O TŁUMIENIU SIĘ DRGAŃ W OŚRODKACH DOSKONALE SPRĘŻYSTYCH.

NAPISAŁ

L. PODLASKI.

Ruch falowy, który w różnych dziedzinach fizyki matematycznej wyrażamy za pomocą pewnych funkcyj spółrzędnych przestrzeni i czasu, łączymy ogólnie z wyobrażeniem pewnego stanu, rozchodzącego się od punktu do punktu.

Cecha wspólna i zasadnicza wszystkich fal, czy to akustycznych, czy też elektromagnetycznych, względnie świetlnych, polega na ogólnem wyrażeniu rozchodzenia się jakichkolwiek zakłóceń w ośrodku, tak, iż coraz to inne części ośrodka, który pierwotnie był w spoczynku, kolejno zostają w ruch wprawiane; w zjawiskach tych każda część ośrodka otrzymuje i wysyła ustawicznie pewne zasoby energii.

Jeżeli wyobrażenie to połączymy z zasadą zachowania ilości energii, otrzymamy niezbędny wniosek, że wogóle każdy układ fal składać się musi z drgań, których obszerność (amplituda) ustawicznie maleje z czasem; innemi słowy, że wogóle każdy układ fal jest, że tak powiem, stłumionym, zupełnie niezależnie od oporu; np. tarcia mechanicznego, lepkości lub oporu galwanicznego; każda bowiem fala, wychodząca z danej części ośrodka nieograniczonego, zabiera i unosi ze sobą w nieskończoną przestrzeń pewną ilość energii. Skoro więc ustawicznych tych strat nie pokrywamy przez doprowadzanie odpowiednich zasilków energii zzewnątrz, energia w danem miejscu ustawicznie się zmniejsza, drgania słabną i gasną wreszcie.

W pewnych warunkach możliwe są oczywiście układy fal o obszerności w czasie niezmiennej. Dzieje się to wówczas, gdy ośrodek jest zamknięty zewsząd ścianami doskonale odbijającemi, albo też, gdy źródło, zasilające drgania, jest nieskończenie obfite; w drugim przypadku ruch energii wszędzie jest stateczny. Zresztą musimy zaznaczyć, że przypadki te napotkać można li tylko w badaniach teoretycznych, jako wypadki graniczne, lecz nie w naturze; w rzeczywistości bowiem nie istnieją ani nieskończenie obfite źródła energii, ani też ściany doskonale odbijające.

Zgodnie z tem, cośmy wyżej powiedzieli, całki ogólne równań różniczkowych ruchu ośrodka drgającego, pozbawionego tarcia, muszą z konieczności zawierać wogóle rozwiązania, odpowiadające drganiom stłumionym, skoro tylko nie zachodzi jeden z wyżej wymienionych przypadków wyjątkowych. Aby przypadki te z góry wykluczyć, musimy założyć odpowiednie warunki graniczne i przypuścić oraz wyrazić e x p l i c i t e, że wielkość zapasu energii w każdem rozważanem źródle jest skończoną.

Dla ośrodka jednorodnego warunki te, o ile wiemy, nie dają się wyrazić w sposób określony i jednoznaczny; daje się to natomiast uskutecznić dla dwóch ośrodków różnych, przylegających do siebie, z których jeden, pierwotnie zaburzony, oddaje energię w kształcie fal ośrodkowi drugiemu.

Gdybyśmy, wychodząc z tego punktu widzenia, chcieli traktować zagadnienie w całej jego ogólności, napotkalibyśmy znaczne trudności analityczne. Ponieważ pragniemy wyświetlić ogólne stosunki w sposób jaknajbardziej przejrzysty i bez komplikacyi matematycznej, wprowadzamy następujące założenia, zasadniczo obojętne, rachunek zaś znacznie upraszczające; zakładamy mianowicie, że:

1) drgania w jednym i drugim ośródku są podłużne i prostopadłe do powierzchni granicznej;

2) w całej przestrzeni istnieje potencyał prędkości;

3) że obadwa te ośrodki są płynami sprężystemi o własnościach zresztą różnych.

Badania więc swoje ograniczamy do fal akustycznych, jak to wynika z założeń 1), 2); założenie zaś 3) pozwoli nam w prosty sposób wyrazić ciśnienie przez odkształcenia i zastosować do obydwóch ośrodków równanie hydrodynamiczne w kształcie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = q^2 \Delta \varphi . \tag{1}$$

W rozprawie niniejszej rozważamy dwa przypadki zasadnicze: fal płaskich i kulistych, i stosujemy do nich wyżej skreślone poglądy.

Pomyślmy sobie dwa różne płyny sprężyste, z których jeden wypełnia warstwę płaską, rozciągającą się od $x=0$ aż do $x=X$, drugi zaś rozciąga się od płaszczyzny $x=X$ do nieskończoności; w kierunkach y, z; obie warstwy niechaj rozciągają się do nieskończoności. Warstwa ośrodka pierwszego o grubości X graniczy z drugim ośrodkiem wzdłuż płaszczyzny $x=X$. Płaszczyzna zaś $x=0$ niechaj będzie doskonale odbijającą. Dla fal płaskich, rozchodzących się w kierunku x, mamy równania różniczkowe:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=q^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \quad \text{przy} \quad 0<x<X, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}=q_1^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}, \quad \text{przy} \quad x>X, \tag{3}$$

gdzie φ, φ_1 oznaczają potencyały prędkości, q, q_1 prędkości rozchodzenia się zaburzeń, w pierwszym, względnie w drugim ośrodku Dla płaszczyzny granicznej $x=X$ mamy warunki:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \quad \text{i} \quad k\frac{\partial\varphi}{\partial t}=k_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}, \quad x=X, \tag{4}$$

gdzie k, k_1 oznaczają gęstości ośrodków.—Warunek pierwszy wyraża ciągłość prędkości normalnej, drugi—równość ciśnień po jednej i drugiej stronie płaszczyzny granicznej.

Całką ogólną równania (2) jest:

$$\varphi=f\left(t-\frac{x}{q}\right)+f_1\left(t+\frac{x}{q}\right);$$

przy $x=0$, według powyższego założenia, musi być $\varphi=0$, a więc

$$f_1(t)=-f(t); \tag{5}$$

dla drugiego ośrodka mamy:

$$\varphi_1=F\left(t-\frac{x}{q_1}\right), \tag{6}$$

albowiem w ośrodku tym (tylko jednostronnie ograniczonym) fale biegną tylko w kierunku x dodatniego.

Drugi z warunków granicznych (4) możemy zcałkować ze względu na czas t i położyć stałą całkowania równą zeru, bez szkody dla ogólności badania.

Mamy więc obecnie według (5) i (6) oraz (4) dwie funkcye:

$$\varphi=f\left(t-\frac{x}{q}\right)-f\left(t+\frac{x}{q}\right), \quad 0<x<X, \tag{7}$$

$$\varphi_1=F\left(t-\frac{x}{q_1}\right), \quad x>X, \tag{8}$$

które mają czynić zadość warunkom granicznym

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}, \quad k\varphi=k_1\varphi_1, \quad x=X. \tag{9}$$

Podstawiając wartość za $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ i $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ z (7) i (8) w równaniu pierwszem (9) i kładąc $x=X$, mamy:

$$-\frac{1}{q}\left\{f'\left(t-\frac{X}{q}\right)+f'\left(t+\frac{X}{q}\right)\right\}=-\frac{1}{q_1}F'\left(t-\frac{X}{q_1}\right),$$

czyli, całkując względem t:

$$f\left(t-\frac{X}{q}\right)+f\left(t+\frac{X}{q}\right)=\frac{q}{q_1}F\left(t-\frac{X}{q_1}\right). \tag{10}$$

Drugi warunek graniczny daje:

$$k\left\{f\left(t-\frac{X}{q}\right)-f\left(t+\frac{X}{q}\right)\right\}=k_1F\left(t-\frac{X}{q_1}\right). \tag{11}$$

Z dwóch tych równań możemy wyrugować F; kładąc zaś

$$\frac{kq}{k_1q_1}=\mu. \tag{12}$$

otrzymamy:

$$\frac{\mu-1}{\mu+1}f\left(t-\frac{X}{q}\right)=f\left(t+\frac{X}{q}\right).$$

Kładąc wreszcie dla skrócenia:

$$\frac{\mu-1}{\mu+1}=\eta, \quad t-\frac{X}{q}=\vartheta, \quad \frac{2X}{q}=c, \tag{13}$$

mamy:

$$\eta f(\vartheta) = f(\vartheta + c)\,. \tag{14}$$

Jest to równanie funkcyjne, określające kształt funkcyi f. Kładąc w równaniu tem $\vartheta + c$ zamiast ϑ otrzymamy $\eta^2 f(\vartheta) = f(\vartheta + 2c)$, powtarzając zaś proces ten n razy, znajdziemy:

$$\eta^n f(\vartheta) = f(\vartheta + nc)\,. \tag{14'}$$

Jak widzimy z (13), stała c wyraża czas, w ciągu którego fale przebywają całą warstwą ośrodka pierwszego od powierzchni granicznej do ściany odbijającej i z powrotem.

Dla $\eta = 1$ otrzymalibyśmy według (14') równanie funkcyjne funkcyi pojedyńczo-peryodycznej. Wogóle atoli η jest mniejsze od jedności (patrz (13)); wartość więc funkcyi f zmniejsza się z czasem w stosunku określonym przez ułamek rzetelny η^n. Równanie (14) albo (14') wyraża więc drgania peryodyczne stłumione.

O tem, że przyczyną ustawicznego zmniejszania się obszerności drgań jest wysyłanie fal do drugiego nieograniczonego ośrodka, możemy się przedewszystkiem przekonać w przypadku szczególnym $\eta = 1$; wówczas bowiem $\mu - 1 = \mu + 1$, t. j. $\mu = \infty$, a więc $k_1 = 0$, co oznacza, że pierwsza warstwa drga w próżni. W tym wypadku ilość energii, zawartej w całej warstwie ośrodka pierwszego, pozostaje stałą, i jak tego wymaga prawo bezwładności dla układu odosobnionego, warstwa ta jest siedliskiem drgań o niezmiennym okresie i niezmiennej obszerności.

Skoro tylko określimy kształt funkcyi f zgodnie z równaniem (14), funkcya

$$\varphi = f\left(t - \frac{x}{q}\right) - f\left(t + \frac{x}{q}\right)$$

będzie określoną dla wszystkich czasów i dla wszelkich $0 < x < X$, t. j dla całej warstwy pierwszego ośrodka.

Co się zaś tyczy potencyału prędkości φ_1 w ośrodku drugim, możemy uczynić zadość wszystkim warunkom, kładąc:

$$F\left(t - \frac{x}{q_1}\right) = \frac{k}{k_1}\left\{ f\left(t - \frac{x}{q_1} + a\right) - f\left(t - \frac{x}{q_1} + b_1\right) \right\},$$

gdzie a i b oznaczają ilości stałe. Kładąc w równaniu tem $x = X$ i porównywając je z równaniem (11), otrzymamy:

$$a = -\frac{X}{q} + \frac{X}{q_1}, \qquad b = \frac{X}{q} + \frac{X}{q_1}\,.$$

Widzimy stąd, że F wyraża dwie fale drgań o różnicy epok $a - b = c$, t. j. równej czasowi potrzebnemu na dwukrotne przebycie warstwy o grubości X; jedna fala biegnie do płaszczyzny granicznej $x = X$ wprost, druga zaś dopiero po odbiciu się od ściany tylnej $x = 0$ do ośrodka drugiego. Kładąc:

$$\frac{k}{k_1} = \varkappa\,, \tag{15}$$

możemy napisać:

$$F\left(t - \frac{x}{q_1}\right) = \varkappa \left\{ f\left(t - \frac{x}{q_1} + \frac{X}{q_1} - \frac{X}{q}\right) - f\left(t - \frac{x}{q_1} + \frac{X}{q_1} + \frac{X}{q}\right) \right\}. \tag{16}$$

Równaniu funkcyjnemu możemy uczynić zadość, kładąc:

$$f(\vartheta) = e^{\alpha\vartheta} \cos \beta\vartheta\,;$$

według tego będzie:

$$f(\vartheta + c) = e^{\alpha c} e^{\alpha\vartheta} (\cos \beta c \cos \beta\vartheta - \sin \beta c \sin \beta\vartheta)\,;$$

według (14) zaś:

$$\eta\, e^{\alpha\vartheta} \cos \beta\vartheta = e^{\alpha c} e^{\alpha\vartheta} (\cos \beta c \cos \beta\vartheta - \sin \beta c \sin \beta\vartheta)$$

dla wszelkich wartości ϑ. Stąd wynika:

$$\sin \beta c = 0\,, \qquad \eta = e^{\alpha c}\,,$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{czyli} & \beta = \dfrac{2\,n\pi}{c}\,, \qquad \alpha = -\dfrac{\varrho}{c}\,, \\ \text{gdzie} & \varrho = lg\left(\dfrac{\mu + 1}{\mu - 1}\right), \end{array} \right. \tag{17}$$

n zaś jest liczbą całkowitą.

Mamy więc ostatecznie:

$$f(\vartheta) = e^{-\frac{\varrho\vartheta}{c}} \cos \frac{2n\pi\vartheta}{c}\,. \tag{18}$$

Kładąc zamiast ϑ raz $t - \dfrac{x}{q}$, drugi raz $-t + \dfrac{x}{q}$, otrzymamy dla potencyału prędkości w pierwszym ośrodku

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi = e^{-\frac{\varrho}{c}\left(t-\frac{x}{q}\right)} \cos \frac{2n\pi}{c}\left(t-\frac{x}{q}\right) - e^{-\frac{\varrho}{c}\left(t+\frac{x}{q}\right)} \cos \frac{2n\pi}{c}\left(t+\frac{x}{q}\right), \\ 0 < x < X. \end{cases}$$

Podstawiając w równaniu (18) za ϑ:

$$\text{raz}\quad t - \frac{x}{q_1} + \frac{X}{q_1} - \frac{X}{q}, \qquad \text{drugi raz}\quad t - \frac{x}{q_1} + \frac{X}{q_1} + \frac{X}{q}$$

otrzymamy:

$$(20)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \varkappa \left\{ e^{-\frac{\varrho}{c}\left(t-\frac{x}{q_1}+\frac{X}{q_1}-\frac{X}{q}\right)} \cos \frac{2n\pi}{c}\left(t-\frac{x}{q_1}+\frac{X}{q_1}-\frac{X}{q}\right) - \right. \\ \left. - e^{-\frac{\varrho}{c}\left(t-\frac{x}{q_1}+\frac{X}{q_1}+\frac{X}{q}\right)} \cos \frac{2n\pi}{c}\left(t-\frac{x}{q_1}+\frac{X}{q_1}+\frac{X}{q}\right) \right\} \\ \text{dla} \qquad x > X. \end{cases}$$

Wyrażenie to na φ_1 daje się zresztą uprościć; ponieważ $c = \frac{2X}{q}$, czyli $\frac{2n\pi}{c} \cdot \frac{X}{q} = n\pi$, przeto, kładąc:

$$(21)\qquad t - \frac{x}{q_1} + \frac{X}{q_1} = \theta$$

znajdziemy po kilku prostych redukcyach (17):

$$\varphi_1 = \varkappa e^{-\frac{\varrho}{c}\theta}\left(e^{+\frac{1}{2}\varrho} - e^{-\frac{1}{2}\varrho}\right) \cos \frac{2n\pi}{c} \cdot \theta,$$

ponieważ jednak, według ostatniego z równań jest

$$(17)\qquad e^{\frac{1}{2}\varrho} - e^{-\frac{1}{2}\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\mu^2-1}},$$

przeto:

$$(22)\qquad \varphi_1 = \frac{2\varkappa}{\sqrt{\mu^2-1}} e^{-\frac{\varrho\theta}{c}} \cos \frac{2n\pi}{c} \cdot \theta.$$

Łatwo się przekonać, że całki (19) i (22) czynią zadość równaniom różniczkowym i wszystkim warunkom granicznym. Ogólniejsze całki otrzymamy, biorąc w (19) i (22) za n kolejno wszystkie liczby całkowite, mnożąc

przez dowolne stałe A_n wyrazy (19) i przez odpowiednie stałe B_n wyrazy (22) i tworząc sumy od $n = 1$ do $n = \infty$. Ilości B_n nie będą niezależne od odpowiednich ilości A_n, lecz będziemy mogli wyrazić jedne przez drugie za pomocą warunków granicznych, zachodzących dla $x = X$. Stałe zaś A_n będziemy mogli obliczyć, rozwijając funkcyę spółrzędnej x, wyrażającą stan początkowy obu środków, np. dla $t = 0$, na szereg trygonometryczny Fouriera i porównywając spółczynniki przy odpowiednich wyrazach.

Zresztą wszystkie te całki mają tę cechę wspólną, że, jakto widać z funkcyj wykładniczych, zawartych w (19) i (22), wartości φ i φ_1 wzrastają ustawicznie wraz z x dla każdego dowolnie obranego czasu. W tem miejscu zaznaczyć należy, że, jeżeli rozważania nasze o rozchodzenia się energii mają wogóle mieć znaczenie określone, musimy sobie wyobrazić, że zjawisko rozpoczyna się od takiego stanu początkowego, w którym przynajmniej drugi ośrodek w całej swej rozciągłości znajduje się jeszcze w spoczynku. Na podstawie tej uwagi łatwo dowieść można, że wartości dla spółrzędnej x, dopuszczalne przy danym jakimkolwiek czasie t, podlegają dla drugiego ośrodka pewnemu ograniczeniu. Jeżeli mianowicie funkcya jakakolwiek argumentu $t - \frac{x}{q_1}$, powiedzmy

$$F\left(t - \frac{x}{q_1}\right),$$

ma być dla $t = 0$ równą ilości stałej, niezależnej od x w całym obszarze dodatnich wartości na x, czyli, jeżeli ma być

$$F\left(-\frac{x}{q_1}\right) = \text{const.},$$

wówczas, podstawiając zamiast x argument $q_1 t - x$, otrzymamy:

$$\text{const.} = F\left(\frac{x}{q_1} - t\right),$$

i widzimy, że F jest wielkością stałą dla wszystkich wartości dodatnich argumentu $\frac{x}{q_1} - t$. Jeżeli więc funkcya F ma wyobrażać pewien stan zmienny w czasie i przestrzeni, możemy to pogodzić z obranym stanem początkowym tylko w ten sposób, że rozważamy argumenty $\frac{x}{q_1} - t$ wyłącznie ujemne, t. j. $x < q_1 t$; innemi słowy rozważamy tylko te punkty, których dosięgło zaburzenie w danej chwili. Dla tych i tylko dla tych punktów utrzymują się wzory powyższe (19) i (22).

Otóż, jeżeli wzór (22) napiszemy w postaci:

$$\varphi_1 = \frac{2\varkappa\, e^{-\frac{\varrho X}{c q_1}}}{\sqrt{\mu^2-1}}\, e^{-\frac{\varrho}{c}\left(t-\frac{x}{q_1}\right)} \cos\frac{2n\pi}{c}\left(t-\frac{x}{q_1}+\frac{X}{q_1}\right),$$

spostrzeżemy, że obszerność drgań wzrasta wprawdzie dla danego t wraz z wartością x, nie staje się jednak nigdy nieskończenie wielką, ponieważ $t-\frac{x}{q_1}$ ma być zawsze dodatnie.

Dla wszystkich $x > q_1 t$ nie mamy jeszcze w danej wchwili żadnych drgań; natomiast dla wszystkich $x < q_1 t$ mamy w chwili t szereg fal, których obszerność (amplituda) jest tem mniejsza, im bardziej zbliżamy się do płaszczyzny granicznej $x = X$, a więc im później fale te z płaszczyzny granicznej zostały wysłane. Zgadza się to najzupełniej z istotą rozważanego zjawiska; skoro bowiem ośrodek pierwszy wysłał już falę drgań o określonej obszerności, stracił on tem samem pewien zasób energii, a więc też zdolność wysyłania drgań o tejże samej obszerności, tak iż każda następna fala musi być słabszą.

Obliczmy wreszcie ilość energii, którą warstwa pierwszego ośrodka zawiera w chwili początkowej $t=0$ i porównajmy ją z tą ilością, którą pochłania drugi ośrodek od chwili $t=0$ do $t=\infty$. Ilość energii, zawarta w części walcowej warstwy ośrodka pierwszego o grubości X, o przekroju $=1$ i o tworzących równoległych do osi x, równa się:

$$\frac{1}{2}k\int_0^X\left(\frac{1}{q^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)dx, \quad ^{1)}$$

gzie φ jest dane przez równanie (19); wykonywając zaznaczone działania i podstawiając w ostatecznym wyniku $t=0$, otrzymamy:

$$\frac{k}{4q}\left(e^{\frac{2\varepsilon X}{q}}-e^{-\frac{2\varepsilon X}{q}}\right)\frac{\beta^2+2\varepsilon^2}{\varepsilon},$$

gdzie:

$$\varepsilon=\frac{\varrho}{c}, \qquad \beta=\frac{2n\pi}{c},$$

albo

$$+\frac{k\mu}{\mu^2-1}\;\frac{\beta^2+2\varepsilon^2}{\varepsilon q}. \tag{23}$$

[1]) Patrz np. Kirchhoffa „Mechanikę."

Z drugiej strony, ilość energii, przepływającej przez 1 cm. powierzchni granicznej w kierunku wartości x rosnących, w ciągu sekundy, można wyrazić przez

$$k_1\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\;\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}, \quad ^{1)}$$

gdzie φ_1 jest dane przez równanie (22). Ponieważ φ_1 czyni zadość równaniu

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+q_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0,$$

przeto powyższą ilość możemy napisać tak:

$$-\frac{k_1}{q_1}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)^2.$$

Podstawiając wartość (22), mnożąc przez dt i całkując od 0 do ∞, otrzymamy

$$+\frac{k_1}{q_1}\;\frac{k^2}{\mu^2-1}\;\frac{\beta^2+2\varepsilon^2}{\varepsilon}; \tag{24}$$

ponieważ $\varkappa=\frac{k}{k_1}$, $\mu=\frac{k_1 q_1}{kq}$, widzimy, że wyrazy (24) i (23) są identyczne, jak być powinno; albowiem cała energia początkowa, zawarta w warstwie ośrodka pierwszego, przepływa ostatecznie do ośrodka drugiego.

Przechodząc obecnie do fal kulistych pomyślmy sobie kulę płynną sprężystą o promieniu R, która jest otoczona innym jakimkolwiek nieskończenie rozległym płynem sprężystym. Jeżeli kula ta jest siedliskiem drgań podłużnych, zachodzących w kierunku jej promieni, wywoła ona też w otaczającym ośrodku fale kuliste podłużne, tak iż zjawisko w każdym punkcie zależeć będzie tylko od czasu t i od odległości $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ od środka kuli.

W tym przypadku ogólne równania różniczkowe potencyałów prędkości φ i φ_1 dla kuli ośrodka otaczającego przybierają kształt następujący:

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2}=q^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}, \qquad r<R. \tag{25}$$

i

[1]) Patrz Kirchhoffa „Mechanikę".

$$(26)\qquad \frac{\partial^2(r\varphi_1)}{\partial t^2}=q_1{}^2\,\frac{\partial^2(r\varphi_1)}{\partial r^2}\,,\qquad r>R\,.$$

Oprócz tego mamy warunki graniczne:

$$(27)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\quad \text{i}\quad k\varphi=k_1\varphi_1\,,\qquad r=R\,,$$

podobnie jak poprzednio.

Aby φ_1 było dla $r=0$ skończonem [1]), trzeba położyć:

$$(28)\qquad \varphi=\frac{f\left(t-\dfrac{r}{q}\right)-f\left(t+\dfrac{r}{q}\right)}{r}\,,\qquad r<R,$$

dla φ_1 zaś mamy:

$$(29)\qquad \varphi_1=\frac{F\left(t-\dfrac{r}{q_1}\right)}{r}\,,\qquad r>R\,,$$

ponieważ ośrodek zewnętrzny jest nieograniczony. Przez uwzględnienie warunków granicznych i wyrugowanie funkcyi F, otrzymamy:

$$(30)\qquad (\mu+1)f'(\vartheta+c)-(\mu-1)f'(\vartheta)+N\{f''(\vartheta+c)-f(\vartheta)\}=0,$$

gdzie

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \vartheta=t-\dfrac{R}{q}\,, & \dfrac{2R}{q}=c\,, & \\ \varkappa\,\dfrac{q}{q_1}=\mu\,, & \varkappa=\dfrac{k}{k_1}\,, & N=\dfrac{q}{R}\,(\varkappa-1)\,; \end{array}\right.$$

k i k_1 oznaczają gęstości kuli i ośrodka zewnętrznego.

Kładąc wreszcie

$$(32)\qquad \frac{\mu-1}{\mu+1}=\eta\,,\qquad \frac{N}{\mu+1}=\zeta\,.$$

będziemy mieli na wyznaczenie kształtu funkcyi f następujące równanie funkcyjne:

$$(33)\qquad f'(\vartheta+c)-\eta f'(\vartheta)+\zeta\{f(\vartheta+c)-f(\vartheta)\}=0\,.$$

[1]) Inaczej bowiem środek kuli byłby siedliskiem nieskończenie wielkiej energii.

Dla $\zeta=0$ równanie to staje się identyczne z równaniem (14) dla fal płaskich, i wyraża peryodyczne drgania s t ł u m i o n e. Dla $\eta=1$ mielibyśmy drgania o obszerności niezmiennej.

Aby uczynić zadość temu równaniu w przypadku ogólnym, t. j. dla jakichkolwiek wartości η i ζ, połóżmy, powodując się analogią do przypadku poprzedniego (fal płaskich):

$$(34)\qquad f(\vartheta)=\varepsilon^{\alpha\vartheta}\cos\beta\vartheta\,.$$

Funkcya ta w samej rzeczy czyni zadość powyższemu równaniu, przez podstawienie zaś otrzymujemy dwa równania na wyznaczenie stałych, α i β, zależnych od wartości η, ζ i c. Aby otrzymać równania te w sposób najprostszy, wychodzimy przedewszystkiem z całki a peryodycznej

$$(35)\qquad f(\vartheta)=e^{\gamma\vartheta}\,.$$

Przy uwzględnieniu następnie wartości sprzężonych γ otrzymamy drgania stłumione; podstawiając zaś powyższy wyraz w równaniu (33), otrzymamy:

$$e^{\gamma c}=\frac{N+(\mu-1)\gamma}{N+(\mu+1)\gamma}\,,$$

albo też

$$(36)\qquad e^{\gamma c}=\eta\,\frac{\gamma+a}{\gamma+b}\,,$$

gdzie dla skrócenia

$$(37)\qquad \frac{N}{\mu-1}=a\,,\quad \frac{N}{\mu+1}=b\,,\quad \frac{\mu-1}{\mu+1}=\eta=\frac{b}{a}\,.$$

Jednym z pierwiastków równania (36) jest $\gamma=0$. Równanie to musi mieć jednak przynajmniej jeszcze jeden pierwiastek. Pisząc zamiast (36)

$$\frac{1}{\eta}\,e^{\gamma c}=1+\frac{a-b}{\gamma+b}\,,$$

pamiętając o tem, że według (37) jest zawsze $a>b$ i badając przebieg po obu stronach funkcyj w ostatnim równaniu od $\gamma=0$ do $\gamma=+\infty$, i od $\gamma=0$ do $\gamma=-\infty$, przekonamy się łatwo, że, oprócz zera, nie istnieją pierwiastki dodatnie naszego równania (36), lecz mogą istnieć pierwiastki ujemne o wartości bezwzględnej $[\gamma]>[a]$. Odnośny więc układ zaburzeń ośrodka może się tylko ustawicznie zmniejszać, nigdy zaś wzmagać.

Wogóle, zależnie od stosunków ilości stałych, zawartych w równaniu (36), mogą istnieć oprócz pierwiastków rzeczywistych pierwiastki urojone, którym odpowiadałyby drgania peryodyczne o niezmniennej obszerności, jako też pierwiastki sprzężone, odpowiadające drganiom stłumionym. Aby ostatni przypadek nieco bliżej zbadać, połóżmy:

$$\gamma = \alpha + i\beta,$$

$$(38)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\eta} e^{\alpha c} \cos\beta c &= \frac{(a+\alpha)(b+\alpha)+\beta^2}{(b+\alpha)^2+\beta^2}, \\ \frac{1}{\eta} e^{\alpha c} \sin\beta c &= \frac{\beta(b-a)}{(b+\alpha)^2+\beta^2}, \end{aligned} \right.$$

z równań tych albo też z równań równoważnych

$$(39)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\eta^2} e^{2\alpha c} &= \frac{(a+\alpha)^2+\beta^2}{(b+\alpha)^2+\beta^2}, \\ tg\,\beta c &= \frac{\beta(b-a)}{(a+\alpha)(b+\alpha)+\beta^2}, \end{aligned} \right.$$

należy wyrazić ilości α i β przez a, b, c. Nie rozwiązując tych równań, widzimy pomimo to, że wielkość α, wyrażająca stłumienie, jest zupełnie niezależna od wielkości β, wyrażającej okres i że wogóle istnieje cały szereg odpowiadających sobie wartości α i β, a zatem cały szereg rozwiązań

$$f(\vartheta) = e^{\alpha\vartheta}\cos\beta\vartheta.$$

Całki ogólne otrzymalibyśmy, sumując wszystkie te rozwiązania szczególne, po pomnożeniu ich przez czynniki stałe dowolne. Znając kształt funkcyi f, możemy podobnie jak dla fal płaskich znaleść potencyały prędkości φ i φ_1 dla wszystkich punktów wewnątrz kuli, jako też ośrodka otaczającego:

$$(40)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{r} \left\{ e^{\alpha_m\left(t-\frac{r}{q}\right)} \cos\beta_n\left(t-\frac{r}{q}\right) - e^{\alpha_m\left(t+\frac{r}{q}\right)} \cos\beta_n\left(t+\frac{r}{q}\right) \right\}, \\ \varphi_1 &= \varkappa \sum_m \sum_n \frac{B_{mn}}{r} \left\{ e^{\alpha_m\left(t-\frac{r}{q_1}-\frac{R}{q}+\frac{R}{q_1}\right)} \cos\beta_n\left(t-\frac{r}{q_1}-\frac{R}{2}+\frac{R}{q_1}\right) \right. \\ &\qquad \left. - e^{\alpha_m\left(t-\frac{r}{q_1}+\frac{R}{q}+\frac{R}{q_1}\right)} \cos\beta_n\left(t-\frac{r}{q_1}+\frac{R}{q}+\frac{R}{q_1}\right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

gzie sumowania rozciągają się na wszystkie możliwe grupy rozwiązań ilości α i β, zaś A i B są ilościami stałemi, które można wyznaczyć, znając stan początkowy całego układu. Wszystkie uwagi, dotyczące tego stanu początkowego, są identyczne z uwagami, któreśmy uczynili przy badaniu fal płaskich.

Jeżeli $\beta = 0$, pierwsze z równań (38) daje nam rozważany już przypadek ruchu peryodycznego (równanie (36)).

Dla $c\beta = 2n\pi$, gdzie n jest liczbą całkowitą, mamy według drugiego z równań (38)

$$\frac{2\pi n(b-a)}{(b+\alpha)^2+4n^2\pi^2} = 0,$$

przypadek ten jest więc możliwy tylko wówczas, gdy $a = b$, tak iż mamy $\eta = 1$;

$$e^{\alpha c} = \frac{(b+\alpha)^2+4n^2\pi^2}{(b+\alpha)^2+4n^2\pi^2} = 1,$$

czyli $\alpha = 0$; odwrotnie też znajdujemy dla $\alpha = 0$ warunek $a = b$. Ponieważ $\eta = 1$ daje $\mu - 1 = \mu + 1$, $\mu = \infty$, a więc $k_1 = 0$, przeto widzimy, że drgania kuli są niestłumionemi wówczas i tylko wowczas, gdy kula znajduje się w próżni. I w tym więc przypadku zachodzi istotnie związek pomiędzy stłumianiem a promieniowaniem akustycznem.

Jeżeli stłumienie jest nieznaczne (przypadek ten zachodzi wówczas gdy gęstość ośrodka otaczającego, jest bardzo mała w porównaniu z gęstością kuli), możemy łatwo znaleść rozwiązania przybliżone równań (38).

W tym przypadku bowiem możemy położyć:

$$(41)\qquad c\beta = 2n\pi + \beta', \quad a - b = \delta,$$

gdzie β', δ są podobnie, jak i α ilościami tak małemi, że drugie i wyższe ich potęgi pominąć możemy. Z tem zastrzeżeniem pierwsze z równań (38) daje po rozwinięciu funkcyj trygonometrycznych i wykładniczych na szeregi:

$$\left(1+\frac{\delta}{b}\right)(1+\alpha c) = \frac{b^2+2b\alpha+b\delta+m^2+2m\beta'}{b^2+2b\alpha+m^2+2m\beta'},$$

gdzie $m = 2n\pi$; mnożąc przez mianownik prawej strony i odrzucając kwadraty i iloczyn ilości α, β', δ, otrzymamy:

$$(42)\qquad \alpha = -\frac{m^2\delta}{cb(b^2+m^2)}.$$

Podobnie też otrzymujemy z drugiego równia (38):

(43) $$\beta' = -\frac{m\,\delta}{b^2 + m^2},$$

t. j.

(44) $$\beta = \frac{2n\pi}{c}\left(1 - \frac{\delta}{b^2 + 4n^2\pi^2}\right),$$

Podstawiając znalezione na α i β wartości do wzoru

$$f(\vartheta) = e^{\alpha\vartheta} \cos \beta\vartheta,$$

biorąc za n kolejno wartości 1, 2, 3, ..., otrzymujemy nieskończony szereg rozwiązań szczegółowych; pomnożywszy je przez czynniki dowolne i sumując od $n=1$ do $n=\infty$, otrzymamy całkę ogólną, którą będziemy mogli przystosować do jakichkolwiek warunków początkowych.

TEORYA PRZEKSZTAŁCENIA PFAFFA.

PODAŁ

C. RUSJAN.

(Dokończenie). [1]

§ 3.

Własności przekształconych wyrażeń różniczkowych poprzednich §§.

W poprzednich §§ dowiedliśmy, że wyrażenie różniczkowe o parzystej liczbie zmiennych niezależnych x_i:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n}$$

w przypadku, gdy jego wyznacznik Δ nie jest równy zeru, można przekształcić na wyrażenie w nowych zmiennych $x_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ tak, że w nowej postaci

$$Z_2\, dz_2 + Z_3\, dz_3 + \ldots + Z_{2n}\, dz_{2n}$$

zmienna x_1 będzie się zawierała tylko we wspólnym czynniku μ spółczynników $Z_2, Z_3, \ldots, Z_{2n}$.

Wyrażenie różniczkowe o nieparzystej liczbie zmiennych x_i:

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n+1}\, dx_{2n+1}$$

w przypadku, gdy jego wyznacznik Δ_1 nie jest równy zeru, daje się sprowadzić do postaci

[1]) Patrz „Prace matematyczno-fizyczne," t. VIII, str. 61—98.