{stała}. \end{cases}$$

W takim razie można wartość i trzech jakichkolwiek ze zmiennych wyznaczyć[1]) z danego równania (I) i z (16):

$$(17) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= \mathfrak{Z}_1\,(x, \mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6, \mathfrak{z}_7, \beta, \psi\,(\beta)), \\ \mathfrak{z}_2 &= \mathfrak{Z}_2\,(\text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}), \\ \mathfrak{z}_3 &= \mathfrak{Z}_3\,(\text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}\ \ \text{,,}), \end{aligned}$$

oraz za pomocą różniczkowania powyższych wartości znaleść pochodne:

$$(18) \qquad \frac{d\mathfrak{z}_k}{dx} = X_k\left(x, \mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6, \mathfrak{z}_7, \psi\,(\beta), \psi'\,(\beta), \frac{\partial \mathfrak{z}_4}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{z}_7}{\partial x}\right), \qquad k = 1, 2, 3.$$

Wartości (17, 18) czynią zadość wszystkim charakterystykom szeregu (B), jeżeli w nich uważać argument β za ilość stałą, oraz wszystkim powierzchniom, utworzonym przez charakterystyki (B), jeżeli przemieniać argument β.

Przytem musimy funkcyi ψ nadać postać określoną ψ_0, by otrzymać którąkolwiek z tych powierzchni.

Jeżeli wreszcie wartości na $\mathfrak{z}_k$ (17, 18), w których przypuszczamy, że postać funkcyi ψ została ustaloną, podstawimy w równania układu (A), to tem samem wydzielimy z pośród wszystkich utworzonych przez charakterystyki (B) powierzchni te, które również mogą być utworzone przez charakterystyki szeregu (A).

Układ (15A) składa się z sześciu równań, z których pięć jest od (15B) niezależnych, a ponieważ liczba funkcyj niewiadomych, $\mathfrak{z}_4, \ldots, \mathfrak{z}_7, \beta$, jest również równa pięciu, mamy więc układ równań różniczkowych zwyczajnych, które można sprowadzić do kształtu:

[1]) według Ampère'a trzech pochodnych r, s, t.

$$(19)\qquad \frac{dx}{f_1(x, \mathfrak{z}_4, \ldots, \mathfrak{z}_7, \beta, \psi(\beta), \psi'(\beta))}$$

$$= \frac{d\mathfrak{z}_4}{f_2(\ldots)} = \frac{d\mathfrak{z}_5}{f_3(\ldots)} = \frac{d\mathfrak{z}_6}{f_4(\ldots)} = \frac{d\mathfrak{z}_7}{f_5(\ldots)} = \frac{d\beta}{f_6(\ldots)}.$$

Przy całkowaniu tego układu winniśmy uważać argument α za wielkość stałą (gdyż nie znajduje się on w równaniach (19)), ψ zaś jako funkcyę daną i oznaczoną.

Wartości początkowe zmiennych $x_0, \mathfrak{z}_{40}, \ldots, \beta_0$ powinny czynić zadość danemu równaniu, a zmienne $x, \mathfrak{z}_4, \ldots, \mathfrak{z}_7, \beta$ winny dla $x = x_0 = \varphi(\alpha)$ sprowadzać się do oznaczonych funkcyj argumentu α.

Przypuśćmy, że z pięciu równań całkowych danego układu (19) możemy wyrugować dwie zmienne, tak ażeby pozostałe trzy równania zawierały ilości x, y, z; otrzymujemy wtedy równania:

$$(20)\qquad F_k(x, y, z, \beta, \psi(\beta)) = \Phi_k(\varphi(\alpha)), \qquad k=1,2,3,$$

czyniące zadość danemu równaniu (I).

Układ (20) zawiera funkcye dowolne, które w ogólności można tak określić, by dana powierzchnia całkowa przechodziła przez dowolnie wybraną krzywą $y = Y(t)$, $z = Z(t)$ i wzdłuż niej dotykała danej powierzchni rozwijalnej, zatem przedstawia on całkę ogólną danego równania.

§ 8.

Powyższy rachunek nie daje się przeprowadzić przy założeniu, zrobionem przez A m p è r e'a (§ 7); A m p è r e mianowicie przypuszcza, że pochodne r, s, t można wyznaczyć z równań (I, 16), czyli że wyznacznik funkcyjny:

$$(17')\qquad D = \frac{\partial(f, V_1, V_2)}{\partial(r, s, t)},$$

jest różny od zera.

Otóż łatwo okazać, że w wypadku dwóch całek V_1, V_2 2-go rzędu zawsze zachodzi równanie $D = 0$.

[1]) D a r b o u x: Annales de l'École normale, 1870, str. 163–173, § 5.

W tym celu przypuśćmy, że dwa równania

$$U_k(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad k=1,2,$$

mają (∞^∞) wspólnych powierzchni całkowych. W takim razie ich równania charakterystyczne:

$$\frac{\partial U_k}{\partial r} u^2 + \frac{\partial U_k}{\partial s} u + \frac{\partial U_k}{\partial t} = 0, \qquad k=1,2,\quad u = -\frac{dy}{dx},$$

jak okazał p. D a r b o u x[1]), muszą mieć wspólny pierwiastek $u_1 = u$.

Geometrycznie oznacza to, że na danej wspólnej powierzchni całkowej oba równania wyznaczają jeden i ten sam szereg charakterystyk $\left(\frac{dy}{dx} = -u_1\right)$ któregokolwiek rzędu (A lub B).

Ponieważ zaś każde równanie, kształtu:

$$(16')\qquad V_2 = \psi(U_1),$$

otrzymane z układu (16), wskutek rugowania zmiennej β, ma z danem równaniu (I), jak okazał D a r b o u x[2]), ∞^∞ wspólnych powierzchni całkowych, zatem każde z równań:

$$V_1 = \text{stała},$$

$$V_2 = \text{stała},$$

musi mieć z równaniem (I) również ∞^∞ wspólnych powierzchni całkowych.

Wskutek tego w układzie równań:

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial r} u^2 + \frac{\partial f}{\partial s} u + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial V_1}{\partial r} u^2 + \frac{\partial V_1}{\partial s} u + \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial V_2}{\partial r} u^2 + \frac{\partial V_2}{\partial s} u + \frac{\partial V_2}{\partial t} = 0; \end{aligned}$$

każde z dwóch ostatnich posiada ten sam pierwiastek $u_1 = u$, czyniący zadość pierwszemu.

[1]) D a r b o u x: Annales de l'École normale 1870, str. 163–173, § 5.
[2]) D a r b o u x etc., § 4.

Stąd zaś wynika warunek konieczny:

$$
(17'') \qquad D = \frac{\partial\,(f, V_1, V_2)}{\partial\,(r, s, t)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial r}, & \frac{\partial f}{\partial s}, & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial V_1}{\partial r}, & \frac{\partial V_1}{\partial s}, & \frac{\partial V_1}{\partial t} \\ \frac{\partial V_2}{\partial r}, & \frac{\partial V_2}{\partial s}, & \frac{\partial V_2}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.
$$

---

§ 9.

Przypadek, w którym dane równanie (I) posiada pośrednią całkę 1-go rzędu:

$$
(3) \qquad \vartheta\,(x, y, z, p, q, a, b) = 0,
$$

daje się sprowadzić do poprzedniego dwóch całek 2-go rzędu (16).

Ażeby to okazać, utwórzmy, według L a g r a n g e'a, z równania (3) całkę pośrednią, zawierającą funkcyę dowolną.

W tym celu przemieńmy ilości a i b tak, ażeby zadość czyniły równaniom:

$$
(22) \qquad b = \varphi\,(a), \quad \frac{d\vartheta}{da} = 0.
$$

Różniczkując (3) i uwzględniając (22), otrzymamy układ:

$$
(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\,p + \frac{\partial\vartheta}{\partial p}\,r + \frac{\partial\vartheta}{\partial q}\,s + \frac{d\vartheta}{da}\,\frac{da}{dx} \\ & = \frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\,p + \frac{\partial\vartheta}{\partial p}\,r + \frac{\partial\vartheta}{\partial q}\,s = W_1\,(x, y, z, p, q, r, s, t, a, \varphi(a)) = 0, \\ & \frac{\partial\vartheta}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} + q\,\frac{\partial\vartheta}{\partial p}\,s + \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\,t = W_2\,(x, y, z, p, q, r, s, t, a, \varphi\,(a)) = 0, \end{aligned} \right.
$$

z którego możemy wyznaczyć wartości:

$$
(24) \qquad \begin{aligned} a &= W_3\,(x, y, z, p, q, r, s, t), \\ \varphi\,(a) &= W_4\,(x, y, z, p, q, r, s, t), \end{aligned}
$$

a z tych, rugując parametr a, szereg nieskończony równań:

$$
(25) \qquad W_4 = \varphi\,(W_3).
$$

Pozostaje tylko okazać, że równania (25) czynią zadość szeregowi charakterystyk (A lub B) danego równania.

W tym celu zauważmy, że ∞^5 charakterystyk równania (3) nie zmieni się wskutek przemieniania parametrów (a i b) według równań (22), t. j. że równanie (I) nie ma innych charakterystyk jednego szeregu prócz tych, które daje równanie (3). Jeżeli więc funkcye W_3, W_4 nie zmieniają swej wartości dla danej powierzchni całkowej równania (3), to tembardziej nie zmienią jej dla charakterystyk, leżących na tych powierzchniach, a zatem:

$$
(25') \qquad \begin{aligned} W_3 &= \text{stała}, \\ W_4 &= \text{stała}, \end{aligned}
$$

są całkami układu charakterystyk szeregu A danego równania (I).

Odwrotnie łatwo okazać, że jeżeli istnieją dwie całki 2-go rzędu (16), zawierające pochodne r, s, t, to dane równanie ma zawsze całkę pośrednią (3).

Mianowicie warunek:

$$
(17') \qquad D = 0
$$

wyraża, że z trzech równań (16, I), w których należy uważać x, y, z, p, q za ilości stałe, jedno musi być wynikiem dwóch pozostałych, t. j. jeżeli z równań:

$$
(16) \qquad V_1 = c_1, \quad V_2 = c_2,
$$

wyznaczyć pochodne r, s i podstawić w (I), to w tem ostatniem równaniu trzecia pochodna t wyruguje się sama przez się i otrzymamy rezultat rugowania:

$$
(3') \qquad F\,(x, y, z, p, q, V_1, V_2) = 0,
$$

stanowiący całkę pośrednią z dwiema stałemi dowolnemi V_1 i V_2.

---

§ 10.

Powyższe rozumowanie nie stosuje się do przypadku, gdy jedna z całek (16) nie zawiera wcale pochodnych 2-go rzędu. Wtedy równanie (I) może nie mieć całki pośredniej (3), chociaż w tym przypadku D identycznie równa się zeru.

Możemy przypuścić, że Ampère miał ten przypadek na względzie, a wtedy jego metoda jest stosowalną, jeżeli ją zmodyfikować w sposób, podany w paragrafie 7-ym. Powyższa modyfikacya opiera się na wyznaczaniu jakichkolwiek trzech zmiennych z równań (I i 16), (co jest zawsze możliwe) i podstawieniu ich w równania (A), które się zamieniają na układ zwyczajnych równań różniczkowych.

Jako druga możliwość występuje przypuszczenie, że Ampère rozumiał pod całką pośrednią całkę (3):

$$\vartheta\,(x, y, z, p, q, a, b) = 0.$$

Jeżeli przytem założenie, ze pochodne r, s, t są jednorodne z całką, odnosiło się do obu argumentów α i β, to jestto niewątpliwie błąd; słusznem jest ono atoli, jeżeli Ampère miał na względzie pochodne względem argumentu, który nie odpowiada całce (3).

W ostatnim przypadku możnaby spożytkować pierwszą metodę całkowania (§ 6), ale wtedy jest niezrozumiałe, jakim sposobem równania:

$$(9') \qquad P = Q = R = \ldots = 0,$$

określające charakterystyki 1-go rzędu, mogą prowadzić do dwóch całek kształtu:

$$V_k\,(x, y, z, p, q, r, s, t) = \text{stała}, \qquad k = 1, 2,$$

zwłaszcza, że pochodne r, s, t zostały już przedtem wyrugowane.

Możemy zatem przypuścić, że Ampère, podając uogólnienie swej metody całkowania, miał przypadek nieprzywiedlny na względzie (§ 10).

Z powodu krótkości i niedokładności tekstu niepodobna nam osądzić, czy Ampère'owi należy się pierwszeństwo wyprowadzenia wzorów dla wstęg charakterystycznych n-tego rzędu; przytem metodę całkowania można, jak okazaliśmy, rozmaicie tłómaczyć.

Przypuszczamy jednak, że sposób pojmowania jej, który powyżej podaliśmy, idąc za prof. S. Lie, najbardziej odpowiada ciągłemu dążeniu w nauce do uogólniania i pogłębiania pojęć.

Wistocie, wielu nowszych autorów uważa całkowalne połączenia kształtu (16), jako uogólnienia całek pośrednich 1-go rzędu [1]).

---

§ 11.

Prof. Lie nazywa układ dwóch równań cząstkowych 2-go rzędu, mających ∞^∞ wspólnych powierzchni całkowych, **układem inwolucyjnym**.

Stosując to określenie, możemy, jako wynik poprzedniego paragrafu, powiedzieć, że zmodyfikowaną metodę Ampère'a można stosować do każdego równania 2-go rzędu, które wraz z innem tworzy układ inwolucyjny.

Jako przykład stosowania tej metody weźmy równanie [2]):

$$(26) \qquad r - t = \frac{2}{x}\,p;$$

W tym przypadku równaniem charakterystycznem jest:

$$(27) \qquad dy^2 - dx^2 = 0,$$

z którego wynikają dwa następujące:

$$(28^1) \quad \frac{dy}{dx} = -1, \qquad\qquad (28^2) \quad \frac{dy}{dx} = +1;$$

każde z równań (28) odpowiada jednemu szeregowi (A i B) charakterystyk.

Szeregowi (A) odpowiada 6 następujących równań:

---

[1]) Tak np. p. Winckler. Sitzungsberichte d. K. Akademie d. Wissenschaften, Wien, LXXXIX. 614, LXXXVIII, str. 7—74 i rozprawa Königa, nagrodzona przez król. węgierską akademię nauk (Math. Annalen, Bd. 24, str. 528). Metoda całkowania Königa polega na znajdowaniu równań, które mają z danem wspólne rozwiązanie, zależące od skończonej liczby parametrów i dlatego nie jest w bezpośrednim związku z metodami Ampère'a i p. Darboux.

[2]) Winckler, Ber. d. K. Akad. Wien, LXXXIX.

$$
(29)\quad\left\{\begin{array}{ll}
1) & \dfrac{\partial z}{\partial x} = p + q\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\,, \\[2ex]
2) & \dfrac{\partial p}{\partial x} = r + s\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\,, \\[2ex]
3) & \dfrac{\partial q}{\partial x} = s + t\,\dfrac{\partial y}{\partial x}\,, \\[2ex]
4) & \dfrac{2p}{x^2} - \dfrac{2r}{x} + \dfrac{\partial r}{\partial x} - \dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \\[2ex]
5) & \dfrac{2s}{x} \qquad + \dfrac{\partial s}{\partial x} - \dfrac{\partial t}{\partial x} = 0, \\[2ex]
6) & \dfrac{\partial y}{\partial x} = -1\,,
\end{array}\right.
$$

z których można otrzymać dwie całki:

$$
(30)\qquad \begin{array}{c} y + x = \alpha, \\[1ex] \dfrac{r + 2s + t}{x} = \varphi(\alpha), \end{array}
$$

i uwzględniając równanie (26), wyprowadzić dla zmiennych r, t, y i ich pochodnych wartości:

$$
(31)\qquad \begin{array}{c}
r = \dfrac{p}{x} - s - \dfrac{x\varphi(\alpha)}{2}\,, \\[2ex]
t = - s - \dfrac{p}{x} - \dfrac{x\varphi(\alpha)}{2}\,, \\[2ex]
y = \alpha - x,
\end{array}
$$

$$
(31')\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial x}{\partial x} = - \dfrac{p}{x^2} + \dfrac{\partial p}{d\,dx} - \dfrac{\partial s}{\partial x} - \dfrac{\varphi(\alpha)}{2} - \dfrac{x}{2}\,\varphi'(\alpha)\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial t}{\partial x} = \dfrac{\partial s}{\partial x} - \dfrac{2s}{x}\,. \\[2ex]
\dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} - 1.
\end{array}\right.
$$

Podstawiając te wartości w niezależne od (29) równania układu (B), otrzymamy szereg równań różniczkowych zwyczajnych:

$$
(32)\quad \begin{array}{ll}
1) & \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = 2, \\[2ex]
2) & \dfrac{\partial z}{\partial x} = p + q\,, \\[2ex]
3) & \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{p}{x} - \dfrac{x\varphi(\alpha)}{2}\,, \\[2ex]
4) & \dfrac{\partial q}{\partial x} = - \dfrac{p}{x} - \dfrac{x\varphi(\alpha)}{2}\,, \\[2ex]
5) & \dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{s}{x} - \dfrac{x\varphi'(\alpha)}{2}\,;
\end{array}
$$

pierwsze z równań (32^1) daje całkę:

$$
\alpha - 2x = \text{stałej} = \beta;
$$

trzecie i czwarte dają, jeżeli oznaczymy φ przez ψ''':

$$
p + q + \frac{1}{4}\,(2x\,\psi''(\alpha) - \psi''(\alpha)) = C_1\,,
$$

wreszcie uwzględniając (32^2), otrzymamy:

$$
(33)\qquad z = \left(C_2 + \frac{1}{4}\,\psi(\alpha)\right) - x\left(- C_1 + \frac{1}{4}\,x\psi'(\alpha)\right),
$$

przyczem C_1 i C_2 trzeba uważać za funkcye argumentu β.

Kładąc:

$$
\begin{array}{c} 4C_2 = \chi(\beta), \\ 4C_1 = \chi_1(\beta) \end{array}
$$

i podstawiając w dane równanie (26), otrzymamy dla funkcyj dowolnych χ, χ_1, warunek:

$$
\chi_1(\beta) = \chi'(\beta),
$$

wskutek czego całka ogólna (33) przybiera postać:

$$
(34)\qquad \begin{array}{c}
4z = (\chi(\beta) + \psi(\alpha)) - x\,(\psi'(\alpha) - \chi'(\beta)), \\
x + y = \alpha. \\
y - x = \beta.
\end{array}
$$

---

§ 12.

Metoda całkowania p. Darboux.

W niniejszym rozdziale postaramy się w krótkich zarysach przedstawić punkty styczne teoryi całkowania, wynalezionej przez p. Darboux[1]), z poprzednią. Autor rozwija ją tylko dla równań cząstkowych 2-go rzędu, zaznacza jednak, że stosuje się ona i do równań wyższych rzędów. Z początku wprowadza Darboux, podobnie jak Ampère, nowe zmienne niezależne, określone równaniami:

$$\alpha = \varphi(x, y), \quad x = x,$$

następnie rozwija równania (15, § 7), którym czynią zadość wstęgi charakterystyczne 2-go rzędu, co jak wykazaliśmy (§ 7) z wielkiem prawdopodobieństwem należy przypisać Ampère'owi.

Jeżeli powyższe sześć równań szeregu A (lub B) nie dają połączeń całkowalnych, należy, według Darboux, przyłączyć do nich pochodne danego równania (I) wyższych rzędów, przyczem (jak zauważył Darboux) liczba otrzymanych w ten sposób równań niezależnych wzrasta o jedność wraz z rzędem pochodnych. Do utworzenia równań wstęg charakterystycznych n-tego rzędu służy szereg równań:

$$C \, . \, z_{0,n} + S_{n-2}, \qquad (14, \S\, 7), \tag{1}$$

oraz wzorów:

$$dz_{i,k-1} = z_{i+1,k}\, dx + z_{i,k}\, dy, \qquad i+k \leqq n. \tag{2}$$

Z rozważania równań (1) i (2) wyprowadza Darboux[2]) sposób całkowania, który stosuje do przypadku, kiedy (1) i (2), t. j. równania wstęg charakterystycznych szeregu (A) lub (B), posiadają dwie całki:

$$U_i(x, y, z, \ldots, z_{k,l}) = \text{stała}, \qquad {k+l \leqq n, \atop i=1,2.} \tag{3}$$

Podobnie jak w przypadku całek drugiego rzędu można okazać, że stałe dowolne (C_1, C_2) są funkcyami argumentu α (lub β), t. j., że:

$$U_1 = \psi_1(\alpha), \quad U_2 = \psi_2(\alpha). \tag{4}$$

Rugując α z tych ostatnich równań, otrzymamy:

1) Darboux. Annales de l'Éc. normale, 1870.
2) Darboux, etc., § III.

$$U_2 = \psi(U_1). \tag{4'}$$

przyczem okazuje się, że to ostatnie równanie dla każdej poszczególnej formy funkcyi ψ ma ∞^∞ z danem równaniem (I) wspólnych powierzchni całkowych.

W powyższym przypadku możemy zastosować uogólnioną metodę Ampère'a (§ 7), mianowicie wystarcza rozwiązać równania (4 i (I)), należące do szeregu (A) charakterystyk według trzech jakichkolwiek zmiennych i ich wartości, podstawić w równania wstęg charakterystycznych drugiego szeregu (B).

Z powyższego wynika, że do stosowania metody Ampère'a wystarcza znajomość dwóch całek, należących do jednego szeregu charakterystyk.

Tymczasem Darboux[1]) stosuje swą metodę tylko wtedy, jeżeli wiadome są cztery całki, należące po dwie do każdego szeregu.

Jeżeli równanie charakterystyczne:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\, dy^2 + \frac{\partial f}{\partial s}\, dy\, dx + \frac{\partial f}{\partial t}\, dx^2 = 0, \tag{1'}$$

jest nieprzywiedlne, t. j. jeżeli wyróżnik:

$$\delta = \frac{\partial f^2}{\partial s} - 4\,\frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial f}{\partial t}\,, \tag{5}$$

nie jest zupełnym kwadratem, wtedy równania obu rzędów wstęg różnią się tylko znakiem wielkości, zależnych od δ (5), a zatem z dwóch całek szeregu (A) możemy bezpośrednio otrzymać całki szeregu (B), zmieniając znak tych wielkości.

Jeżeli zaś równanie (1') ma pierwiastki wymierne, natenczas całki drugiego układu (B) muszą być osobno znajdowane.

Widzimy więc, że we względzie zużytkowania całek układów charakterystyk, zmodyfikowana metoda Ampère'a przewyższa metodę p. Darboux.

Wracając do tej ostatniej, przypuśćmy, że obu układom charakterystyk tego samego rzędu, czynią zadość równania:

$$\begin{aligned} V_1 &= a, \quad (\text{ukł. } A), \\ V_2 &= b, \quad (\text{ukł. } B), \end{aligned} \tag{6}$$

z których każde zawiera funkcyę dowolną.

Jeżeli wyznaczymy formę tych funkcyj, to okazuje się, że układ:

1) Darboux, etc., § V.

(I) $f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$, (6′) $V_1{}^0=a,\ V_2{}^0=b$,

jest nieograniczenie całkowalny i ma wogóle ∞^4 powierzchni całkowych[1]). Naprzykład, jeżeli równania (6) są 2-go rzędu, wtedy można z (I, 6′) wyznaczyć pochodne r, s, t i podstawiając ich wartości w równania:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

zamienić je na układ całkowalny.

---

§ 13.

Darboux okazuje, że wszystkie równania cząstkowe wyższego rzędu $U=a$, które z danem (I) mają wspólne rozwiązanie, zawierające funkcyę dowolną (lub też geometrycznie, które z danem mają ∞^∞ wspólnych powierzchni całkowych), można otrzymać jako wspólne rozwiązanie 2-ch jednorodnych cząstkowych równań 1-go rzędu.

Otóż można łatwo dowieść, że wszystkie te równania są całkami układów (1, 2) równań charakterystyk n-tego rzędu.

Darboux[2]) kończy swą pracę następującą uwagą: powyższe metody dają zawsze możność zcałkowania danego równania cząstkowego, jeżeli jego całka należy do 1-ej klasy Ampère'a.

By uzasadnić to twierdzenie, pokażemy, w jaki sposób, mając trzy równania:

(8) $$R_k(x,y,z,a,\beta,\varphi(a),\varphi'(a),\ldots,\psi(\beta),\psi'(\beta),\ldots)=0, \qquad k=1,2,3,$$

przedstawiające całkę ogólną danego równania (I), można zawsze utworzyć związki:

$$V=0,$$

które posiadają z danem ∞^∞ wspólnych powierzchni całkowych.

---

1) S. Lie. Prace mat.-fiz., str. 80.
2) Darboux, § 4

Ponieważ rezultaty różniczkowania równań (8) zawierają pochodne argumentów a i β:

$$\frac{\partial a}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial\beta}{\partial x}\ \frac{\partial\beta}{\partial y}\ \ldots,$$

w pierwszej potędze, zatem pochodne owe mogą być wyrugowane i wtedy zostaje przynajmniej:

(8″) $$N=\frac{n+1}{2}.$$

równań niezależnych między zmiennemi:

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \ldots,\ a,\ \beta.$$

Przypuśćmy, że pochodne funkcyi z są jednorodne (§ 2) z całką ogólną do rzędu l_1 włącznie względem argumentu a (do rzędu l_2 względem argumentu β), oraz, że całka ogólna zawiera g_1 funkcyj dowolnych $\varphi,\varphi',\ldots,\varphi^{(g_1)}$ argumentu a i g_2 funkcyj $\psi,\psi',\ldots,\psi^{(g_2)}$ argumentu β, przyczem brakujące w tym szeregu pochodne funkcyj ψ i φ winny być również liczone.

Wskutek tego powyższe N równań zawierają $n-l_1$ (lub $n-l_2$) nowych funkcyj argumentu a (lub β), czyli razem:

$$N_1 = n - l_1 + g_1 + 1, \text{ zależnych od } a \text{ i}$$
$$N_2 = n - l_2 + g_2 + 1, \quad ,, \quad ,, \quad \beta$$

wartości.

Możemy zatem utworzyć z pomocą rugowania tych ostatnich przynajmniej $N-N_1$ (lub $N-N_2$) równań, nie zawierających argumentu a (lub β) i zależnych od tegoż wielkości.

Jeżeli odliczymy układ:

$$N_3=\frac{n(n-1)}{2},$$

równań otrzymanych, przez różniczkowanie danego równania (I), które nie dają nowych zależności między zmiennemi:

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ z_{i,k},$$

otrzymamy przynajmniej:

$$C=n-(g_1+l_1-2),$$

równań, nie zawierających argumentu a i należących do niego funkcyj.

Z równań tych przynajmniej jedno zawiera dowolne funkcye argumentu β, gdyż w przeciwnym razie musiałaby się wzrastająca z rzędem n ilość dowolnych funkcyj sama z siebie rugować. Stosując powyższy sposób postępowania do całki ogólnej (34) § 11 i rugując wszystkie pochodne:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x},\ \frac{\partial\alpha}{\partial y},\ \frac{\partial\beta}{\partial x},\ \frac{\partial\beta}{\partial y},\ldots,$$

otrzymujemy następujące 6 równań:

$$\begin{aligned}
4z &= \chi(\beta)+\psi(\alpha)-x\,(\psi'(\alpha)-\chi(\beta)),\\
4p &= -\,x\,(\psi''(\alpha)+\chi''(\beta)),\\
4q &= \chi'(\beta)+\psi'(\alpha)-x\,(\psi''(\alpha)-\chi''(\beta)),\\
4r &= -\,(\psi''(\alpha)+\chi''(\beta))-x\,(\psi'''(\alpha)-\chi'''(\beta)),\\
4s &= -\,x\,(\psi'''(\alpha)+\chi'''(\beta)),\\
4t &= \chi''(\beta)+\psi''(\alpha)-x\,(\psi'''(\alpha)-\chi'''(\beta)).
\end{aligned}$$

Rugując funkcye $\psi, \psi', \psi'', \psi'''$, otrzymujemy równania, jak np.:

$$\frac{r+t-2s}{x}=\chi'''(\beta),$$

zawierające tylko argument β.

Przypuśćmy, że jako szczególny przypadek w powyższy sposób otrzymaliśmy 2 równania:

$$\begin{aligned}
\alpha &= U_1\,(x, y, z, \ldots, z_{i,k}),\\
\varphi_\alpha &= U_2\,(x, y, z, \ldots, z_{i,k})
\end{aligned} \tag{9}$$

tego samego rzędu w pochodnych $z_{i,k}$.

Otóż łatwo okazać, że wtedy, podobnie jak w wypadku § 7, pewien wyznacznik funkcyjny musi równać się zeru. W tym celu, różniczkując dane równanie (I), $n-2$ razy, utwórzmy szereg $n-1$ niezależnych równań n-tego rzędu.

$$F^{(k)}=0, \qquad k=1,\ldots,\overline{n-1}. \tag{10}$$

Wszystkie te równania czynią zadość wszystkim powierzchniom całkowym danego równania (I) i ich równania charakterystyczne:

$$\frac{\partial F^{(k)}}{\partial z_{n,0}}\,u^n+\frac{\partial F^{(k)}}{\partial z_{n-1,1}}\,u^{n-1}+\ldots+\frac{\partial F^{(k)}}{\partial z_{0,n}}=0, \qquad u=-\frac{dy}{dx}, \tag{10'}$$

powinny mieć według p. D a r b o u x z równaniami:

$$\frac{\partial U_i}{\partial z_{n,0}}\,u^n+\ldots+\frac{\partial U_i}{\partial z_{0,n}}=0, \qquad i=1,2, \tag{9'}$$

wspólny pierwiastek $u=u_1$.

Stąd zaś wynika jako warunek konieczny dla układu $n+1$ równań 1-go stopnia z $n+1$ niewiadomemi:

$$u^n,\ u^{n-1},\ldots,1,$$

$$D\equiv\frac{\partial\,(F^{(1)}, F^{(2)},\ldots,F^{(n-1)}, U_1, U_2)}{\partial\,(z_{n,0},\ldots,z_{0,n})}=0, \tag{11}$$

z czego można, podobnie jak w przypadku dwóch całek drugiego rzędu (§ 8) wywnioskować, że charakterystycznym wstęgom $n+1$-go rzędu czyni zadość całka:

$$\Phi\,(x, y, z, p, q,\ldots,z_{i,k},\ldots,U_1, U_2)=0, \qquad i+k=n-1. \tag{11'}$$

Wreszcie można łatwo okazać, że z ostatniej całki odwrotnie wynikają zawsze dwa równania kształtu (9).

Jeżeli zaś równania (4) nie są równego rzędu, wtedy nie dają się one sprowadzić do jednej całki pośredniej.

Rezultaty, otrzymane przez p. D a r b o u x w jego pracy są następujące:

1) Równania różniczkowe wstęg charakterystycznych n-tego rzędu tworzą u k ł a d, zawierający liczbę funkcyj niewiadomych większą o jedność, niż wynosi liczba równań układu.

2) Wszystkie równania $V=a$, które z danem mają ∞^∞ wspólnych powierzchni całkowych, można otrzymać jako całki poprzedniego układu, lub jako wspólne rozwiązanie 2-ch równań cząstkowych 1-go rzędu i 2-go stopnia.

3) Wspólne powierzchnie całkowe otrzymują się całkując układ równań różniczkowych zwyczajnych.

4) Dla otrzymania całki ogólnej konieczną jest znajomość dwóch równań $V=a$ z funkcyą dowolną, z których każde należy do innego szeregu charakterystyk.

Obie metody znajdowania równań $V=a$ według p. D a r b o u x[1])

[1]) D a r b o u x, § 5.

stanowią uogólnienie metod, stosowanych w teoryi równań cząstkowych 1-go rzędu. Pierwsza z nich, polegająca na wprowadzeniu nowych zmiennych x, α była stosowana w r. 1819 przez Cauchy'ego. Tymczasem Cauchy użył tu pomysłu Ampère'a i z niniejszego referatu można również wnioskować o pewnym wpływie Ampère'a na pracę p. Darboux.

Co zaś do drugiej metody, która w teoryi równań cząstkowych 1-go rzędu była wprowadzona przez Jacobi'ego (Darboux § 5), to nie udało się nam odszukać jej śladów u Ampère'a.

Stanowi ona z początku komplikacyę danego zagadnienia, sprowadzając je do rozwiązania 2 równań różniczkowych cząstkowych 2-go stopnia 1-go rzędu, gdy tymczasem równania, osiągnięte pierwszą metodą, są 1-go stopnia i dają się łatwo sprowadzić do poprzednich.

O PEWNYM SPOSOBIE PRZEDSTAWIENIA WSPÓLNYCH MIEJSC ZEROWYCH DWÓCH RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH $f(x, y) = 0, \; g(x, y) = 0$.

NAPISAŁ

JAN ZAŁUSKI.

Przy szukaniu wszystkich wspólnych miejsc zerowych danych dwu równań algebraicznych $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$ postępuje się zwykle w ten sposób, że naprzód z rugownika $R(f, g) = 0$, powstającego z eliminacyi zmiennej x lub y, oznacza się wspólne miejsca, leżące w skończoności, a potem dopiero z wyrazów najwyższego wymiaru funkcyj f, g oznacza się miejsca wspólne, leżące w nieskończoności (o jednej przynajmniej ze zmiennych $|x|$, $|y|$ nieskończonej). Zadaniem poniżej przeprowadzonych poszukiwań jest utworzyć metodę, na podstawie której to odróżnienie byłoby zbytecznem, a któraby przedewszystkiem dozwoliła odrazu wyznaczyć stosunek $\frac{x}{y}$ spółrzędnych miejsc wspólnych, leżących w skończoności lub nieskończoności.

Równania algebraiczne zmiennych x, y mają postać:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \bar{v}_m + \bar{v}_{m-1} + \bar{v}_{m-2} + \ldots + \bar{v}_1 + \bar{v}_0 = 0, \\
g(x, y) &= \bar{w}_n + \bar{w}_{n-1} + \bar{w}_{n-2} + \ldots + \bar{w}_1 + \bar{w}_0 = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$