O PRZESTĘPNOŚCI LICZB e i π [1]).

PODAŁ

FR. MERTENS.

1.

Do podanych przez Weierstrassa [2]), Hilberta [3]), Horwitza [4]) i Gordana [5]) opracowań dowodów Hermite'a i Lindemanna na przestępność liczb e i π dołączam nowe opracowanie jedynie dlatego, że opieram się w niem tylko na możliwie prostych twierdzeniach algebraicznych i nie korzystam wcale ze środków pomocniczych teoryi liczb.

2.

Szereg wykładniczy

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

jeżeli k i m oznaczają liczby całkowite dodatnie, rozpada się na trzy części:

[1]) Sitzungberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math. Natur. Classe, z listopada 1896.

[2]) Sitzungsberichtte der kg. preussischen Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, 1885, XLIX.

[3]), [4]), [5]) Patrz „Prace matemat.-fizycz.", tom V, str. 1—12.

$$X_k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$Y_k = \frac{x^k}{k} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \ldots + \frac{x^{m+k-1}}{(m+k-1)!},$$

$$Z_k = \frac{x^{m+k}}{(m+k)!} + \frac{x^{m+k+1}}{(m+k+1)!} + \ldots \text{ in inf}.$$

Jeżeli funkcyę całkowitą $(m-1)$-go stopnia zmiennej t:

$$(t+m-1)(t+m-2)\ldots(t+1) + (t+m-1)(t+m-2)\ldots(t+2)\,x$$
$$+ (t+m-1)(t+m-2)\ldots(t+3)\,x^2 + \ldots + x^{m-1}$$

oznaczymy przez $g(t)$, a różnice pierwsze, drugie ... $(m-1)$-te szeregu

$$g(0),\ g(1),\ g(2), \ldots, g(m-1),$$

oznaczymy odpowiednio przez:

$$g_1(0),\ g_1(1),\ g_1(2), \ldots, g_1(m-2),$$
$$g_2(0),\ g_2(1),\ g_2(2), \ldots, g_2(m-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g^{m-1}(0),$$

to będzie tożsamościowo:

$$g(t) = g(0) + g_1(0)\frac{t}{1} + g_2(0)\frac{t(t-1)}{2!} + \ldots$$
$$+ g_{m-1}(0)\,\frac{t(t-1)\ldots(t-m+2)}{(m-1)!},$$

tak, że:

$$(m+k-1)!\ Y_k = x^k g(k) = g_0(0)\,x^k + \frac{g_1(0)\,x}{1!}\,k\,x^{k-1}$$
$$+ \frac{g_2(0)\,x^2}{2!}\,k(k-1)\,x^{k-2} + \ldots$$

Niechaj

$$f(x) = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_n x$$

będzie daną funkcyą całkowitą podzielną przez x o spółczynnikach całkowitych rzeczywistych lub zespolonych, z których pierwszy a_0 jest od zera różny, i niechaj ta funkcya nie posiada wspólnego dzielnika ze swoją pochodną $f'(x)$. Połóżmy:

$$x^{\nu+1}\left(\frac{1}{x}f\right)^m = T = \overset{(\nu)}{c_1} x + \overset{(\nu)}{c_2} x^2 + \dots + \overset{(\nu)}{c}_{mn+n+1} x^{mn+n+1},$$

gdzie ν oznacza którąkolwiek z liczb 0, 1, 2, n. Tożsamość

$$(m+k-1)!\, e^x = (m+k-1)!\,(X_k + Y_k + Z_k)$$

pomnóżmy przez $\frac{1}{m!}\overset{(\nu)}{c}_k$, sumujmy następnie od $k=1$ do $k=mn+n+1$. Jeżeli położymy:

$$G_\nu(x) = \frac{1}{m!}\left(c_1^{(\nu)} m!\, X_1 + c_2^{(\nu)} (m+1)!\, X_2 + \dots + c^{(\nu)}_{mn+n+1} (mn+n+1)!\, X_{mn+n+1}\right),$$

$$R_\nu(x) = \frac{1}{m!}\left(c_1^{(\nu)} m!\, Z_1 + c_2^{(\nu)} (m+1)!\, Z_2 + \dots + c^{(\nu)}_{mn+n+1} (mn+n+1)!\, Z_{mn+n+1}\right),$$

to otrzymamy rezultat w postaci:

$$(2) \qquad G_\nu(0)\, e^x = G_\nu(x) + L f(x) + R_\nu(x),$$

gdzie L jest funkcyą całkowitą zmiennej x, gdyż funkcya

$$c_1^{(\nu)} m!\, Y_1 + c_2^{(\nu)} (m+1)!\, Y_2 + \dots + c^{(\nu)}_{mn+n+1} (mn+n+m)!\, Y_{mn+n+1}$$

według (1) równać się będzie:

$$g(0)\,(c_1^{(\nu)} x + c_2^{(\nu)} x^2 + \dots + c^{(\nu)}_{mn+n+1} x^{mn+n+1})$$

$$+ \frac{g_1(0)\, x}{1!}\,(c_1^{(\nu)} + 2c_2^{(\nu)} x + 3c_3^{(\nu)} x^2 + \dots)$$

$$+ \frac{g_2(0)\, x^2}{2!}\,(2\, c_2^{(\nu)} + 3\,.\,2\, c_3^{(\nu)} x + 4\,.\,3\, c_4^{(\nu)} x^2 + \dots) + \dots$$

$$+ \; .$$

$$= g(0)\, T + g_1(0)\,\frac{x}{1!}\, T' + g_2(0)\,\frac{x^2}{2!}\, T'' + \dots + g_{m-1}(0)\,\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\, T^{(m-1)},$$

a więc będzie podzielną przez f, albowiem T zawiera czynnik f, a funkcye T', $T'' \dots T^{(m-1)}$ zawierają wszystkie czynnik $\frac{1}{x} f$.

3.

Wyrażenie:

$$(m+k-1)!\, X_k = \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} + \frac{(m+k-1)!}{(k-2)!} x^{k-2} + \dots + (m+k-1)!$$

jest sumą pochodnych m-tej, $(m+1)$-ej, ..., $(mn+m+n)$-ej funkcyi x^{m+k-1}. Jeżeli położymy:

$$x^{m-1}\, T = x^\nu f^m = f_\nu,$$

to $G_\nu(x)$ przyjmie postać:

$$G^\nu(x) = \frac{1}{m!}\,(f_\nu^{(m)} + f_\nu^{(m+1)} + \dots + f_\nu^{(mn+m+n)})$$

i będzie funkcyą całkowitą zmiennej x o spółczynnikach, które są połączeniami całkowito-liczbowemi spółczynników $a_0, a_1, \dots, a_n$, gdyż spółczynniki funkcyi $\frac{1}{m!} f_\nu^{(m+k)}$ są wielokrotnościami spółczynników funkcyi f_ν.

Jeżeli $g_\nu(x)$ jest resztą stopnia względem x nie wyższego nad n, którą otrzymujemy, dzieląc $G_\nu(x)$ przez f, to wyznacznik układu spółczynników $n+1$ funkcyj $g_0, g_1, g_2, \dots, g_n$ nie jest zerem. Można to, podobnie jak u W e i e r s t r a s s a, udowodnić sposobem następującym:

Gdyby ten wyznacznik był zerem, to istniałybyby liczby $c_0, c_1, \dots, c_n$, nie wszystkie równe zeru, sprawdzające tożsamość:

$$c_0\, g_0 + c_1\, g_1 + \dots + c_n\, g_n = 0,$$

funkcya zaś:

$$G = c_0\, G_0\,(x) + c_1\, G_1\,(x) + \dots + c_n\, G_n\,(x)$$

byłaby podzielną przez f. Jeżeli napiszemy:

$$c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n)\, f^m = v\,,$$
$$v + v' + v'' + \dots + v^{(mn+m+m)} = u\,,$$

to będzie:

$$m!\; G = v^{(m)} + v^{(m+1)} + \dots + v^{(mn+m+n)}$$

i funkcya u musiałaby być także podzielna przez f, gdyż $v, v, \dots, v^{(m-1)}$ zawierają czynnik f. Lecz gdy u jest podzielne przez f^p, gdzie $p \leqslant m$, to z tożsamości $u - u' = v$, wynika, że i u' jest podzielne przez f^p. Wtedy zaś musi f^{p+1} być dzielnikiem ilości u, ponieważ f i f' nie mają wspólnego dzielnika. Gdyby zatem u było podzielne przez f, to musiałoby być również podzielne przez $f^2, f^3, \dots, f^{m+1}$, co jest niemożliwem, gdyż u jest stopnia niższego niż f^{m+1} i nie znika tożsamościowo.

Wyrażenie:

$$C_0\, e^{\beta_0 t} + C_1\, e^{\beta_1 t} + \dots + C_n\, e^{\beta_n t}\;,$$

w którem t jest ilością zmienną, zaś $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ są wielkościami danemi, znika tożsamościowo, jeżeli w jego rozwinięciu według potęg ilości t spółczynniki przy $t^0, t, \dots, t^n$ są zerami. Istotnie, jeżeli pomiędzy wielkościami $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ wybierzemy liczebnie różne i oznaczmy je przez $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\mu$, to całe wyrażenie po redukcyi wyrazów z jednakowemi czynnikami wykładniczemi przybierze postać:

$$B_1\, e^{\gamma_1 t} + B_2\, e^{\gamma_2 t} + \dots + B_\mu\, e^{\gamma_\mu}$$

a brak potęg $t^0, t, \dots, t^n$ w rozwinięciu wyrazi się przez równania:

$$C_0 + C_1 + \dots + C_n = B_1 + B_2 + \dots + B_\mu = 0\,,$$
$$C_0\, \beta_0 + C_1\, \beta_1 + \dots + C_n\, \beta_n = B_1\, \gamma_1 + B_2\, \gamma_2 + \dots + B_\mu\, \gamma_\mu = 0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_0\, \beta_0^n + C_1\, \beta_1^n + \dots + C_n\, \beta_n^n = B_1\, \gamma_1^n + B_2\, \gamma_2^n + \dots + B_\mu\, \gamma_\mu^n = 0\,.$$

Ponieważ wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \dots, & \gamma_\mu \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^{\mu-1} & \gamma_2^{\mu-1}, & \dots, & \gamma_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}$$

nie jest zerem, więc równania te zgadzają się z równaniami:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_\mu = 0\,.$$

Jeżeli $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ są $n+1$ pierwiastkami równania $f(x) = 0$, to przynajmniej jedna z $n+1$ wielkości

$$C_0\, G_0\,(\beta_0) + C_1\, G_0\,(\beta_1) + \dots + C_n\, G_n\,(\beta_n)\,,$$
$$C_0\, G_1\,(\beta_0) + C_1\, G_1\,(\beta_1) + \dots + C_n\, G_1\,(\beta_n)\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_0\, G_n\,(\beta_0) + C_1\, G_n\,(\beta_1) + \dots + C_n\, G_n\,(\beta_n)\,,$$

musi być różna od zera, jeżeli wyrażenie

$$C_0\, e^{\beta_0 t} + C_1\, e^{\beta_1 t} + \dots + C_n\, e^{\beta_n t}$$

nie znika tożsamościowo. Gdyby bowiem te wszystkie wielkości były zerami, mielibyśmy:

$$C_0\, g_0\,(\beta_0) + C_1\, g_0\,(\beta_1) + \dots + C_n\, g_0\,(\beta_n) = 0\,,$$
$$C_0\, g_1\,(\beta_0) + C_1\, g_1\,(\beta_1) + \dots + C_n\, g_1\,(\beta_n) = 0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_0\, g_n\,(\beta_0) + C_1\, g_n\,(\beta_1) + \dots + C_n\, g_n\,(\beta_n) = 0\,,$$

a stąd, ponieważ wyznacznik układu spółczynników funkcyj $g_0, g_1, \dots, g_n$ nie jest zerem, mielibyśmy:

$$C_0 + C_1 + \dots + C_n = 0\,,$$
$$C_0\, \beta_0 + C_1\, \beta_1 + \dots + C_n\, \beta_n = 0\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_0\, \beta_0^n + C_1\, \beta_1^n + \dots + C_n\, \beta_n^n = 0\,,$$

musiałoby być przeto:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_n = 0\,.$$

4.

Jeżeli r jest wartością bezwzględną zmiennej x i $m \geqq r > 0$, to:

$$|Z_\gamma| < \frac{r^{m+k}}{(m+k)!}\left(1 + \frac{r}{m+k+1} + \frac{r^2}{(m+k+1)(m+k+2)} + \ldots\right),$$

$$< \frac{r^{m+k}}{(m+k)!}\left(1 + \frac{m}{m+k} + \left(\frac{m}{m+k}\right)^2 + \ldots\right),$$

$$< \frac{r^{m+k}}{(m+k-1)!},$$

a przeto:

$$|R_\nu(x)| < \frac{r^m}{m!}\left(r\,|c_1^{(\nu)}| + r^2\,|c_2^{(\nu)}| + \ldots\right) < \frac{r^{m+1}}{m!} f_0(r)^m,$$

gdzie f_0 powstałe z f, jeżeli wszystkie spółczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zastąpimy ich wartościami bezwzględnemi.

5.

Niechaj będzie:

$$F(z) = C_0 + C_1 z + \ldots + C_n z^n$$

daną funkcyą zmiennej z, całkowitą o spółczynnikach całkowitych, nie znikającą tożsamościowo. W tożsamości (2) połóżmy

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

i następnie kolejno $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Będzie wtedy:

$$G_\nu(0) = G_\nu(0),$$

$$G_\nu(0)\,e = G_\nu(1) + R_\nu(1),$$

$$G_\nu(0)\,e^2 = G_\nu(1) + R_\nu(2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_\nu(0)\,e^n = G_\nu(n) + R_\nu(n).$$

Mnożąc te równania przez $C_0, C_1, \ldots, C_n$ i dodając, otrzymamy:

$$G_\nu(0)\,F(e) = H_\nu + \varrho,$$

gdzie:

$$H_\nu = C_0\,G_\nu(0) + C_1\,G_\nu(1) + \ldots + C_n\,G_\nu(n),$$

$$\varrho = \qquad C_1\,R_\nu(1) + \ldots + C_n\,R_\nu(n),$$

Wybierzmy m tak wielkie, aby wartość liczebna ilości ϱ była mniejsza od $\frac{1}{2}$. W tym celu dość wybrać m tak, aby czyniło zadość nierówności:

$$S\,.\,n^{n+1}\frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!} < \frac{1}{2},$$

gdzie S oznacza sumę bezwzględnych wartości spółczynników $C_0, C_1, \ldots, C_n$; istotnie jest wtedy $m > n$ i mamy:

$$|R_\nu(k)| < \frac{k^{n+1} f_0(k)^m}{m!} \leqq n^{n+1}\frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!},$$

a stąd:

$$|\varrho| < S\,.\,n^{n+1}\frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!} < \frac{1}{2}.$$

Po ustaleniu wartości na m musi być według ustępu 3-go jedna z liczb $H_0, H_1, \ldots, H_n$, np. liczba H_ν różna od zera, ponieważ wyrażenie $F(e^t)$ nie znika tożsamościowo. Jako liczba całkowita musi H_ν mieć co najmniej wartość liczebną równą 1, a więc będzie bezwzględu na znak:

$$G_\nu(0)\,F(e) > \frac{1}{2},$$

$$F(e) > \frac{1}{2\,G_\nu(0)}.$$

Nie istnieje przeto funkcya całkowita o spółczynnikach całkowitych, znikająca przy wartości e.

6.

Niechaj będzie:

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_q z^q$$

dowolną nie znikającą funkcyą całkowitą i o spółczynnikach całkowitych; niechaj:

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p$$

będzie znów dowolną funkcya całkowitą ze spółczynnikami całkowitemi zespolonemi, z których b_0 i b_p mają być różnemi od zera.

Niechaj $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ będą pierwiastkami równania $\varphi(z) = 0$, t zaś zmienną; wtedy iloczyn

$$P(t) = \psi(e^{\alpha_1 t})\,\psi(e^{\alpha_2 t}) \ldots \psi(e^{\alpha_p t}),$$

po wykonaniu działań, zamienia się na sumę wyrazów postaci

(3) $$A\, e^{(\mathrm{a}\alpha_1 + \mathrm{b}\alpha_2 + \ldots + \mathrm{e}\alpha_p)t},$$

gdzie A jest iloczynem p spółczynników funkcyi ψ, zaś a, b, ..., e są liczbami całkowitemi szeregu $0, 1, \ldots, q$. Jeżeli wyszukamy w tych wyrazach wszystkie różne od siebie liczebnie wyrazy $\mathrm{a}\alpha_1 + \mathrm{b}\alpha_2 + \ldots \mathrm{e}\alpha_p$ i oznaczymy je przez $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, gdzie $\beta_0 = 0_1$ to po zebraniu wszystkich wyrazów, mających wspólny ten sam czynnik wykładniczy, znajdziemy rezultat postaci:

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots$$

To wyrażenie nie może znikać tożsamościowo, gdyż w razie przeciwnym w rozwinięciu jednego z czynników $\psi(e^{\alpha_1 t}), \psi(e^{\alpha_2 t}), \ldots, \psi(e^{\alpha_p t})$ według potęg zmiennej t musiałoby braknąć potęg $t^0, t, \ldots, t^q$, stąd zaś według ustępu 3-go, wbrew założeniu, wynikałoby:

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_q = 0.$$

Można więc napisać:

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t},$$

gdzie albo C_0 nie równa się zeru, gdy $n = 0$, albo, gdzie wszystkie ilości $C_1, C_2, \ldots, C_n$ są różne od zera. Rozwinięcie wyrażenia $P(t)$ według potęg ilości t ma postać:

$$P(t) = h_0 + h_1 \frac{t}{1} + h_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

gdzie $h_0, b_0 h_1, b_0^2 h_2 \ldots$ są liczby zespolone całkowite. Gdyż w spółczynniku h_k przy $\frac{t^k}{k!}$ wyraz (3) daje część równą

$$A(\mathrm{a}\alpha_1 + \mathrm{b}\alpha_2 + \ldots + \mathrm{e}\alpha_p)^k,$$

a więc h_k jest funkcyą całkowitą k tego stopnia pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, mającą spółczynniki całkowite. Funkcya ta jest symetryczną względem pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, jak łatwo widać, jeżeli pomnożymy przez siebie p wyrażeń:

$$\psi(e^{\alpha_1 t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \ldots + q c_q)\,\alpha_1 t$$
$$+ (c_1 + 2^2 c_2 + \ldots + q c_q)\,\alpha_1^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

$$\psi(e^{\alpha_2 t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \ldots + q c_q)\,\alpha_1 t$$
$$+ (c_1 + 2^2 c_2 + \ldots + q^2 c_q)\,\alpha_2^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

. . . .

$$\psi(e^{\alpha_p t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \ldots + q c_q)\,\alpha_p t$$
$$+ (c_1 + 2^2 c_2 + \ldots + q^2 c_q)\,\alpha_p^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

Jeżeli więc przekształcimy h_k na funkcyę całkowitą funkcyj symetrycznych elementarnych $-\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \ldots, \pm\frac{b_p}{b_0}$ pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, to ta funkcya będzie stopnia k-tego, będzie więc miała postać $\frac{g}{b_0^k}$, gdzie g oznacza liczbę całkowitą zespoloną.

Poprzedzające wnioski stosują się milcząco do przypadku $p > 1$. W przypadku $p = 1$ są one jasne wprost, jeżeli położymy

$$P(t) = \psi(e^{\alpha_1 t}).$$

Funkcye symetryczne elementarne $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ilości $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ są liczbami zespolonemi wymiernemi, gdy $n > 0$. Gdyż, jeżeli rozważymy spółczynniki przy t^0 i t^k w $P(t)$, będzie:

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n = h_0 - C_0\,,$$
$$C_1 \beta_1{}^k + C_2 \beta_2{}^k + \ldots + C_n \beta_n{}^k = h_k\,;$$

kładąc zatem

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \ldots \pm \sigma_n = u\,,$$

znajdziemy:

$$h_n - \sigma_1 h_{n-1} + \sigma_2 h_{n-2} - \ldots \pm \sigma_n (h_0 - C_0) = 0\,,$$
$$h_{n+1} - \sigma_1 h_n + \sigma_2 h_{n-2} - \ldots \pm \sigma_n h_1 = 0\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h_{2n-1} - \sigma_1 h_{2n-2} + \sigma_2 h_{2n-3} - \ldots \pm \sigma_n h_{n-1} = 0\,,$$
$$-u + x^n - \sigma_1 x^{n-2} - \ldots \pm \sigma_n = 0\,.$$

Rugując z tych równań $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, otrzymujemy:

$$\begin{vmatrix} h_n, & h_{n-1}, & \ldots, & h_0 - C_0 \\ h_{n+1}, & h_n, & \ldots, & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{2n-1}, & h_{2n-2}, & \ldots, & h_{n-1} \\ -u + x^n, & x^{n-1}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ta tożsamość daje nam na u funkcyę całkowitą o spółczynnikach wymiernych, jeżeli wyznacznik

$$\begin{vmatrix} h_{n-1}, & h_{n-2}, & \ldots, & h_0 - C_0 \\ h_n, & h_{n-1}, & \ldots, & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{2n-2}, & h_{2n-3}, & \ldots, & h_{n-1} \end{vmatrix}$$

nie jest zerem. Ten wyznacznik zaś jest równy albo wyrażeniu

$$\pm C_1 C_2 \ldots C_n (\beta_2 - \beta_1)^2 (\beta_2 - \beta_1)^2 \ldots (\beta_n - \beta_{n-1})^2,$$

albo równa się C_1 stosownie do tego, czy $n > 1$ lub $n = 1$, więc zerem nie jest.

Istnieje przeto równanie stopnia $(n+1)$-go:

$$a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x = 0$$

o społczynnikach zespolonych całkowitych, które ma pierwiastki $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$.

Jeżeli w tożsamości (2) położymy:

$$f = a_0 x^{n+1} + a_1 x_n + \ldots + a_n x\,,$$

a $x = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, otrzymamy:

$$G_\nu(0) = G_\nu(\beta_0)\,,$$
$$G_\nu(0)\, e^{\beta_1} = G_\nu(\beta_1) + R_\nu(\beta_1)\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_n(0)\, e^{\beta_n} = G_\nu(\beta_n) + R_\nu(\beta_n)\,.$$

Mnożąc te równości odpowiednio przez $C_0, C_1, \ldots, C_n$ i dodając, znajdujemy:

$$G_\nu(0)\, P(1) = \frac{1}{b_0{}^{mn+n}} H_\nu + \varrho\,,$$

gdzie

$$H_\nu = b_0{}^{mn+n} \left(C_1\, G_\nu(\beta_0) + C_1\, G_\nu(\beta_1) + \ldots + C_n\, G_\nu(\beta_n)\right)$$
$$\varrho = C_1 R_\nu(\beta_1) + C_2 R_\nu(\beta_2) + \ldots + C_n R_\nu(\beta_n)$$

H_ν jest liczbą całkowitą zespoloną. Jeżeli bowiem rozwiniemy $G_\nu(x)$ według potęg ilości x, będziemy mieli:

$$l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots + l_{mn+n} x^{mn+n}$$

i będzie:

$$\frac{1}{b_0{}^{mn+n}} H_\nu = l_0 (C_0 + C_1 + \ldots + C_n) + l_1 (C_0 \beta_0 + \ldots + C_\nu \beta_n) + \ldots$$

lub

$$H_\nu = l_0\, b_0{}^{mn+n} h_0 + l_1\, b_0{}^{mn+n-1} b_0 h_1 + \ldots l_{mn+n}\, b_0{}^{mn+n} h_{mn+n}\,.$$

Jeżeli obierzemy na m wartość określoną tak, aby było $|\varrho\, b_0{}^{mn+n}| < \frac{1}{2}$, to jedna z liczb $H_0, H_1, \ldots, H_n$, np. H_ν będzie od zera różną, gdyż $P(t)$ nie jest tożsamościowo zerem i będzie:

$$|H_\nu| \geqslant 1\,,$$

a zatem:

$$G_\nu(0)\, P(1) > \frac{1}{2\,|b_0|^{mn+n}}\,,$$

skąd:

$$|P(1)| > \frac{1}{2\,|b_0|^{mn+\nu}\,|G_\nu(0)|}\,.$$

Niechaj będzie jeszcze

$$\psi(z) = (z-\gamma)\,\psi_1(z)\,,$$

λ pewną oznaczoną wartością logarytmu naturalnego liczby γ; σ — liczbą, której wartość bezwzględna nie jest większa od bezwzględnej wartości żadnej z liczb $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, i nadto jeszcze:

$$|\psi_1(e^{\alpha_1})|\,|\psi_1(e^{\alpha_2})|\ldots|\psi_1(e^{\alpha_p})| \leqslant K\,.$$

Będzie tedy:

$$P(1) = (e^{\alpha_1}-e^{\lambda})(e^{\alpha_2}-e^{\lambda})\ldots(e^{\alpha_p}-e^{\lambda})\,\psi_1(e^{\alpha_1})\,\psi_1(e^{\alpha_2})\ldots\psi_1(e^{\alpha_p})\,,$$

$$|e^{\alpha_i}-e^{\lambda}| = |\alpha_i-\lambda|\,\left|1+\frac{\alpha+\lambda}{2}+\frac{\alpha_i{}^2+\alpha_i\lambda+\lambda^2}{3!}+\ldots\right| \leqslant |\alpha_i-\lambda|\,e^{\sigma},$$

a więc:

$$|P(1)| \leqslant \left|\frac{\varphi(\lambda)}{b_0}\right| e^{p\sigma} K,$$

stąd wynika

$$|\varphi(\log\lambda)| > \frac{e^{-p\sigma}}{2K\,|b_0{}^{mn-1}|\,|G_\nu(0)|}\,.$$

Nie istnieje przeto funkcya całkowita o spółczynnikach zespolonych całkowitych, znikająca dla $\log\gamma$.

Jeżeli przyjmiemy w szczególności:

$$\psi(z) = 1+z,\quad \log(-1) = i\pi,\quad \varphi(z) = F(-iz)\,,$$

gdzie F oznacza jakąkolwiek funkcyę całkowitą i całkowito-liczbową, będzie:

$$\psi_1(z) = 1\,,\quad K = 1\,,$$

a przeto:

$$F(\pi) > \frac{e^{-p\sigma}}{2\,|b_0|^{mn+n-1}\,|G_\nu(0)|}\,.$$

Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą algebraiczną, zaś $\psi(z)=0$ — równaniem całkowito-liczbowem, któremu czyni zadość $\sqrt{\dfrac{1+ix}{1-ix}}$ lub $\sqrt{1-x^2}+ix$, $F(iz)$ — dowolną funkcyą całkowitą i całkowito-liczbową, to kładąc $\varphi(z) = F(-iz)$ będzie można podać granice, które przekroczyć muszą funkcye

$$F(\text{arc tg}\,x),\quad F(\text{arc sin}\,x),$$

W tym celu należy położyć:

$$i\,\text{arc tg}\,x = \log\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}}\,,$$

$$i\,\text{arc sin}\,x + \log(\sqrt{1-x^2}+ix)\,.$$

7.

Niechaj danem będzie równanie stopnia p-tego o spółczynnikach całkowitych

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p\,;$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ niech będą pierwiastkami jego; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ zaś — rozmaitemi całkowito-liczbowemi liniowo jednorodnemi połączeniami tych pierwiastków. Połóżmy:

$$\psi(t) = A_1 e^{\xi_1 t} + A_2 e^{\xi_2 t} + \ldots + A_q e^{\xi_q t}\,,$$

gdzie $A_1, A_2, \ldots, A_q$ są liczbami różnemi od zera. Tę z dwóch liczb: $qp!$. $2q^{p!}-1$, która nie jest mniejsza od drugiej, oznaczmy przez μ; ogół wyrazów, zawierających potęgi $t^0, t, \ldots, t^{\mu}$ w rozwinięciu wyrażenia $\psi(t)$ według potęg zmiennej t, oznaczmy przez ω, wreszcie u niechaj będzie ilością nieoznaczoną.

Ponieważ iloczyn $\Pi(u-\omega)$, rozciągnięty na wszystkie możliwe przemiany pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, jest funkcyą całkowitą symetryczną tych pierwiastków, ma przeto za spółczynniki przy pojedyńczych potęgach ilości u funkcye całkowite i wymierno-liczbowe ilości t. Jeżeli U jest tym z nieprzywiedlnych czynników tęgo iloczynu, który znika dla $u=\omega$, to czynnik ten powstaje z pomnożenia $u-\omega$ przez podobne czynniki $u-\omega_1$, $u-\omega_2, \ldots$, które otrzymujemy z $u-\omega$ przy pewnych przemianach pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Niechaj $\psi_1, \psi_2, \ldots$ będą ilościami, powstającemi z $\psi(t)$ przez te przemiany; połóżmy

$$P(t)=\psi(t)\,\psi_1(t)\,\psi_2(t)\ldots,$$

$P(t)$ jest sumą wyrazów postaci $A\,e^{\eta t}$, gdzie A jest liczbą całkowitą, η zaś est wyrażeniem całkowito-liczbowem i liniowo-jednorodnem, utworzonem z pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Jeżeli poszukamy wszystkich różnych liczbowo wartości ilości η i zbierzemy wszystkie wyrazy, mające za czynnik tę samą wielkość wykładniczą, to wyrażenie, jakie stąd wyniknie, nie może znikać tożsamościowo. Gdyby bowiem było inaczej, to wtedy iloczyn $\omega\omega_1\,\omega_2, \ldots$, który aż do wyrazów, zawierających t^μ włącznie zgadza się z wyrażeniem $P(t)$ musiałby być podzielny przez $t^{\mu+1}$, a więc przynajmniej jeden z czynników $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ musiałby być podzielny przez $t^{\varrho+1}$, gdyż liczba tych cynników jest $\leqslant p$! Tak i zaś czynnik ma postać

$$A_1\,e^{\eta_1 t}+A_2\,e^{\eta_2 t}+\ldots+A_q\,e^{\eta_q t},$$

gdzie $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_q$ powstają z $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$ przez przemianę pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, a więc według 3. musi znikać tożsamościowo, jeżeli jest podzielny przez $t^{\varrho+1}$. Byłoby zatem $\omega\,\omega_1\,\omega_2, \ldots, =0$, a funkcya nieprzywiedlna U zredukowaćby się musiała do u; wtedy byłoby $\omega=0$, a zatem także $\psi(t)=0$ jest w sprzeczności z przyjęciem.

Stąd wynika, że iloczyn $P(t)$ daje się przedstawić w postaci:

$$P(t)=C_0\,e^{\beta_0 t}+C_1\,e^{\beta_1 t}+\ldots+C_n\,e^{\beta_n t},$$

gdzie $\beta_0=0$ i albo C_0 nierówne zeru, gdy $n=0$, albo $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wszystkie od zera różne, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ zaś są liczbowo różnemi całkowito-liczbowemi liniowo-jednorodnemi wyrażeniami, utworzonemi z $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, gdy $n>0$.

Jeżeli rozwiniemy $P(t)$ według potęg ilości t i napiszemy:

$$P(t)=h_0+h_1\frac{t}{1}+h_2\frac{t^2}{2!}+\ldots,$$

to $h_0, b_0\,h_1, b_0^2\,h_2, \ldots$ będą liczbami całkowitemi. Gdyż najprzód jest jasnem, że $h_0, h_1, \ldots, h_\mu$ są liczbami wymiernemi, bo $P(t)$ zgadza się z $\omega\,\omega_1\,\omega_2\ldots$ aż do wyrazów, zawierających potęgę t^μ. Następnie można dowieść zupełnie tak samo, jak w 6., że funkcye elementarne symetryczne ilości $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ w przypadku $n>0$ są liczbami wymiernemi i że skutkiem tego można utworzyć równanie całkowito-liczbowe stopnia $(n+1)$-go:

$$a_0\,z^{n+1}+a_1\,z^n+\ldots+a_n\,z=0,$$

którego pierwiastkami są $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Wymierność liczb $h_{\mu+1}, h_{\mu+2}, \ldots$ wynika wtedy z wzoru

$$a_0\,h_s+a_1\,h_{s-1}+\ldots+a_n\,h_{s-n}=0,$$

który utrzymuje się począwszy od $s=n+1$. Że zaś $b_0^k\,h_k$ jest liczbą całkowitą, wynika stąd, że

$$h_s=C_0\,\beta_0{}^k+C_1\,\beta_1{}^k+\ldots+C_n\,\beta_n{}^k$$

jest funkcyą całkowitą i całkowito-liczbową k-tego stopnia ilości $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, a więc i ilości $b_0\,\alpha_1, b_0\,\alpha_2, \ldots, b_0\,\alpha_p$, czyniących zadość równaniu

$$z_p+b_1\,z^{p-1}+b^0 b_2\,z^{p-2}+\ldots+b_0^{p-1}\,b_p=0,$$

a więc będących liczbami algebraicznemi całkowitemi.

Jeżeli w tożsamości (2) położymy:

$$f=a_0\,x^{n+1}+a_1\,x^n+\ldots+a_n\,x,$$

$$x=\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n,$$

znajdziemy:

$$G_\nu(0)=G(\beta_0),$$

$$G_\nu(0)\,e^{\beta_1}=G_\nu(\beta_1)+R(\beta_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G_\nu(0)\,e^{\beta_n}=G_\nu(\beta_n)+R(\beta_n),$$

a stąd:

$$G_\nu(0)\,P(1)=\frac{H_\nu}{b_0^{mn+n}}+\varrho,$$

gdzie:

$$\frac{1}{b_0^{mn+n}}H_\nu=C_0\,G_\nu(\beta_0)+C_1\,G_\nu(\beta_1)+\ldots+C_n\,G_\nu(\beta_n),$$

$$\varrho=C_1\,R_\nu(\beta_1)+C_2\,R_\nu(\beta_2)+\ldots+C_n\,R_\nu(\beta_n).$$

H_ν jest liczbą całkowitą, ponieważ H_ν staje się równem

$$l_0\,b_0^{mn+n},\ h_0+l_1\,b_0^{mn+n-1},\ b_0\,h_1+l_2\,b_0^{mn+n2},\ b_0^2\,h_2+\ldots,$$

jeżeli położymy

$$G_\nu(x) = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots$$

Jeżeli dobierzemy znów m tak, aby $|\varrho\, b^{mn+n}|$ było mniejsze od $\frac{1}{2}$, to jedna z liczb $H_0, H_1, \ldots, H_n$, np. H_ν będzie różna od zera i będzie:

$$|G_\nu(0)\, P(1)| > \frac{1}{2\,|b_0^{mn+n}|},$$

$$P(1) > \frac{1}{2\,|G_\nu(0)|\,|b_0^{mn+n}|},$$

a więc:

$$|\psi(1)| > \frac{1}{2K\,|G_\nu|\,|b_0^{mn+n}|},$$

jeżeli

$$|\psi_1(1)\,\psi_2(1)\ldots| \leqslant K.$$

Nie może zatem $\psi(1)$ być zerem.

Jeżeli w wyrażeniu $\psi(t)$ spółczynniki $A_1, A_2, \ldots, A_q$ nie są zwyczajnemi liczbami całkowitemi, lecz liczbami całkowitemi algebraicznemi, wtedy przy pomocy q ilości nieoznaczonych $u_1, u_2, \ldots, u_q$ utworzymy wyrażenie:

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_q u_q$$

i równanie nieprzywiedlne $\Gamma = 0$, któremu ono czyni zadość. Jeżeli $\pm Q(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ jest stały wyraz tego równania, będzie:

$$Q = (A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_q u_q)(A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \ldots)(A''_1 u_1 + A''_2 u_2 \ldots +)\ldots,$$

gdzie $A'_1, A'_2, \ldots, A_1'', A_2'', \ldots$ są również liczbami całkowitemi algebraicznemi. Jeżeli więc położymy:

$$Q(e^{\xi_1 t}, e^{\xi_2 t}, \ldots, e^{\xi_q t}) = \psi_0(t),$$

to $\psi_0(t)$ będzie miało postać

$$B_1 e^{\eta_1 t} + B_2 e^{\eta_2 t} + \ldots,$$

gdzie $\eta_1, \eta_2, \ldots$ są wyrażeniami całkowito-liczbowemi i liniowo jednorodnemi, liczebnie różnemi, utworzonemi z pierwiastków $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, zaś

$B_1, B_2, \ldots$ są liczbami całkowitemi. Te spółczynniki $B_1, B_2, \ldots$ nie mogą być wszystkie zerami, bo inaczej według 3 znikałoby także jedno z wyrażeń

$$A_1' e^{\xi_1 t} + A_2' e^{\xi_2 t} + \ldots;\quad A_1'' e^{\xi_1 t} + A_2'' e^{\xi_2 t} + \ldots;\ \ldots$$

a więc znikałoby i Q, co się sprzeciwia nieprzywiedlności równania $\Gamma = 0$.

Ponieważ tedy $|\psi_0(1)|$ musi być większem od pewnej wyznaczalnej granicy, to i to samo stosuje się do i do $|\psi(1)|$.