

$$(dx + p dz) dq - (dy + q dz) dp = 0,$$

w postaci:

$$(F_y + F_z q) F_x - (F_x + F_z p) F_y + (F_y p - F_x q + F_z p q) (F_x p + F_y q) = 0$$

wskutek $F = 0$.

Do tej kategorii równań należą te równania liniowe, których charakterystyki są albo ∞^2 prostymi minimalnymi, albo krzywymi ortogonalnymi pewnej dowolnej gromady ∞^1 kul.

Z tej kategorii można wyprowadzić pewną kategorię równań cząstkowych 1-go rzędu, których charakterystyki są liniami geodezyjnymi na powierzchniach całkowych, na podstawie twierdzenia, że normalne do powierzchni, wystawione wzdłuż pewnej linii krzywiznowej, mają obwiednię, która jest linią geodezyjną na jednej powierzchni środków. Mianowicie otrzymuje się twierdzenie następujące:

Powierzchnie środków jednej gromady, należące do powierzchni całkowych takiego równania cząstkowego 1-go rzędu, którego charakterystyki są liniami krzywiznowymi, są powierzchniami całkowymi takiego równania różniczkowego cząstkowego 1-go rzędu, którego charakterystyki są na wszystkich powierzchniach całkowych liniami geodezyjnymi. Takie równanie cząstkowe ma zawsze formę:

$$(p H_x + q H_y - H_z)^2 - (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 - 1) (p^2 + q^2 + 1) = 0,$$

gdzie H jest funkcją dowolną zmiennych x, y, z .

Warunek analityczny, jaki spełniać musi funkcja F w równaniach $F(x, y, z, p, q) = 0$, posiadających pominiętą własność, zawiera także drugie pochodne funkcji F ; z tego wynika, że równania, w ostatnim twierdzeniu wyszczególnione, nie wyczerpują całego zasobu owej kategorii równań.

PRZYSZYBY DO TEORYI FUNKCJI O OBSZARACH OSOBLIWYCH.

NAPISZAŁ

Z. KRYGOWSKI.

Punkty istotnie osobliwe funkcji analitycznych i jednowartościowych jeśli są w liczbie nieskończonej, tworzą albo tak zwane mnogości doskonałe (perfecte Mengen), albo linie osobliwe, albo wreszcie mogą zajmować całe obszary. W tym ostatnim razie mnogości punktów nieistotnie osobliwych funkcji mogą być albo odliczalne, albo nieodliczalne; występują one wewnątrz obszaru osobliwego wszędzie gęsto, gdyż pochodną mnogości punktów nieistotnie osobliwych funkcji jest mnogość punktów istotnie osobliwych. Poincaré pierwszy podał metodę tworzenia takich funkcji w przypadku, gdy obszar punktów osobliwych funkcji jest wielobokiem wypukłym, i pierwszy raz wyprowadził wyrażenie ogólne dla mnogości punktów odliczalnej dla takiego wieloboku. Metoda ta jednak uważania „środków mas“ nie da się prawdopodobnie przenieść do ogólnego przypadku jakiegokolwiek obszaru, to też istnienie takich funkcji dla jakichkolwiek obszarów nie może być a priori w ten sposób rozstrzygnięte. Można jednak w inny sposób *) przez wprowadzenie zasady odwzorowania mnogości punktów skutecznie to i dowieść identyczności tego zadania z rozwiązaniem problemu Dirichleta. Poniżej podaję inną zasadę szukania wyrażenia mnogości odliczalnych i wszędzie gęstych dla pewnych obszarów dość ogólnych; wpro-

*) Por. w Bulletin de la Société Mathématique t. XXV pracę: Z. Krygowski „Sur les fonctions à espaces lacunaires.“

wadzą nadto pojęcie funkcji analitycznej jednowartościowej, której obszary osobliwe w liczbie nieskończonej tworzą grupę nieciągłą. Obie te zasady objaśniam na przykładach.

1. Uważamy jako obszar osobliwy funkcji część płaszczyzny zespolonej $z = x + iy$, zawartej między łukami dwóch krzywych $y = \Phi_1(x)$ oraz $y = \Phi_2(x)$, przecinających się w dwu punktach A i B . Możemy przez uskutechnienie odpowiedniego przekształcenia spórzędnych zawsze przypuścić, iż punkty A i B znajdują się na prostej równoległej do osi odciętych, którą niechaj będzie oś x . Przypuśćmy nadto dla prostoty, iż cały uważany obszar między obu łukami znajduje się między dwiema prostymi, równoległymi do osi y , a poprowadzonymi przez punkty A i B . Niechaj odciętymi punktów A i B będą wielkości x_1 i x_2 . Jako wyrażenie mnogości punktów tak zwanych „wymiernych“ na odcinku prostej, łączącej punkty A i B i z założenia równoległej do osi odciętych, mamy wyrażenie.

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

gdzie m_1 oraz m_2 przebiegają niezależnie od siebie wszystkie liczby dodatnie i całkowite, nie wyłączając zera z wyjątkiem kombinacji $m_1 = m_2 = 0$. Dla punktów wymiennych, znajdujących się na prostej, poprowadzonej w punkcie

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = 0,$$

równoległej do osi y , oraz wewnątrz obszaru uważanego, mamy rzędną odpowiednio równą:

$$\frac{m_3 \Phi_1 \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) + m_4 \Phi_2 \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right)}{m_3 + m_4},$$

gdzie znowu m_3 oraz m_4 przebiegają niezależnie od siebie wszystkie liczby całkowite i dodatnie oraz zero, z wyjątkiem kombinacji $m_3 = m_4 = 0$. Mamy tedy jako ogólne wyrażenie mnogości punktów „wymiennych“ wewnątrz naszego obszaru wzór:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + i \frac{m_3 \Phi_1 \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) + m_4 \Phi_2 \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right)}{m_3 + m_4},$$

w którym należy wykluczyć kombinację $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 0$ oraz kombinacje $m_1 = m_2 = 0, m_3 = m_4 = 0$. Dla koła np. $x^2 + y^2 = 1$ otrzymujemy, stosując wzór powyższy, wyrażenie:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + i \frac{m_3 \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2} - m_4 \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2}}{m_3 + m_4},$$

które uproszczone daje wzór:

$$\frac{1}{m_1 + m_2} \left[(m_1 - m_2) + i 2 \sqrt{m_1 m_2} \frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4} \right].$$

W mnogości powyższej znajdują się jedynie niewymierności, zależne od pierwiastka kwadratowego, i nieskończenie wiele punktów wymiennych (gdy $m_1 = m_2$).

Uważajmy teraz półkole $x^2 + y^2 = 1$, położone ponad osią x . Dla tego półkola otrzymamy zupełnie podobny wzór:

$$(a) \quad \frac{1}{m_1 + m_2} \left[(m_1 + m_2) + i \frac{2 m_3 \sqrt{m_1 m_2}}{m_3 + m_4} \right]$$

Przy pomocy wyrażenia

$$\frac{\left(\frac{z - i}{z + i} \right)^2 - i}{\left(\frac{z - i}{z + i} \right)^2 + i}$$

możemy odwzorować to półkole na całe koło $x^2 + y^2 = 1$, a przeto wstawiając tu zamiast z wyrażenie (a), otrzymamy nowe wyrażenie na mnogość odliczalną i wszędzie gęstą dla całego koła $x^2 + y^2 = 1$.

Funkcja np.

$$\varphi(z) = \sum_{(m_1, \dots, m_4) = -\infty}^{+\infty} \frac{q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_3^{m_3} q_4^{m_4}}{z - \frac{1}{m_1 + m_2} \left[(m_1 - m_2) + i 2 \sqrt{m_1 m_2} \frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4} \right]};$$

$$|q_1| < 1, |q_2| < 1, |q_3| < 1, |q_4| < 1.$$

jest funkcją analityczną, dającą początek jednej funkcji jednowartościowej, czyli jest „monogeniczną“, skończoną i ciągłą dla wszystkich punktów, leżących po za kołem $x^2 + y^2 = 1$, które jest jej obszarem osobliwym.

Uważajmy jeszcze czworobok, którego wierzchołki są dane w sposób następujący. Uważajmy dwie wielkości dowolne ω i ω' , pierwszą rzeczywistą, drugą urojoną i obliczmy przy pomocy znanych wzorów z teorii funkcji eliptycznych niezmienniki g_2 i g_3 funkcji $p(u; g_2, g_3)$, nadto obliczmy wielkości rzeczywiste e_1, e_2, e_3 przy pomocy wzorów:

$$p\omega = e_1, p(\omega + \omega') = e_2, p\omega' = e_3.$$

Czworobok uważany niechaj ma wierzchołki dane przez wzór:

$$\frac{\pm \sqrt{e_2 - e_3} \pm i \sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_2}} = \pm x_1 \pm i x_2$$

Stosując naszą metodę, otrzymamy jako wyrażenie mnogości punktów dla tego czworoboku

$$\frac{-m_1 + m_2}{m_1 + m_2} x_1 + i \frac{-m_3 + m_4}{m_3 + m_4} x_2,$$

albo zmieniając m_1 na m_2 , m_3 na m_4 i wstawiając za x_1 i x_2 wartości dane powyżej, mamy:

$$\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \left[\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{e_2 - e_3} + i \frac{m_3 - m_4}{m_3 + m_4} \sqrt{e_1 - e_2} \right] = a_{m_1, m_2, m_3, m_4},$$

Przejdźmy teraz przy pomocy odwzorowania podobnego od powyższego czworoboku do koła zakreślonego promieniem jednostkę z początku współrzędnych. Jako mnogość punktów odliczalnych wszędzie gęstą dla koła, otrzymamy, na podstawie wzoru Schwarza, wyrażenie

$$-\sqrt{\frac{\sqrt{e_2 - e_3} + i \sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_2 - e_3} - i \sqrt{e_1 - e_2}}} \cdot \frac{p[a_{m_1, m_2, m_3, m_4}] - e_2 + i \sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}}{p[a_{m_1, m_2, m_3, m_4}] - e_2 - i \sqrt{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)}},$$

w którym punkty mnogości są wogóle przestępne.

2. W metodzie Poincaré'ego elementem zasadniczym, który staje się nieskończenie wielkim dla punktów mnogości jest $\frac{1}{z - a_i}$, gdzie a_i przebiega wszystkie punkty mnogości. Można jednak, jakto podaliśmy w wyżej cytowanej pracy, wprowadzić inne elementy zasadnicze i w ten sposób otrzymać np. funkcje analityczne jednowartościowe o obszarach osobliwych periodycznych. Nim przejdziemy do owej metody i jej uogólnienia, wspomnę o pewnym, podanym jest Weierstrassa w pracy: „Zur Functionenlehre“ przykładzie funkcji, określonej szeregiem podwójnie nieskończonym, a posiadającym jako linię osobliwą oś y na płaszczyźnie zmiennej zespolonej; przykład ten nasunął mi myśl wprowadzenia innych elementów zasadniczych do metody Poincaré'ego. Jeśli w przykładzie Weierstrassa szereg podwójnie nieskończony utworzony z elementów, którymi są funkcje wymierne zmiennej zespolonej, zamienimy na szereg pojedynczo nieskończony,

otrzymany w nowych elementach szeregu funkcję wykładniczą. Możemy to przekształcenie wykonać w następujący sposób:

Uważajmy funkcję

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(z) = \zeta(z) = \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} \right]; \quad w = 2m\omega + 2n\omega',$$

natenczas:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi i} \left[\zeta(\omega)\omega' - \zeta(\omega')\omega \right] &= \frac{2}{\pi i} (\eta\omega' - \eta'\omega) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega i} - \frac{\omega}{\omega' i} \right) \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} i \left[\frac{\omega'}{(1-2m)\omega - 2n\omega'} + \frac{2}{\pi} \frac{\omega'}{i} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')} - \frac{2}{\pi} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} i \left[\frac{\omega}{(1-2m)\omega' - 2n\omega} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{i} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'} \right] \right]. \end{aligned}$$

Kładąc $\frac{\omega'}{\omega i} = z$, mamy po uproszczeniu:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi i} [\eta\omega' - \eta'\omega] &= \frac{2}{\pi} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{2}{\pi} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \frac{z}{[1-2m-2ni z][2m+2ni z]} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \frac{z}{[1-2m-2ni z][2m+2ni z]} \end{aligned}$$

Lecz z teorii funkcji eliptycznych wiadomo, iż $\eta\omega' - \eta'\omega = \pm \frac{\pi i}{2}$, stoso-

wnie do tego, czy $R\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) = R(z) > 0$, czy też $R\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) = R(z) < 0$. Widzimy tedy, iż powyższy szereg określa funkcję, mającą oś y jako linię osobliwą i ma wartość ± 1 stosownie do tego, czy część rzeczywista z jest dodatnia czy też ujemna. Dzielać jeszcze w drugim szeregu ostatniej równości licznik i mianownik przez z^2 , oraz zmieniając n na m oraz $ma - n$, przez co suma nie ulegnie zmianie, możemy powyższej funkcji nadać kształt:

$$\frac{2}{\pi} \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{2}{\pi} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \frac{z}{[1-2m-2ni z][2m+2ni z]} + \frac{2}{\pi} \sum'_{(m, n) = -\infty}^{+\infty} \frac{z^{-1}}{[1-2m-2ni z^{-1}][2m+2ni z^{-1}]} = \pm$$

Możemy już teraz łatwo zamienić powyższy szereg podwójnie nieskończony na szereg pojedynczo nieskończony. W tym celu zauważymy, iż

$$\eta = \frac{\pi^2}{2\omega} \left[\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\left(e^{\frac{\pi i n \omega'}{\omega}} - e^{-\frac{\pi i n \omega'}{\omega}} \right)^2} \right]; \quad \eta' = \frac{\pi^2}{2\omega'} \left[\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\left(e^{\frac{\pi i n \omega}{\omega'}} - e^{-\frac{\pi i n \omega}{\omega'}} \right)^2} \right].$$

Mamy tedy:

$$\frac{2}{\pi i} [\eta \omega' - \eta' \omega] = \frac{\pi}{6} \left[z + \frac{1}{z} \right] - 4\pi \left[z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(e^{\pi n z} - e^{-\pi n z})^2} + \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(e^{\frac{\pi n}{z}} - e^{-\frac{\pi n}{z}})^2} \right] = \pm 1.$$

szereg pojedynczo nieskończony, w którego elementach występuje funkcja wykładnicza.

3. Powyższy przykład odrazu nasuwa myśl wprowadzenia innych elementów niż $\frac{1}{z - a_i}$ do metody Poincarégo. Uważajmy w tym celu element

$$\frac{(-1)^m e^{-\frac{\pi i a_i}{a}}}{z - a_i - m a},$$

w którym m przyjmuje wszystkie wartości dodatnie i ujemne, a_i zaś przebiega wszystkie punkty mnogości. Uważajmy teraz funkcję:

$$\varphi(z) = \sum_i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m A_i e^{\frac{-\pi i a_i}{a}}}{z - a_i - m a},$$

w której A_i oznaczają czynniki stałe; przypuszczamy nadto, iż $\sum_i A_i$ jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym. Szereg powyższy jest bezwzględnie zbieżny dla wszystkich z , leżących po za punktami $a_i + ma$, a możemy się o tem przekonać w następujący sposób. Zauważmy, iż

$$\varphi(z) = \sum_i A_i \left[\frac{1}{z - a_i} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^m (z - a_i)}{(z - a_i)^2 - m^2 a^2} \right] e^{-\frac{\pi i a_i}{a}},$$

czyli na mocy znanego wzoru

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{a} \sum_i \frac{A_i e^{\frac{-\pi i a_i}{a}}}{\sin \frac{\pi}{a} (z - a_i)}$$

albo

$$\varphi(z) = \frac{2\pi i}{a} e^{\frac{-\pi i z}{a}} \sum_i \frac{A_i}{e^{\frac{2\pi i}{a} (z - a_i)} - 1}.$$

Uważajmy teraz dowolny lecz stałe określony punkt z po za obszarami osoblami peryodycznymi, w których znajdują się punkty $a_i + ma$; matenczas z pośród odliczalnego szeregu funkcji

$$(a) \quad \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{a} (z - a_i)} - 1}$$

jedna przynajmniej będzie miała w uważanym punkcie z swą wartość bezwzględną największą i mniejszą od pewnej określonej wielkości dodatniej M ; szereg tedy bezwzględnych wartości

$$\sum_i \left| A_i \right| \cdot \left| \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{a} (z - a_i)} - 1} \right| < M \cdot \sum_i \left| A_i \right|$$

jest zawsze skończony, przeto szereg pierwotny jest bezwzględnie zbieżny. Uważając punkt $z + \delta z = z'$ w pobliżu punktu z , przekonamy się, iż największa wartość bezwzględna elementu (a) jest bliską największej wartości bezwzględnej elementu w punkcie z , a przeto M' w tym punkcie jest sąsiadną wartością M . Szereg tedy pierwotny jest więc także jednostajnie zbieżny. Funkcja tedy powyższa, na mocy pewnego twierdzenia Weierstrassa, jest funkcją, dającą początek jednej funkcji jednowartościowej, ciągłej i skończonej dla wszystkich wartości argumentu, położonych po za obszarami osoblami.

Oczywiście przypuszczamy, iż obszary peryodyczne nie pokrywają się wzajemnie, a więc nie dzielą płaszczyzny na 2 oddzielne części, czyli, że funkcja jest „monogeniczną“. Nadto wiemy, iż obszary osoblne są utworami o pojedynczej łączności.

4. Uważajmy teraz funkcje analityczne jednowartościowe, które obszary osoblne są podwójnie peryodyczne. Aby wprowadzić odpowiedni element zasadniczy, uważajmy funkcję podwójnie peryodyczną $f(z)$, posiadającą w równoległoboku peryodów (ω, ω') jedynie dwa bieguny a oraz a' , pojedyncze i różne od siebie. Wiadomo z teorii funkcji eliptycznych [Briot et Bouquet: „Théorie des fonctions elliptiques“ str. 289], iż rozwinięcie takiej funkcji $f(z)$ jest

$$f(z) - \frac{\pi H}{\omega} = \frac{a\pi}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cotg \frac{\pi}{\omega} (z - a - m\omega') - \frac{a'\pi}{\omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \cotg \frac{\pi}{\omega} (z - a' - m\omega');$$

gdzie $\pm \alpha$ są residuami, jak wiadomo, sobie równymi i o znakach przeciwnych, H zaś oznacza stałą

$$H = \frac{1}{\pi} \int_{z_0}^{z_0 + \omega} f(z) dz,$$

gdzie z_0 jest dowolne. Szereg powyższy możemy jeszcze tak napisać:

$$f(z) - \frac{\pi H}{\omega} = \frac{2\pi i \alpha}{\omega} \left[e^{\frac{\pi i}{\omega}(z - \alpha)} - e^{\frac{-\pi i}{\omega}(z - \alpha)} \right] e^{\frac{-\pi i}{\omega}(z + \alpha)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')}}{\left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - 1 \right] \left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - \alpha' - m\omega')} - 1 \right]}$$

albo

$$f(z) - \frac{\pi H}{\omega} = \frac{2\pi i \alpha}{\omega} \left[e^{\frac{2\pi i}{\omega} z} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha'} \right] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')}}{\left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha'} \right] \left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha'} \right]}.$$

Przyjmijmy, iż stałą dowolną α tak dobraliśmy, by było:

$$\alpha = \frac{\omega}{2\pi i} \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha'}},$$

natenczas:

$$f(z) - \frac{\pi H}{\omega} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')}}{\left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha} \right] \left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha'} \right]}.$$

Uważajmy teraz funkcję $\varphi(z)$, daną przez szereg

$$\varphi(z) = \sum_i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{A_i e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')}}{\left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha_i} \right] \left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - m\omega')} - e^{\frac{2\pi i}{\omega} \alpha'_i} \right]}$$

Szereg ten w razie, gdy część rzeczywista stosunku $\frac{\pi i \omega'}{\omega}$ jest dodatnia, t. j.

$$R\left(\frac{\pi i \omega'}{\omega}\right) > 0,$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny dla wszystkich z , z wyjątkiem wartości

$$\alpha_i + m\omega + m'\omega', \text{ oraz } \alpha'_i + m\omega + m'\omega',$$

gdzie tak m jakoteż m' przebiegają niezależnie od siebie wszystkie liczby całkowite dodatnie lub ujemne, punkty zaś α_i, α'_i oznaczają punkty mnogości oddzielnych. Skoro obszary osobliwe, w których znajdują się mnogości punktów α_i, α'_i są od siebie różne, natenczas funkcja $\varphi(z)$ posiada we wnętrzu każdego z równoległoboków peryodów dwa obszary osobliwe, których jest ∞^2 . Funkcja powyższa jest znowu, na podstawie twierdzenia Weierstrassa, „monogeniczną”, jednowartościową i skończoną po za obszarami osobliwymi, które są teraz podwójnie peryodyczne.

W razie, gdy punkty α_i, α'_i są identyczne, funkcję $\varphi(z)$ możemy przedstawić przez szereg [Briot et Bouquet l. c. str. 291]

$$\varphi(z) = \sum_i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{A_i}{\sin^2 \frac{\pi}{\omega}(z - \alpha_i - m\omega')},$$

czyli, wprowadzając funkcję wykładniczą, otrzymamy:

$$\varphi(z) = -4 \sum_i \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{A_i e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - \alpha_i - m\omega')}}{\left[e^{\frac{2\pi i}{\omega}(z - \alpha_i - m\omega')} - 1 \right]^2}.$$

Łatwo już teraz przejść do funkcji najogólniejszych, t. j. takich, których obszary osobliwe tworzą grupę nieciągłą, której podstawienia są liniowe. Należy w tym razie wprowadzić jako element zasadniczy funkcję Poincarégo.

Nakoniec zauważymy, iż metoda ustępu pierwszego stosuje się i do funkcji np. trzech zmiennych, czyniących zadość równaniu Laplace'a, że więc przy jej pomocy możemy otrzymać funkcje potencjalne czyli potencjały, mające pewne obszary trójwymiarowe jako obszary osobliwe.