stanowią uogólnienie metod, stosowanych w teoryi równań cząstkowych 1-go rzędu. Pierwsza z nich, polegająca na wprowadzeniu nowych zmiennych x, α była stosowana w r. 1819 przez Cauchy'ego. Tymczasem Cauchy użył tu pomysłu Ampère'a i z niniejszego referatu można również wnioskować o pewnym wpływie Ampère'a na pracę p. Darboux.

Co zaś do drugiej metody, która w teoryi równań cząstkowych 1-go rzędu była wprowadzona przez Jacobi'ego (Darboux § 5), to nie udało się nam odszukać jej śladów u Ampère'a.

Stanowi ona z początku komplikacyę danego zagadnienia, sprowadzając je do rozwiązania **2** równań różniczkowych cząstkowych 2-go stopnia 1-go rzędu, gdy tymczasem równania, osiągnięte pierwszą metodą, są 1-go stopnia i dają się łatwo sprowadzić do poprzednich.

O PEWNYM SPOSOBIE PRZEDSTAWIENIA WSPÓLNYCH MIEJSC ZEROWYCH DWÓCH RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$.

NAPISAŁ

JAN ZAŁUSKI.

Przy szukaniu wszystkich wspólnych miejsc zerowych danych dwu równań algebraicznych $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$ postępuje się zwykle w ten sposób, że naprzód z rugownika $R(f, g) = 0$, powstającego z eliminacyi zmiennej x lub y, oznacza się wspólne miejsca, leżące w skończoności, a potem dopiero z wyrazów najwyższego wymiaru funkcyj f, g oznacza się miejsca wspólne, leżące w nieskończoności (o jednej przynajmniej ze zmiennych $|x|$, $|y|$ nieskończonej). Zadaniem poniżej przeprowadzonych poszukiwań jest utworzyć metodę, na podstawie której to odróżnienie byłoby zbytecznem, a któraby przedewszystkiem dozwoliła odrazu wyznaczyć stosunek $\frac{x}{y}$ spółrzędnych miejsc wspólnych, leżących w skończoności lub nieskończoności.

Równania algebraiczne zmiennych x, y mają postać:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
f(x, y) &= \bar{v}_m + \bar{v}_{m-1} + \bar{v}_{m-2} + \ldots + \bar{v}_1 + \bar{v}_0 = 0,\\
g(x, y) &= \bar{w}_n + \bar{w}_{n-1} + \bar{w}_{n-2} + \ldots + \bar{w}_1 + \bar{w}_0 = 0.
\end{aligned}
$$

gdzie:

$$\bar{v}_\alpha = a_{\alpha 0}\, x^\alpha + a_{\alpha-1,1}\, x^{\alpha-1} y + a_{\alpha-2,2}\, x^{\alpha-2} y^2 + \ldots + a_{1,\alpha-1}\, x y^{\alpha-1} + a_{0,\alpha}\, y^\alpha,$$
$$\bar{w}_\alpha = b_{\alpha 0}\, x^\alpha + b_{\alpha-1,1}\, x^{\alpha-1} y + b_{\alpha-2,2}\, x^{\alpha-2} y^2 + \ldots + b_{1,\alpha-1}\, x y^{\alpha-1} + b_{0,\alpha}\, y^\alpha,$$

przyczem niektóre $a_{\alpha,\gamma}$, $b_{\alpha,\gamma}$ mogą być zerami. Funkcya $f(x, y)$ jest więc wymiaru m, funkcya $g(x, y)$ wymiaru n.

Połóżmy:

$$x = \varrho\, t_1, \qquad (2)$$
$$y = \varrho\, t_2,$$

gdzie ϱ jest ilością stałą, dowolną, różną od zera, a t_1, t_2 nowemi zmiennemi. Wtedy $f = 0$, $g = 0$ będą miały postać:

$$(3) \qquad \begin{aligned} f(\varrho t_1, t_2) &= v_m \varrho^m + v_{m-1} \varrho^{m-1} + \ldots + v_1 \varrho + v_0 = 0, \\ g(\varrho t_1, t_2) &= w_n \varrho^n + w_{n-1} \varrho^{n-1} + \ldots + w_1 \varrho + w_0 = 0, \end{aligned}$$

gdzie:

$$v_\alpha = a_{\alpha,0}\, t_1^\alpha + a_{\alpha-1,1}\, t_1^\alpha\, t_2 + \ldots + a_{1,\alpha-1}\, t_1\, t_2^{\alpha-1} + a_{0,\alpha}\, t_2^\alpha,$$
$$w_\alpha = b_{\alpha,0}\, t_1^\alpha + b_{\alpha-1,1}\, t_1^\alpha\, t_2 + \ldots + b_{1,\alpha-1}\, t_1\, t_2^{\alpha-1} + b_{0,\alpha}\, t_2^\alpha.$$

Spółczynniki zatem v_α, w_α są jednorodnemi funkcyami zmiennych t_1, t_2 stopnia α-go.

Uważając równania (3) za równania o samej jednej niewiadomej ϱ, dostaniemy jako warunek aby istniały wspólne pierwiastki ϱ, związek:

$$(4) \qquad R(f,g) = \begin{vmatrix} v_m, & v_{m-1}, & v_{m-2}, & \ldots, & v_1, & v_0, & \overbrace{0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0}^{n-1} \\ 0, & v_m, & v_{m-1}, & \ldots, & v_2, & v_1, & v_0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{0, \; 0, \; 0, \; \ldots, \; 0,}_{n-1} & v_m, & v_{m-1}, & \ldots, & & v_1, & v_0 \\ w_n, & w_{n-1}, & w_{n-2}, & \ldots, & w_1, & w_0, & \overbrace{0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0}^{m-1} \\ 0, & w_n, & w_{n-1}, & \ldots, & w_2, & w_1, & w_0, \; 0, \; \ldots, \; 0, \; 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underbrace{0, \; 0, \; 0, \; \ldots, \; 0,}_{m-1} & w_n, & w_{n-1}, & \ldots, & & w_1, & w_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wyznacznik $R(f, g)$ nazywa się, jak wiadomo, rugownikiem.

Przedewszystkiem udowodnimy, że $R(f, g)$ jest funkcyą jednorodną wymiaru koniecznie $m \,.\, n$. Aby tego dowieść, obliczymy stopień wyznacznika postaci ogólniejszej, niż rugownik $R(f, g)$, a mianowicie:

$$H = \begin{vmatrix} v_m, & v_{m-1}, & v_{m-2}, & \ldots, & v_1, & v_0, & v_{-1}, & v_{-2}, & \ldots, & v_{-n+1} \\ v_{m+1}, & v_m, & v_{m-1}, & \ldots, & v_2, & v_1, & v_0, & v_{-1}, & \ldots, & v_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{m+n-1}, & v_{m+n-2}, & v_{m+n-3}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_1, & v_0 \\ w_n, & w_{n-1}, & w_{n-2}, & \ldots, & w_1, & w_0, & w_{-1}, & \ldots & \ldots & w_{-m+1} \\ w_{n+1}, & w_n, & w_{n-1}, & \ldots, & w_2, & w_1, & w_0, & \ldots & \ldots, & w_{-m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{n+m-1}, & w_{n+m-2}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & w_1, & w_0 \end{vmatrix}$$

gdzie v_l i w_p w razie $l > 0$, $p > 0$ mają takie samo znaczenie, jak w rugowniku, a elementy z wskaźnikami ujemnemi oznaczają dowolne funkcye jednorodne o zmiennych t_1^{-1}, t^{-1}. Z wyznacznika H utworzymy dwa podłużne schematy:

$$\text{a)} \qquad \begin{pmatrix} v_m, & v_{m-1}, & \ldots, & v_1, & v_0, & v_{-1}, & v_{-2}, & \ldots, & v_{-n+1} \\ v_{m+1}, & v_m, & \ldots, & v_2, & v_1, & v_0, & v_{-1}, & \ldots, & v_{-n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{m+n-1}, & v_{m+n-2}, & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_1, & v_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \qquad \begin{pmatrix} w_n, & w_{n-1}, & \ldots, & w_1, & w_0, & w_{-1}, & \ldots, & w_{-m+1} \\ w_{n+1}, & w_n, & \ldots, & w_2, & w_1, & w_0, & \ldots, & w_{-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{n+m-1}, & w_{n+m-2}, & \cdot & \cdot & \cdot & w_2, & w_1, & w_0 \end{pmatrix}.$$

Pierwszy z nich a) zawiera n, a drugi b) m wierszy.

Używając a), b) do obliczenia wyznacznika H sposobem Vanderm o n d e'a, będziemy mieli przedewszystkiem do czynienia z wyznacznikiem, utworzonym z pierwszych n pionów schematu a), tj.:

$$(5)\qquad K_a = \begin{vmatrix} v_m, & v_{m-1}, & v_{m-2}, & \ldots, & v_{m-(n-1)} \\ v_{m+1}, & v_m, & v_{m-1}, & \ldots, & v_{m-(n-2)} \\ v_{m+2}, & v_{m+1}, & v_m, & \ldots, & v_{m-(n-3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{m+n-1}, & v_{m+n-2}, & v_{m+n-3}, & \ldots, & v_m \end{vmatrix},$$

zbadamy przeto niektóre jego własności.

Zapytajmy, co się stanie ze stopniem wyznacznika K_a, jeżeli stopień elementów niektórych pionów, lub wierszy obniżymy i tak np. w pionie r-tym o k_r, w p-tym o k_p, w s-tym o k_s i t. d. Wiemy, że wyznacznik rozwinięty jest sumą, a w każdy dodajnik tej sumy wchodzi jako czynnik jeden i tylko jeden element jakiegoś pionu lub wiersza. Jeżeli więc obniżamy stopień wszystkich elementów jakiegoś pionu lub wiersza, to przez to obniżamy zarazem o tę samą ilość stopień każdego dodajnika, a tem samem wyznacznika. Stąd więc przez obniżenie stopnia pionów r-tego, p-tego, s-tego obniżamy stopień wyznacznika o $k_r + k_p + k_s + \ldots$ jednostek.

Rozwińmy wyznacznik K_a według pierwszego pionu i zbadajmy jakiego on jest stopnia i jaką funkcyą ze względu na t_1, t_2? Rozwinięcie przedstawia się w formie:

$$(6)\qquad K_a = v_m A_m + v_{m-1} A_{m-1} + v_{m+2} A_{m-2} + \ldots + v_{m+n-1} A_{m-n+1},$$

gdzie A są podwyznacznikami należącemi do odpowiednich elementów pionu pierwszego. Z porównania tych podwyznaczników ze sobą wynika, że każdy z podwyznaczników $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots$ da się utworzyć z A_m przez stosowne obniżenie wskaźnika w którymś z wierszy. Każdy zatem podwyznacznik $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots$ jest niższego stopnia od stopnia podwyznacznika A_m. Oznaczywszy stopień podwyznacznika A_m przez k, wnosimy odrazu, że podwyznaczniki $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots$ będą odpowiednio stopni $k-1, k-2, \ldots$, a że w rozwiniętym wyznaczniku K_a (6) są one mnożnikami funkcyj $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots$, przeto stopień całego wyznacznika jest taki, jak stopień dodajnika $v_m A_m$. Aby więc znać stopień wyznacznika, wystarcza poznać stopień iloczynu $v_m A_m$.

A_m jest wyznacznikiem, a ten rozwinięty według pierwszego swego pionu przedstawia się w formie:

$$A_m = v_m A'_m + v_{m+1} A'_{m-1} + \ldots + v_{m+n-2} A'_{m-n+2}.$$

Z porównania podwyznaczników drugiego rzędu $A'_{m-1}, A'_{m-2}, \ldots$, w skład A_m wchodzących, wynika, że co do stopnia zachowują się one tak samo, jak pod-

wyznaczniki pierwszego rzędu $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots$, a więc stopień iloczynów $v_{m+1} A'_{m+1}, v_{m+2} A'_{m+2}, \ldots$, jest taki, jak stopień iloczynu pierwszego $v_m A'_m$. Stąd stopień wyznacznika K_a będzie taki, jak stopień iloczynu $v^2_m A'_m$. Postępując tak dalej dojdziemy, że stopień wszystkich dodajników rozwinięcia (6) będzie taki, jak stopień iloczynu wyrazów przekątni głównej w (5), t. j. v^n_m.

Wyznacznik K_a jest więc w zmiennych t_1, t_2 funkcyą jednorodną stopnia $m \, . \, n$.

Przez obniżanie w (5) stopnia wszystkich elementów w którymkolwiek z pionów, lub wierszy o tę samą ilość w każdym pionie lub wierszu, obniżamy tem samem o tęż ilość stopień każdego dodajnika, a więc przez obniżanie takie wyznacznik nie przestanie być—jak przedtem—funkcyą jednorodną.

Zwróćmy teraz uwagę na wyznaczniki K'_a, jakie należy utworzyć z schematu a), aby łącząc je z dopełniającemi wyznacznikami schematu b), obliczyć potem (sposobem V a n d e r m o n d e'a) wyznacznik H. Wszystkie one dadzą się utworzyć z wyznacznika K_a przez stosowne obniżenie stopni wszystkich elementów w pewnych pionach. Wszystkie zatem wyznaczniki, utworzone z K_a, będą stopnia niższego od stopnia K_a, a w zmiennych t_1, t_2 będą jednorodnemi funkcyami. Przytem zaznaczyć potrzeba, że funkcyę uważać będziemy za jednorodną, jeżeli w niej znajdować się będą wyrazy postaci $l \, . \, t_1{}^\mu, t_2{}^\nu$ dla $\mu \gtreqless 0$, dla $\nu \gtreqless 0$, byle tylko $\mu + \nu = \lambda$.

To cośmy powiedzieli o wyznacznikach schematu a) stosuje się w zupełności do dopełniających wyznaczników K'_b schematu b) — te bowiem są tak samo jak poprzednie zbudowane. Stąd wynika, że wszystkie iloczyny $K'_a \, . \, K'_b$ będą jednorodnemi funkcyami, a czy i wyznacznik będzie takim, rozstrzygniemy w ten sposób. Obliczymy przedewszystkiem stopień iloczynu, utworzonego z K_a i dopełniającego wyznacznika K_b z schematu b), utworzonego z m ostatnich pionów. Stopień wyznacznika K_a równa się, jak wiemy, $m \, . \, n = \lambda$, a drugiego, który ma postać:

$$K_b = \begin{vmatrix} w_0, & w_{-1}, & w_{-2}, & \ldots, & w_{-m+1} \\ w_1, & w_0, & w_{-1}, & \ldots, & w_{-m+2} \\ w_2, & w_1, & w_0, & \ldots, & w_{-m+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w_{-m\cdot 1}, & w_{-m-2}, & w_{-m-3}, & \ldots, & w_0 \end{vmatrix}$$

jest taki, jak iloczynu wyrazów na przekątni głównej, t. j. $v_0{}^m$. Stopień ten jest 0. Stopień zatem iloczynu $K_a \, . \, K_b$ jest $mn + 0 = m \, . \, n = \lambda$.

Dalsze iloczyny wyznacznika H tworzyć będziemy z iloczynu $K_a \, . \, K_b$ przez obniżanie stopnia w pionach wyznacznika K_a. Ponieważ zaś do wyznaczników K_a mogą wchodzić tylko piony, których w K_b nie ma, przeto te piony, które w K_a przez obniżenie zatracamy, muszą wejść do K_b w miejsce tych, które w K_a otrzymaliśmy. O ile więc obniżymy stopień wyznacznika K_a, o tyle podwyższymy stopień wyznacznika K_b. Stąd wynika, że iloczyny w ten sposób tworzone (a takie tylko wchodzą w wyznacznik H) są tego samego stopnia co iloczyn $K_a \,.\, K_b$. Wyznacznik więc H jest co do zmiennych t_1, t_2 funkcyą jednorodną o charakterze już wprzódy określonym wymiaru λ.

Wyznacznik H pozostanie funkcyą jednorodną, jeżeli nawet niektóre v_a, w_a będą zerami. Wtedy bowiem dodajniki, zawierające te v_a, w_a odpadną, a pozostałych stopień się nie zmieni.

Wiedząc to, połóżmy w wyznaczniku H za wszystkie v_r, w których $r > m$ i $r < 0$ zera, to schodzimy w takim razie do rugownika $R(f, g) = 0$. Rugownik zatem jest co do zmiennych t_1, t_2 funkcyą jednorodną i już całkowitą wymiaru λ. Z tego wnosimy, że istnieje λ par wartości t_1, t_2, spełniających warunek (4), t. j. $R(f, g) = 0$, a zatem dwa równania $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ odpowiednio wymiaru m, n, posiadają $\lambda = m \,.\, n$ wspólnych miejsc zerowych.

Lecz rugownik $R(f, g) = 0$ daje nam możność oznaczenia jakości wszystkich wspólnych miejsc zerowych. Połóżmy bowiem:

$$(7) \qquad R(f, g) = (\beta_1 t_1 - \alpha_1 t_2), (\beta_2 t_1 - \alpha_2 t_2), \ldots, (\beta_\lambda t_1 - \alpha_\lambda t_2) = 0,$$

gdzie niektóre z owych liniowych czynników mogą być równe sobie. Przyjmijmy, że p-ty czynnik:

$$\beta_p t_1 - \alpha_p t_2 = 0,$$

powtarza się k razy, to dostajemy z niego stosunek:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\alpha_p}{\beta_p}.$$

Połóżmyż wprost $t_1 = \alpha_p$, $t_2 = \beta_p$ i wstawmy w równania (2), to otrzymamy pierwiastki wspólne $\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ (w ilości k); mieć więc będziemy:

$$x = \varrho_\lambda \alpha_p,$$
$$y = \varrho_\lambda \beta_p, \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, k,$$

jako wspólne miejsca zerowe danych funkcyj f, g (lub równań $f = 0$, $g = 0$) o stosunku $\frac{x}{y} = \frac{\alpha_p}{\beta_p}$, bez różnicy czy do $t_1 = \alpha_p$, $t_2 = \beta_p$ należą ϱ skończone, czy $\varrho = \infty$. Przytem w razie skończonych ϱ_λ nie jest wykluczone, że niektóre lub wszystkie, są sobie równe.

Co się tyczy $\varrho = \infty$, to istnienie tych miejsc wywnioskujemy stąd, że się wtedy czynniki, zawarte w $R(f, g)$, zawierają równocześnie i w spółczynnikach potęg ϱ^m, ϱ^n równań (3). Jeżeli bowiem tak jest, to dla takich $t_1 = \alpha_p$, $t_2 = \beta_p$ mamy wprost $\varrho = \infty$. W ten więc sposób otrzymujemy wspólne miejsca zerowe, leżące w nieskończoności. Charakteryzują się one stosunkiem $\left.\frac{x}{y}\right|_\infty = \frac{\alpha_p}{\beta_p}$, gdzie $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$ może być skończone, zerem, lub wreszcie nieskończonością.

*

* *

Równania postaci:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + l_1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + l_2 = 0, \end{aligned}$$

za użyciem podstawienia:

$$x = \varrho t_1,$$
$$y = \varrho t_2,$$

będą miały postać:

$$(2) \qquad \begin{aligned} (t_1^2 + t_2^2)\varrho^2 - 2(a_1 t_1 + b_1 t_2)\varrho + l_1 = 0, \\ (t_1^2 + t_2^2)\varrho^2 - 2(a_2 t_1 + b_2 t_2)\varrho + l_2 = 0. \end{aligned}$$

Rugownik ze względu na wspólne pierwiastki ϱ_1 równań (2) będzie miał postać:

$$(3) \qquad R(f, g) = \begin{vmatrix} t_1^2 + t_2^2, & -2(a_1 t_1 + b_1 t_2), & l_1, & 0 \\ 0, & t_1^2 + t_2^2, & -2(a_1 t_1 + b_1 t_2), & l_1 \\ t_1^2 + t_2^2, & -2(a_2 t_1 + b_2 t_2), & l_2, & 0 \\ 0, & t_1^2 + t_2^2, & -2(a_2 t_1 + b_2 t_2), & l_2 \end{vmatrix} = 0,$$

a rozwinięty przedstawi się w formie:

$$(4) \qquad R(f, g) = (t_1^2 + t_2^2), (h_1 t_1^2 + h_2 t_1 t_2 + h_3 t_2^2).$$

Z wyrażenia (4) wnosimy, że równania $f = 0$, $g = 0$ mają cztery wspólne miejsca zerowe. Ponieważ zaś czyniki rugownika $(t_1 + i t_2)$, $(t_1 - i t_2)$

są także czynnikami potęg ϱ^2 równań (2) przeto mamy dwa miejsca zerowe, leżące w nieskończoności o stosunkach $\left.\frac{x}{y}\right|_\infty = i$, $\left.\frac{x}{y}\right|_\infty = -i$.

Gdyby w równaniach (1) było $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $l_1 \neq l_2$, to:

$$R(f, g) = (t_1^2 + t_2^2)^2,$$

a więc mielibyśmy 4 miejsca w nieskończoności, z których dwa są o stosunku $\left.\frac{x}{y}\right|_\infty = +i$, dwa zaś o stosunku $\left.\frac{x}{y}\right|_\infty = -i$.

W każdym innym przypadku mamy dwa miejsca w nieskończoności, a dwa w skończoności leżące i stosownie do tego, czy:

$$h_2^2 - h_1 h_3 > 0,$$
$$h_2^2 - h_1 h_3 = 0,$$
$$h_2^2 - h_1 h_3 < 0,$$

są albo rzeczywiste różne, lub powtarzające się, albo urojone.

Używszy w równaniach postaci:

$$f = \frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 = 0,$$

(1′)

$$g = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} - 1 = 0,$$

gdzie $b > c$, podstawienia $x = \varrho\, t_1$, $y = \varrho\, t_2$ i uporządkowawszy według potęg ϱ, otrzymamy równania:

$$\frac{t_1^2 + t_2^2}{a^2}\varrho^2 - 1 = 0,$$

(2′)

$$\left(\frac{t_1^2}{b^2} + \frac{t_2^2}{c^2}\right)\varrho^2 - 1 = 0.$$

Rugownik tych równań rozwinięty ma postać:

$$R(f, g) = \left[t_1^2\,\frac{b^2 - a^2}{a^2\,b^2} + t_2^2\,\frac{c^2 - a^2}{a^2\,c^2}\right]^2,$$

albo:

$$R(f, g) = \left(\frac{t_1}{t_2}\sqrt{b^2 - a^2} + \frac{t^2}{c}\sqrt{a^2 - c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{t_1}{b}\sqrt{b^2 - a^2} + \frac{t_2}{c}\sqrt{a^2 - c^2}\right)^2.$$

Stąd stosunek:

$$\frac{t_1}{t_2} = \pm\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - a^2}}.$$

Położywszy:

$$t_1 = \pm\, b\sqrt{a^2 - c^2},$$
$$t_2 = c\sqrt{b^2 - a^2},$$

otrzymamy z równań (2) pierwiastki ϱ w formie:

$$\varrho = \pm\frac{1}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

a więc:

$$x = \pm\frac{b\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}},\quad y = +\frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}},$$

$$x = \mp\frac{b\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}},\quad y = -\frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

Wspólne zatem pierwiastki są zawsze skończone, dla $c \leqq a \leqq b$ rzeczywiste, w innych wypadkach urojone.

*

* *

Nawiązując do podstawienia $x = \varrho\, t_1$, $y = \varrho\, t_2$, jakiego użyliśmy w powyższych poszukiwaniach, możemy wyprowadzić ciekawą własność danego równania algebraicznego:

(1) $$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0,$$

n zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Gdy równanie to jest wymiaru m-tego a v_α oznacza funkcyę jednorodną, zawartą w (1) wymiaru α, to mamy:

(2) $$f = v_m + v_{n-1} + v_{n-2} + \ldots + v_1 + v_0 = 0.$$

Kładąc w (2):

$$x_s = \varrho\, t_s, \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

otrzymamy:

$$(3)\quad \varrho^m \cdot v_m(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \varrho^{m-1} \cdot v_{m-1}(t_1, t_2, \ldots, t_n) + \ldots + v_0 = 0.$$

Przyjmijmy, że kładąc w (3):

$$t_1 = \tau_1, \quad t_2 = \tau_2, \quad t_3 = \tau_3, \ \ldots, \ t_n = \tau_n,$$

gdzie $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$ są dowolnie dane liczby, otrzymamy:

$$\varrho = \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_n,$$

to w takim razie:

$$x_1 = \varrho_a \tau_1, \ x_2 = \varrho_a \tau_2, \ \ldots, \ x_n = \varrho_a \tau_n, \qquad a = 1, 2, \ldots, m,$$

są niezawodnie m miejscami zerowemi danego równania $f = 0$. Stąd twierdzenie: „Gdy dany jest dowolny system n liczb $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$, to w nieograniczonym obszarze n zmiennych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ znajdziemy zawsze m miejsc zerowych równania $f = 0$ o spółrzędnych proporcyonalnych do liczb $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_n$"

O STANIE OBECNYM TEORYI NIEZMIENNIKÓW.

NAPISAŁ

Fr. MEYER,

Przełożył za upoważnieniem autora

S. DICKSTEIN.

CZĘŚĆ II*).

POKREWIEŃSTWO FORM.

A. Pytania, odnoszące się do skończoności.

a). Wiadomości ogólne o obszarach całkowitości. Najważniejsze dowody skończoności.

Po załatwieniu się z pytaniami, odnoszącemi się do zagadnienia o równoważności, zwracamy się do rozpatrzenia różnorodnych związków algebraicznych pomiędzy utworami niezmienniczemi, powstającemi z danej formy pierwotnej lub ze szeregu takich form.

Jeżeli zwrócimy najprzód uwagę na utwory całkowito-wymierne, to okres nowszy (od 1868) daje się scharakteryzować przez to, że w nim wysunięto na plan pierwszy określone „zadanie o skończoności", (Endlichkeitsproblem). Z istoty algebry nowszej wynika, że najcelniejszem pytaniem w niej jest, czy obszar form, dających się wyprowadzić z pewnych form pierwotnych za pomocą procesów niezmienniczych, jest „obszarem całkowitości" [1]) (Integritätsbereich), t. j. czy można z niego wydzielić liczbę skończoną indywiduów w ten sposób, by każde

*) Wstęp i Część I w tomie VII-ym „Prac matematyczno-fizycznych."